Pubblicazione bimensile. N. 1.



# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

## RENDICONTI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

**Volume XXVII.° — Fascicolo 1°**

2° SEMESTRE.

*Comunicazioni pervenute all'Accademia durante le ferie del* 1918.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

# ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

## PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

---

### I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 9 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a pagine 4 $^1/_2$.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 30 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

### II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta, pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 50 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 30 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

---

SERIE QUINTA

---

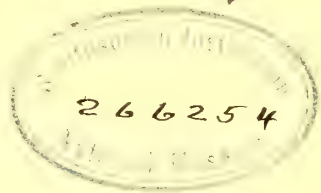
# RENDICONTI

---

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

---

**VOLUME XXVII.**

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

### Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

---

## MEMORIE E NOTE
## DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

*pervenute all'Accademia durante le ferie del 1918.*

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo)

---

### Meccanica. — *Sulla determinazione teorica della forma del Geoide.* Nota del Corrisp. E. Almansi [1].

1. Sono oggetto di questa Nota alcune considerazioni che svolgo a complemento di quanto fu da me esposto in precedenti lavori [2].

Il problema di determinare la forma dell' intero Geoide, desumendola dai valori della gravità sulla superficie fisica della Terra, consta essenzialmente di due parti:

*a*) la ricerca dei valori che assume sul Geoide G la gravità $g'$ relativa ad un sistema ideale T′ limitato da G, avente lo stesso asse di rotazione e la stessa velocità angolare della Terra, e pel quale G è ancora una superficie d'equilibrio;

*b*) la deduzione, dai valori di $g'$, della forma di G.

Per passare dal sistema reale T al sistema ideale T′, noi dobbiamo immaginare di sopprimere le masse $m$ che nel sistema reale si trovano fuori del Geoide, e di sostituirle con masse $m'$ situate entro il Geoide, e il cui potenziale, su questa superficie, sia uguale al potenziale delle masse $m$.

Nell'ordine di approssimazione al quale ci atteniamo, i termini di correzione a cui dà origine il passaggio dall'uno all'altro sistema, si possono

(1) Pervenuta all'Accademia il 22 giugno 1918.

(2) *Sulla forma dello sferoide terrestre dedotta dalle misure di gravità,* Rendic. Acc. Lincei, a. 1917, 1° sem., fasc. 6° (Nota I); *Sulla determinazione della forma del Geoide,* ibid., a. 1917, 2° sem., fasc. 5° (Nota II).

calcolare come se il Geoide fosse sferico. Ad una massa elementare esterna $dm$ potremo allora immaginare sostituita una massa interna $dm'$, attigua al punto P' coniugato armonico del punto P a cui è attigua la $dm$. Se O è il centro, R il raggio medio della Terra, posto $OP = R + h$, $OP' = R - h'$, dovrà aversi

$$(R + h)(R - h') = R^2,$$

da cui

$$h' = \frac{h}{1 + \frac{h}{R}}.$$

Fra le due masse corrispondenti deve poi intercedere la relazione

$$\frac{dm'}{dm} = \frac{h'}{h}.$$

Non commetteremo, per altro, errori apprezzabili, se nei termini piccolissimi (del 2° ordine) che si tratta di calcolare, trascureremo $\frac{h}{R}$ rispetto all'unità, e riterremo perciò $h'$ uguale ad $h$, $dm'$ uguale a $dm$. Il passaggio dal sistema T al sistema T' si presenta allora come un semplice *rovesciamento* delle masse esterne.

2. È noto che l'Helmert, a fine di rendere legittimo, anche sul Geoide, lo sviluppo in serie del potenziale per funzioni sferiche, considera una superficie, che denoterò con $S_0$, parallela al Geoide, situata nel suo interno, e che ne dista di $\alpha R$, $\alpha$ essendo lo schiacciamento della Terra; e su questa superficie immagina *condensate*, mediante spostamenti verticali, le masse sovrastanti (1).

Ora è da osservare che il procedimento proposto da Helmert non può ritenersi atto alla costruzione del sistema T', nè per conseguenza della gravità $g'$, se si vuole che dai valori di $g'$ sia deducibile, almeno teoricamente, e coll'approssimazione richiesta, la forma del Geoide.

Un esempio numerico giustificherà l'asserto.

Consideriamo sul Geoide una massa cilindrica $m$, di raggio $a$, di altezza $h$, di densità $\frac{1}{2}\varrho_0$, $\varrho_0$ essendo la densità media della Terra. Siano P e G i centri delle basi superiore ed inferiore. In corrispondenza della massa $m$ il Geoide potremo ritenerlo piano.

Diciamo $q$, $q'$, $q_0$ le attrazioni esercitate nel punto P dalla massa $m$, dalla stessa massa rovesciata, e dalla massa condensata sulla superficie $S_0$. Le differenze $q - q'$, $q - q_0$ ci daranno la diminuzione che subisce la gra-

(1) *Die mathematischen und physikalischen Theorieen der höheren Geodäsie*, vol. II, cap. 2°.

vità nel punto P, rispettivamente per il rovesciamento della massa $m$, e per la sua condensazione sulla superficie $S_0$. Poniamo

$$g_0 = \frac{4}{3}\pi f \varrho_0 R,$$

ove $f$ denota la costante della gravitazione, quindi $g_0$ un valore approssimato della gravità; e inoltre

$$\varepsilon = \frac{q - q'}{g_0} \quad , \quad \varepsilon_0 = \frac{q - q_0}{g_0} .$$

Potremo supporre uguale ad 1 la costante $f$ che figura nei numeratori e nei denominatori, e pure uguale ad 1 la densità del cilindro, purchè si supponga $\varrho_0 = 2$; onde avremo $g_0 = \frac{8}{3}\pi R$,

$$\varepsilon = \frac{3}{4}\frac{q - q'}{2\pi R} \quad , \quad \varepsilon_0 = \frac{3}{4}\frac{q - q_0}{2\pi R} .$$

Si ottengono le espressioni di $q$ e di $q'$ ricordando che un cilindro di raggio $a$, di altezza $h$, di densità 1, esercita sopra un punto esterno che appartenga al suo asse e disti di $z$ dalla base più vicina, l'attrazione

$$2\pi \left\{ h + \sqrt{a^2 + z^2} - \sqrt{a^2 + (z + h)^2} \right\} .$$

Per avere l'espressione di $q_0$ si ricorderà che un disco circolare omogeneo, di raggio $a$, di massa $\pi a^2 h$, esercita sopra un punto dell'asse che ne disti di $z$, l'attrazione

$$2\pi h \left\{ 1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right\} .$$

Assegnamo dei valori numerici ad $a$ ed $h$. Sia $a = 5km$, $h = 0{,}5$. Sarà, rispettivamente per i due cilindri e per il disco, $z = 0$, $z = 0{,}5$, $z = 21{,}9$. Troveremo

$$\varepsilon = 0{,}0000058 \quad , \quad \varepsilon_0 = 0{,}0000544 .$$

La differenza $\varepsilon_0 - \varepsilon = 0{,}0000486$ è assai maggiore del quadrato della costante $\gamma = 0{,}005302$ che figura nella espressione della gravità in funzione della latitudine, e che abbiamo assunta come una quantità del primo ordine (Nota I, § 1). Dovremo quindi considerare $\varepsilon_0 - \varepsilon$ come una quantità del *secondo ordine*.

Nel calcolo della gravità ideale il rovesciamento delle masse esterne non potrebbe, pertanto, venir sostituito colla condensazione immaginata da Helmert. Il calcolo precedente mostra che lo spostamento delle masse più

vicine al punto P può dar luogo, se eseguito con questo metodo, ad errori non trascurabili; nè v'è motivo per ritenere che tali errori debbano essere costantemente compensati dagli spostamenti delle altre masse.

3. Le ricerche aventi attinenza colla forma del Geoide portano dunque, allorchè si voglia tener conto delle quantità del secondo ordine, a considerare simultaneamente il sistema reale T, ed un sistema ideale T′ ottenuto mediante il rovesciamento delle masse situate fuori del Geoide. Ad un punto qualunque dello spazio corrisponderà allora un valore della gravità reale $g$, ed un valore della gravità ideale $g'$, una direzione della verticale reale $n$, ed una direzione della gravità ideale $n'$, ecc. Si avranno pure da considerare due sistemi di superficie epuipotenziali: le superficie equipotenziali *reali* E, e le superficie equipotenziali *ideali* E′; e fra questi due sistemi di superficie si potrà stabilire una corrispondenza, ritenendo corrispondenti una E ed una E′ quando i rispettivi potenziali hanno sulle due superficie valori uguali. Il Geoide corrisponderà a se stesso.

Fuori di G, le superficie E′, che non sono direttamente influenzate dalle masse esterne $m$, presenteranno una maggiore regolarità delle E, e si discosteranno meno di queste dalla forma di G.

In corrispondenza di una regione limitata A della superficie della Terra, la forma delle E′ si potrà determinare con sufficiente esattezza, quando siano determinate, in un numero abbastanza grande di punti P di A, le direzioni delle normali alle E′, ossia delle verticali ideali $n'$. Per passare, in un punto P, dalla verticale reale $n$ alla verticale ideale $n'$, si dovrà calcolare la differenza (geometrica) fra le componenti orizzontali delle attrazioni esercitate nel punto P dalle masse $m$ e dalle masse $m'$.

4. Torniamo ai valori della gravità $g'$ sul Geoide.

Se P è un punto della superficie fisica della Terra, G il punto d'incontro col Geoide della normale a questa superficie condotta per P, $g$ il valore della gravità reale nel punto P, $g'$ il valore della gravità ideale nel punto G, si ha

$$g' = (1 + k)\, g - \delta, \tag{1}$$

ove $\delta$ rappresenta la differenza fra le componenti secondo $n$ delle attrazioni esercitate in P dalle masse $m$ e dalle masse $m'$, quindi $g - \delta$ (con un errore trascurabile) la gravità ideale nel punto P; $kg$ l'incremento che subisce la gravità ideale quando si passa dal punto P della superficie della Terra, al punto G del Geoide (Nota II, § 2).

Sui valori di $\delta$ mi limito qui a riportare alcuni risultati.

Diciamo $\sigma$ quella parte del Geoide che è situata nell'interno della superficie fisica della Terra, $d\sigma$ un suo elemento. Sia $\mu$ la massa compresa fra $d\sigma$, la superficie della Terra, e il cono che ha per vertice il centro O del Geoide, per direttrice il contorno di $d\sigma$; $\varrho$ il rapporto fra la densità

media di $\mu$ e la densità media della Terra; $F\varrho\, d\sigma$ l'elemento di $\delta$ che ha origine dal rovesciamento della massa $\mu$. Avremo allora

$$\delta = \int_\sigma F \varrho\, d\sigma .$$

Sia L la distanza dell'elemento $d\sigma$ dal punto G, $h$ l'altezza della superficie della Terra sul Geoide, in corrispondenza di $d\sigma$; denotiamo ora con $h_0$ l'altezza GP. Sarà

$$F = F(h_0, h, L).$$

Si trova che la funzione F è positiva soltanto in una piccola regione $\sigma_0$ di $\sigma$, che contiene il punto G. Con grande approssimazione la regione $\sigma_0$ si può determinare nel modo seguente. Consideriamo un ellissoide di rivoluzione avente per centro il punto G, per asse la normale GP. Siano $1{,}4\, h_0$ ed $1{,}6\, h_0$ i suoi semi-assi equatoriale e polare. Denoti $l$ l'intersezione dell'ellissoide colla superficie fisica della Terra, $l_0$ la proiezione di $l$ sul Geoide. La regione $\sigma_0$ è quella parte di $\sigma$ che è situata nell'interno della linea $l_0$.

Le masse $\mu$ sovrastanti a $\sigma_0$ portano dunque, sul valore di $\delta$, un contributo positivo, tutte le altre un contributo negativo; ma $\delta$, in generale, risulta positivo.

La parte di $\delta$ dovuta alle masse $\mu$ la cui altezza è inferiore a 1000 m. e la cui distanza da P supera 120 km., non arriva mai a $10^{-6}\, g_0$.

In corrispondenza di un altipiano di grande estensione il valore di $\delta$ è sempre molto piccolo. I massimi valori di $\delta$ si hanno allorchè le masse esterne, in prossimità di P, presentano una forma che si avvicina a quella di un cono col vertice in P, ed è grande l'altezza del cono, ma piccolo l'angolo al vertice.

Una parte, d'altronde piccolissima, del termine $\delta$, è dovuta alla presenza della massa atmosferica.

5. Esaminiamo l'altro termine $kg$ che interviene nella formula (1). Si ha (Nota II, § 2)

$$k = k' + k'^2 ; \tag{2}$$

$$k' = \frac{\left(\frac{\partial U'}{\partial n}\right)_G - \left(\frac{\partial U'}{\partial n}\right)_P}{\left(\frac{\partial U'}{\partial n}\right)_G} . \tag{3}$$

ove U' è il potenziale del sistema T', $n$ la direzione PG.

Riferiamoci ad una terna di assi ortogonali $(x, y, z)$, assumendo il punto G come origine, la retta GP come asse delle $z$. Su questa retta sarà $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial z}$; quindi, per la formula (3),

$$k' = \frac{\left(\frac{\partial U'}{\partial z}\right)_P - \left(\frac{\partial U'}{\partial z}\right)_G}{-\left(\frac{\partial U'}{\partial z}\right)_G}. \tag{4}$$

Osserviamo che, essendo tutta la massa del sistema T′ contenuta entro il Geoide, nello spazio esterno la funzione U′ è regolare, e detta $\omega$ la velocità angolare di rotazione della Terra, verifica l'equazione

$$\frac{\partial^2 U'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U'}{\partial z^2} = 2\omega^2. \tag{5}$$

Ammettiamo che $\frac{\partial U'}{\partial z}$ sia sviluppabile in serie di potenze rispetto a $z$. Nel punto P è $z = h$; onde arrestandoci al termine in $h^2$ avremo

$$\left(\frac{\partial U'}{\partial z}\right)_P - \left(\frac{\partial U'}{\partial z}\right)_G = \left(\frac{\partial^2 U'}{\partial z^2}\right)_G \cdot h + \left(\frac{\partial^3 U'}{\partial z^3}\right)_G \cdot \frac{h^2}{2}.$$

Nel secondo membro le derivate di U′ s'intendono prese sulla faccia *esterna* del Geoide.

Sostituendo nella formula (4) otteniamo, tolti gl'indici G,

$$k' = \frac{\frac{\partial^2 U'}{\partial z^2}}{-\frac{\partial U'}{\partial z}} \cdot h + \frac{\frac{\partial^3 U'}{\partial z^3}}{-\frac{\partial U'}{\partial z}} \cdot \frac{h^2}{2}. \tag{6}$$

Dall'essere U′ costante sul Geoide si ricava

$$\frac{\partial^2 U'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U'}{\partial y^2} = \frac{2}{R} \frac{\partial U'}{\partial z},$$

ove $\frac{2}{R}$ denota la curvatura media del Geoide nel punto G. In virtù della equazione (5) sarà

$$\frac{\partial^2 U'}{\partial z^2} = -\frac{2}{R}\frac{\partial U'}{\partial z} + 2\omega^2 = -\frac{2}{R}\frac{\partial U'}{\partial z}(1 + \lambda).$$

ove

$$\lambda = \frac{R\omega^2}{-\frac{\partial U'}{\partial z}} = \frac{R\omega^2}{g'}.$$

Poniamo

$$\nu = \mathrm{R}^2 \frac{\frac{\partial^3 \mathrm{U}'}{\partial z^3}}{\frac{\partial \mathrm{U}'}{\partial z}}.$$

La formula (6) potrà scriversi

$$k' = (1 + \lambda) \frac{2h}{\mathrm{R}} - \frac{1}{2} \nu \frac{h^2}{\mathrm{R}^2}.$$

A $\lambda$ potremo attribuire il valore 0,0035, a $\nu$ il valore 6 (come se il Geoide fosse sferico, ed $\omega = 0$). Avremo allora

$$k' = 2{,}007 \frac{h}{\mathrm{R}} - 3 \frac{h^2}{\mathrm{R}^2}.$$

E passando a $k$ mediante la formola (2), a meno di termini trascurabili,

$$k = 2{,}007 \frac{h}{\mathrm{R}} + \frac{h^2}{\mathrm{R}^2}.$$

Nel primo termine non si può attribuire ad R un valore costante su tutto il Geoide. Si otterrà, con approssimazione sufficiente, l'espressione di R, considerando il Geoide come un ellissoide.

Il termine $\frac{h^2}{\mathrm{R}^2}$ è sempre piccolissimo. Ma i massimi valori di $\frac{h}{\mathrm{R}}$ sono da ritenersi piccoli del primo ordine; e perciò, nella trattazione teorica del problema, i termini come $\frac{h^2}{\mathrm{R}^2}$ non sono trascurabili.

6. La conoscenza di $g'$ in un numero sufficientemente grande di punti del Geoide, e di una dimensione di questa superficie, porterebbe a conoscere con molta esattezza il valore della massa terrestre.

Noi abbiamo considerati tre sistemi: il sistema reale T, il sistema ideale T′, ed il sistema T″ (Nota II, § 4) limitato da uno sferoide regolare S. Siano M, M′, M″ le masse dei tre sistemi. Poichè nel passaggio da T a T′ la massa non varia, sarà $\mathrm{M} = \mathrm{M}'$, quindi

$$\mathrm{M} = \mathrm{M}'' + (\mathrm{M}' - \mathrm{M}'').$$

La massa M″ del sistema T″ si deduce dalla espressione del suo potenziale newtoniano, e precisamente dal coefficiente di $\frac{1}{r}$ (v. Nota I).

La massa $\mathrm{M}' - \mathrm{M}''$ ci è poi data dalla funzione $g_0 u$, differenza fra i potenziali V′, V″ dei due sistemi T′, T″ (Nota II, § 5).

7. La conoscenza di $g'$ fornirebbe anche una indicazione sulla distribuzione della massa terrestre nell'interno del Geoide.

Noi possiamo infatti, sul Geoide G e nello spazio esterno, considerare $g_0 u$ come il potenziale newtoniano di masse $m_1$ distribuite in modo irregolare nel sistema T'. Rappresentando convenzionalmente queste masse mediante una distribuzione di densità D sulla superficie G, e considerando il Geoide come una sfera di raggio R, si avrà in ogni suo punto

$$(7) \qquad D = -\frac{g_0}{4\pi f R}\left(u + 2R\frac{\partial u}{\partial r}\right).$$

Per passare al sistema reale T dovremo supporre di riportare fuori del Geoide le masse $m'$ (masse $m$ rovesciate). Le irregolarità nella distribuzione della massa terrestre sono dunque rappresentate, entro il Geoide, dalle masse $m_1 - \bar{m}'$.

Poniamo $g_0 = \frac{4}{3}\pi f \varrho_0 R$ (nelle Note precedenti è denotata con $g_0$ la gravità sull'equatore dello sferoide S, ma nei termini come $g_0 u$ i due valori possiamo ritenerli uguali); e inoltre $D = h_1 \varrho_1$, ove $h_1$ denoti una lunghezza, quindi $\varrho_1$ una densità (di volume), alla quale assegneremo un valore determinato. La formula (7) darà

$$h_1 = -\frac{1}{3}\frac{\varrho_0}{\varrho_1}\left(u + 2R\frac{\partial u}{\partial u}\right).$$

Si ha poi sul Geoide (Nota I, §§ 5 e 6)

$$2u + R\frac{\partial u}{\partial r} = -R\frac{\Delta g}{g_0} + 2c \quad , \quad u = s + c\,,$$

ove $\Delta g$ rappresenta la differenza fra la gravità $g'$ e la gravità $g''$ relativa al sistema T'' limitato dallo sferoide S, $s$ lo scostamento del Geoide dallo sferoide, $c$ una costante. Eliminando da queste formule $u$ e $\frac{\partial u}{\partial r}$, e risolvendo rispetto ad $h_1$, si ottiene, a meno di una costante additiva che corrisponderà ad una massa distribuita regolarmente, e potrà per conseguenza tralasciarsi,

$$h_1 = \frac{\varrho_0}{\varrho_1}\left(\frac{2}{3}\frac{\Delta g}{g_0}R + s\right),$$

nella qual formula, dovuta ad Helmert, si ha dunque da intendere che il termine $\Delta g$ rappresenti le anomalie della gravità ideale, come è stata qui definita.

## Matematica. — *Fondamenti della geometria proiettivo-differenziale di una superficie.* Nota I del Corrisp. GUIDO FUBINI [1].

1. La geometria differenziale classica studia le proprietà differenziali di una superficie invarianti per il gruppo dei *movimenti*; scopo di questo lavoro è di porre i fondamenti *analitici* della geometria differenziale di una superficie rispetto al gruppo *proiettivo*. E in una Nota, in corso di stampa negli Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, se ne daranno le prime applicazioni *geometriche*. Già in precedenti ricerche [2] mi ero occupato di questo problema, e avevo provato che l'ufficio compiuto per la geometria differenziale *metrica* di una superficie dalle *forme di Gauss* veniva nel caso proiettivo compiuto da altre forme differenziali. Queste o si potevano ridurre ad una sola ai differenziali terzi, o, molto più semplicemente, si potevano ridurre a un sistema di tre forme nei differenziali primi. Le prime due, una quadratica ed una cubica, corrispondono all'*elemento lineare*, ed erano da me definite quasi sempre soltanto a meno di un fattore; quanto alla terza forma, anch'essa quadratica, io ero riuscito soltanto a scriverla in coordinate assintotiche (cioè supponendo assintotiche le linee coordinate).

*Normalizzare* [3] le prime due forme (*elemento lineare proiettivo*), *normare* le coordinate *omogenee* di un punto della superficie, così da ridurre la teoria ad una semplicità insperata; trovare tutte le relazioni tra le nostre forme, e le coordinate omogenee normalizzate nel sistema più generale di coordinate curvilinee $u = u_1$ e $v = u_2$: ecco lo scopo della presente ricerca. Da questa tra l'altro apparirà che su una superficie si può definire una geom. *metrica* (avente le assintotiche per linee di lunghezza nulla), che è *invariante per collineazioni*, e di cui (loc. cit.) vedremo applicazioni geometriche. Restano sistematicamente *escluse* le superficie *sviluppabili*, e quasi sempre anche le *rigate*, per cui la teoria è molto più semplice.

[1] Pervenuta all'Accademia il 1° luglio 1918.

[2] *Definizione proiettivo-differenziale di una superficie* (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino 1914, vol. 49). Citerò questa Mem. con T. — *Invarianti proiettivo-differenziali*, ecc. (Annali di Matem., 25, Ser. 3ª). Citerò questa Mem. con A. — *Applicabilità proiettiva di due superficie* (Rendic. del Circ. Matem. di Palermo, 1916, tomo 41). Citerò questa Mem. con P. — Una ulteriore Nota di argomento affine, *Su alcune congruenze W* ecc., pubblicata nei Rend. della R. Acc. dei Lincei, non sarà citata nella presente Nota.

[3] Se più quantità sono definite a meno di un fattore, diremo *normare* o *normalizzare* queste quantità la scelta opportuna di tale fattore.

2. Preliminari analitici. — È indispensabile, per evitare molte difficoltà, ricorrere ad alcuni algoritmi di calcolo differenziale assoluto, che in parte credo nuovi.

Se $g$ è una forma quadratica non degenere nelle $\xi, \eta$, diremo che un'altra forma $\psi_n$ nelle $\xi, \eta$ è *coniugata* di $g$, se, scritta la $g$ sotto forma di prodotto $(a\xi + b\eta)(l\xi + m\eta)$, la forma $\psi_n$ è del tipo $\lambda(a\xi + b\eta)^n + \mu(l\xi + m\eta)^n$, ove $\lambda, \mu$ non dipendono da $\xi, \eta$ (1). *Essa individua a sua volta la forma* $\overline{\psi}_n = \lambda(a\xi + b\eta)^n - \mu(l\xi + m\eta)^n$. Se $n = 3$, la $\psi_3$ è *coniugata* alla $g$, se ha lo Hessiano proporzionale a $g$; la $\overline{\psi}_3$ è il covariante cubico di $\psi_3$.

Una forma $\varphi_n$ qualsiasi si può scrivere in uno e in un solo modo come uguale a $\psi_n + \varphi_{n-2}\, g$, ove $\psi_n$ è *coniugata* a $g$, e $\varphi_{n-2}$ è una forma di grado $n-2$. Diremo $\psi_n$ il *resto*, $\varphi_{n-2}$ il *quoziente* ottenuti dividendo (*covariantemente*) la $\varphi_n$ per $g$. Dividendo di nuovo $\varphi_{n-2}$ per $g$ e così continuando, si ha che ogni forma $\varphi_n$ si può scrivere nella forma

$$\varphi_n = \psi_n + \psi_{n-2}\, g + \psi_{n-4}\, g^2 + \psi_{n-6}\, g^3 + \cdots \tag{1}$$

ove le $\psi_n$ sono coniugate alla $g$.

Queste locuzioni si conserveranno anche per forme *differenziali*, quando sia $\xi = du$, $\eta = dv$, $g = a_{11}du^2 + 2a_{12}du\,dv + a_{22}dv^2$ con $A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$. Porremo $u = u_1$, $v = u_2$.

Se $x$ è una funzione di $u, v$, con $x_r, x_{rs}, x_{rst} \ldots$ indicheremo le derivate *covarianti* della $x$ rispetto alla forma $g$. Con $x^{(r)} = A_{r1}x_1 + A_{r2}x_2$ (ove $A_{rs}$ è il complemento, diviso per $A$, del termine $a_{rs}$) indichiamo le così dette derivate prime *controvarianti* della $x$. Formano pure sistemi *controvarianti* le seguenti espressioni, che chiameremo pertanto *differenziali controvarianti*:

$$\left\{\begin{aligned} &\delta u_i = du_i\ ;\ \delta^2 u_i = d^2 u_i + \sum_{r,s} \left\{ {rs \atop i} \right\} du_r\, du_s \\ &\delta^3 u_i = d(\delta^2 u_i) + \sum_{r,s} \left\{ {rs \atop i} \right\} du_r\, \delta^2 u_s \end{aligned}\right. \tag{2}$$

dove con $\left\{ {rs \atop i} \right\}$ sono indicati i simboli di Christoffel di seconda specie per la forma $g$. Per ogni funzione $x$ delle $u, v$ è poi:

$$d^2x = \sum x_r\, \delta^2 u_r + D_2 x \quad \text{ove} \quad D_2 x = \sum_{r,s} x_{rs}\, du_r\, du_s \tag{3}$$

$$d^3x = \sum x_r\, \delta^3 u_r + 3\sum x_{rs}\, du_r\, \delta^2 u_s + D_3 x \quad \text{ove} \quad D_3 x = \sum_{r,s,t} x_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t. \tag{3$_{bis}$}$$

(1) Ciò si può enunciare (Segre) dicendo anche che i punti, per cui $\psi_n = 0$, sono trasformati l'uno nell'altro da una proiettività ciclica di ordine $n$, che lascia fissi i due punti (distinti per ipotesi) in cui la $g$ è nulla.

Ricordando poi che

$$d \log \sqrt{A} = \left[\binom{11}{1} + \binom{12}{2}\right] du + \left[\binom{22}{2} + \binom{12}{1}\right] dv \tag{4}$$

si trova che

$$d\left[\sqrt{A}\,(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u)\right] = \sqrt{A}\,(du\,\delta^3 v - dv\,\delta^3 u) \tag{5}$$

Diremo *intrinseca* un'espressione, il cui significato è indipendente dalla particolare scelta delle linee coordinate $u, v$; tali sono le quantità che figurano nei due membri di (4); tali sono $D_2 x$, $D_3 x$, ecc.

Se $g$ ha coefficienti costanti, le derivate covarianti e i differenziali controvarianti si riducono alle derivate e ai differenziali ordinarii.

Se $b_{rs}$ formano un sistema covariante, e $b_{rst}$ ne è il sistema derivato covariante, allora (anche se $b_{rst}$ non è simmetrico) la forma $\sum b_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t$ si dirà la derivata covariante di $\varphi = \sum b_{rs}\, du_r\, du_s$, e si indicherà con $\delta\varphi$. Vale l'identità:

$$d\varphi - \delta\varphi = 2 \sum b_{rs}\, du_r\, d^2 u_s\,. \tag{6}$$

3. Elemento lineare proiettivo di una superficie. — Con $x, y, z, t$ indicheremo coordinate omogenee di un suo punto, con $g$ la precedente forma quadratica *scelta ad arbitrio.* Con $(x, x_1, x_2, x_{11})$ indicherò il determinante, la cui prima riga è formata dalle quantità scritte in parentesi, e le altre tre righe se ne deducono sostituendo $y, z, t$ alla $x$. Con notazioni *analoghe* indichiamo determinanti *analoghi.* Sono *intrinseche le forme*

$$F_2 = \frac{1}{\sqrt{A}} (x, x_1, x_2, d^2 x) = \frac{1}{\sqrt{A}} (x, x_1, x_2, D_2 x) \tag{7}$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{\sqrt{A}} (x, x_1, x_2, d^3 x) = \tag{8}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{A}} (x, x_1, x_2, \sum x_{rs}\, du_r\, \delta^2 u_s) + \frac{1}{\sqrt{A}} (x, x_1, x_2, D_3 x)$$

di cui la seconda ha l'inconveniente di contenere i differenziali *secondi.* Per ovviare a questo, si osservi che in virtù della (6)

$$dF_2 = \frac{2}{\sqrt{A}} (x, x_1, x_2, \sum x_{rs}\, du_r\, \delta^2 u_s) + \delta F_2 \tag{9}$$

donde, derivando effettivamente la (7) e ricordando (4), si trae:

$$\delta F_2 = \frac{1}{\sqrt{A}} (x, x_1, x_2, D_3 x) - \tag{10}$$

$$- \frac{1}{\sqrt{A}} (x, dx, x_{11}\, du + x_{12}\, dv, x_{12}\, du + x_{22}\, dv),$$

Se ne deduce che (indicato con $\nabla$ il discriminante di $F_2$)

$$(11) \qquad F_3 = -3d\,F_2 + 2\Phi_3 + \frac{3}{4} F_2\, d \log \frac{\nabla}{A} =$$

$$= -3\delta F_2 + \frac{2}{\sqrt{A}}(x, x_1, x_2, D_3 x) + \frac{3}{4} F_2\, d \log \frac{\nabla}{A}$$

è pure una forma *intrinseca* del *primo ordine* (e terzo grado). *La* $F_2 = 0$ *definisce le assintotiche; la* $F_3 = 0$ *le linee di Darboux-Segre* (cfr. i seguenti risultati con i miei lavori cit., ove si dànno altri significati di $F_3$). È facile riconoscere che:

*Se alla forma* $g$ *sostituiamo un'altra forma* $g'$ *di discriminante* $A'$, *e se moltiplichiamo le coordinate omogenee per uno stesso fattore* $\varrho = \varrho(u,v)$, *le forme* $F_2$, $F_3$ *restano moltiplicate per lo stesso fattore* $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A'}}\varrho^4$.

*La forma* $F_3$ *è coniugata* ad $F_2$ (cioè ha lo Hessiano proporzionale ad $F_2$) (1). Per *normare* in modo *intrinseco* le forme $F_2$, $F_3$ (che abbiamo ora riconosciuto determinate a meno di uno stesso fattore) poniamo $\varphi_r = \lambda F_r$ per $r = 1, 2$, scegliendo $\lambda$ in modo che *il discriminante di* $F_3$ *sia uguale* (*a meno di un fattore numerico da prefissarsi a piacere*) *al cubo del discriminante di* $F_2$. *Le forme* $\varphi_2, \varphi_3$ *avranno anch'esse significato intrinseco.*

Vale poi il teorema (cfr. P): *Condizione necessaria e sufficiente affinchè due superficie abbiano comuni le forme* $\varphi_2, \varphi_3$ *è che esse siano proiettivamente applicabili.* Cosicchè l'aver comuni le forme $\varphi_2, \varphi_3$ *è condizione necessaria, ma non sufficiente* affinchè le due superficie siano *collineari*. In particolare: *La geometria metrica definita su una superficie, quando si assuma la forma* $\varphi_2$ *come elemento lineare, si conserva per trasformazioni proiettive* (ed anche per *deformazioni proiettive*).

Caso metrico. Supposto $g$ = elemento lineare di Gauss, supposto $t = 1$ ed $x, y, z$ coordinate cartesiane ortogonali, $F_2 = D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2$ è la nota seconda forma di Gauss. Ricordando i ben noti valori delle $x_{rs}$, si deduce che l'ultimo termine della (10) è nullo. Poichè $\nabla : A = K$ = curvatura totale, sarà così:

(1) Per dimostrare questo teorema si assumano coordinate assintotiche, e la $g$ a coeffic. costanti. Sarà $(x, x_1, x_2, x_{11}) = (x, x_1, x_2, x_{22}) = 0$ e quindi anche $(x, x_1, x_{11}, x_{22}) = 0$. Basterà provare per es. che il coefficiente di $du^2\,dv$ in $F_3$ è nullo, cioè che

$$(x, x_2, x_{11}, x_{12}) - (x, x_1, x_2, x_{112}) + \frac{\partial}{\partial u}(x, x_1, x_2, x_{12}) = 0\,;$$

ciò che è ben evidente.

$$(12)\quad F_3 = -\delta F_2 + \frac{3}{4} F_2\, d \log K \quad ; \quad \Phi_3 = \frac{3}{2} dF_2 - \frac{1}{2} \delta F_2 =$$

$$= \frac{3}{2} dF_2 + \frac{1}{2} F_3 - \frac{3}{8} F_2\, d \log K$$

in perfetto accordo con le formole di loc. cit.

Caso proiettivo. In questo caso è ovvio che la scelta più opportuna è data *dalla* $\varphi_2 = g$, *perchè* $\varphi_2$ *è invariante per collineazioni*; e *normare* poi le $x, y, z, t$ in guisa che *ne risulti* $F_2 = \varphi_2$. Cosicchè $\delta F_2 = 0$ (perchè derivata covariante di $F_2$ rispetto a se stessa). Chiameremo *normali* le coordinate omogenee così normate; esse nella geometria *proiettiva* tengono il luogo delle coordinate *cartesiane* nella geometria *metrica*. Le coordinate *normali* di punti omologhi di due superficie collineari sono sempre legate da una trasformazione lineare intera *a coefficienti costanti, a determinate unità*. Ricordando che $\nabla = A$, che $\delta F_2 = 0$, si deduce che in coordinate *normali* valgono le formole seguenti di massima semplicità:

$$(13)\qquad \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{\nabla}} (x, x_1, x_2, D_2 x) = \frac{1}{\sqrt{\nabla}} (x, x_1, x_2, d^2 x)$$

$$(14)\quad \varphi_3 = \frac{2}{\sqrt{\nabla}} (x, x_1, x_2, D_3 x) \;;\; 2\Phi_3 = 3\, d\varphi_2 + \varphi_3 \;;\; \nabla = \text{discrim. di } \varphi_2 .$$

Indicheremo con H il discriminante dell'elemento lineare, con N *il rapporto di* $\varphi_2$ *alla seconda forma di Gauss*; il rapporto dei valori di $(x, x_1, x_2, d^2x)$ secondo che si usino coordinate normali o cartesiane vale pertanto $\frac{\sqrt{\nabla}}{\sqrt{H}} \frac{\varphi_2}{F_2}$ (se $F_2$ è la seconda forma di Gauss) cioè vale $N^2 \sqrt{K}$.

*Le coordinate normali si ottengono perciò moltiplicando le coordinate cartesiane* $x, y, z, 1$ *per* $\varrho$, *ove* $\varrho^2 = N \sqrt[4]{K}$.

4. Per completare questi studî, è necessario premettere alcune altre nozioni analitiche. Indichiamo con $\varphi_2, \varphi_3$ due forme *coniugate covarianti*, una quadratica, una cubica. Se $x^{(u)}, x^{(v)}$ sono le derivate controvarianti di $x(u, v)$, la forma *polare* quadratica $-2P_2^{(x)}$ di $x^{(u)}, x^{(v)}$ rispetto a $\varphi_3$ è una forma *covariante* (che ora calcoleremo insieme alle forme seguenti in un caso notevole). Dividendo $\delta\varphi_3$ per $\varphi_2$ si trovi $\delta\varphi_3 = -2\varphi_4 + 3\varphi_2 g_2$ (con $\varphi_4$ coniugata di $\varphi_2$); sia $\varphi_1$ la forma (univocamente determinata) del primo ordine tale che $g_4 - \varphi_1 \varphi_3$ sia divisibile per $\varphi_2$. Le forme $\varphi_1, g_2, \varphi_4$ saranno nuove forme *covarianti*. Un'altra forma covariante $2g_3$ è la derivata covariante del prodotto ottenuto moltiplicando $\varphi_2$ per la sua curvatura; è pure covariante il resto $\Gamma_2$ ottenuto dividendo per $\varphi_2$ la forma $\frac{1}{2}\varphi_1^2 + \delta\varphi_1$. Infine, se $t_2$ è una nuova forma quadratica covariante coniugata di $\varphi_2$, il resto $R_t$ ottenuto dividendo per $g$ la forma $\delta t_2 + 2\varphi_1 t_2$ è una nuova forma

covariante coniugata di $\varphi_2$. Se noi scegliamo a lineè coordinate quelle che annullano $\varphi_2$, e se è

$$\varphi_2 = 2\beta\gamma\, du\, \delta v \quad , \quad \varphi_3 = 2\beta\gamma\,(\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3) \quad , \quad t_2 = \mathrm{P}\, du^2 + \mathrm{Q}\, dv^2$$

allora:

$$(15) \quad \varphi_4 = \beta^2\gamma \frac{\partial \log(\beta\gamma^2)}{\partial u} du^4 + \gamma^2\beta \frac{\partial \log(\gamma\beta^2)}{\partial v} dv^4$$

$$(16) \quad g_2 = \beta \frac{\partial \log(\gamma\beta^2)}{\partial v} du^2 + \gamma \frac{\partial \log(\beta\gamma^2)}{\partial u} dv^2$$

$$(17) \quad \varphi_1 = \frac{\partial \log(\beta\gamma^2)}{\partial u} du + \frac{\partial \log(\gamma\beta^2)}{\partial v} dv$$

$$(18) \quad g_3 = \left(\frac{\partial^3 \log \beta\gamma}{\partial u^2\, \partial v} - \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u} \frac{\partial^2 \log \beta\gamma}{\partial u\, \partial v}\right) du^2\, dv + \\ + \left(\frac{\partial^3 \log \beta\gamma}{\partial u\, \partial v^2} - \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial v} \frac{\partial^2 \log \beta\gamma}{\partial u\, \partial v}\right) du\, dv^2$$

$$(19) \quad \Gamma_2 = \left(\frac{\partial^2 \log \beta\gamma^2}{\partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial \log \beta}{\partial u} \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u}\right) du^2 + \\ + \left(\frac{\partial^2 \log \beta\gamma^2}{\partial v^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial \log \gamma}{\partial v} \frac{\partial^2 \log \gamma\beta^2}{\partial v}\right) dv^2$$

$$(20) \quad \mathrm{P}_2^{(x)} = -(\beta^2\gamma x^{(1)}\, du^2 + \beta\gamma^2\, x^{(2)}\, dv^2) = (\beta x_2\, du^2 + \gamma x_1\, dv^2)$$

$$(21) \quad \mathrm{R}_t = \left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial u} + 2\mathrm{P} \frac{\partial \log \gamma}{\partial u}\right) du^3 + \left(\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial v} + 2\mathrm{Q} \frac{\partial \log \beta}{\partial v}\right) dv^3 .$$

5. Sezioni piane. — Le forme $\varphi_2, \varphi_3$ non bastano sempre a caratterizzare una superficie a meno di collineazioni, come proveremo più avanti. Per finire di determinare completamente la superficie nel gruppo proiettivo, basta (cfr. la T) dare $\mathrm{S} = (x, dx, d^2x, d^3x)$; la quale, uguagliata a zero, definisce le sezioni piane. Scelta *ad arbitrio* la $g$, si trova per le (3), (7), (8) che:

$$(22) \quad \mathrm{S} = (x, dx, \mathrm{D}_2 x, \textstyle\sum x_r\, \delta^3 u_r) + 3\,(x, dx, \sum x_r\, \delta^2 u_r, \sum x_{rs}\, du_r\, \delta^2 u_s) + \\ + 3\,(x, dx, \mathrm{D}_2 x, \textstyle\sum x_{rs}\, du_r\, \delta^2 u_s + \\ + (x, dx, \textstyle\sum x_r\, \delta^2 u_r, \mathrm{D}_3 x) + (x, \mathrm{D}x, \mathrm{D}_2 x, \mathrm{D}_3 x) = \\ = -\sqrt{\mathrm{A}}\,(du\, \delta^3 v - dv\, \delta^3 u)\, \mathrm{F}_2 + \sqrt{\mathrm{A}}\,(du\, \delta^2 v - dv\, \delta^2 u) \times \\ \times [\Phi_3 + 3\,(x, dx, x_{11}\, du + x_{12}\, dv, x_{21}\, du + x_{22}\, dv)] + (x, \mathrm{D}x, \mathrm{D}_2 x, \mathrm{D}_3 x).$$

*Ogni termine di* (22) *è intrinseco, e si può studiare separatamente*: ecco il grande vantaggio di avere usato simboli di calcolo assoluto, che hanno qui evitato assai gravi difficoltà!

Indicheremo con $S_m$ il valore metrico S (corrispondente al caso che si usino coordinate cartesiane, che $g$ sia l'elemento lineare di Gauss, di cui indichiamo con H il discriminante, e che infine $F_2$ sia la seconda forma di Gauss: cfr. § 3). Sarà

$$(22)_{bis} \qquad S_m = -d\left[\sqrt{H}\,(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u)\right] + \\ + \sqrt{H}\,(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u)\left(\frac{3}{2}\,dF_2 + \frac{1}{2}\,F_3 - \frac{3}{8}\,F_2 d\log K\right) + (\dot{x}, Dx, D_2x, D_3x).$$

Confrontando il solo primo termine coi risultati di T, si trova:

$$(23) \qquad S_m = \frac{1}{T}\,\frac{1}{R^3}\,ds^6$$

(R, T raggi di curvatura e torsione).

Si noti che $\sqrt{H}\,(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u) = \dfrac{ds^3}{R_g^3}$ ($R_g$ raggio di curvatura geodetica). Quindi per le *geodetiche* $S_m$ si riduce al suo *ultimo termine*; *il quale* $\left(\text{pertanto vale } \dfrac{1}{T}\,\dfrac{1}{R^3}\,ds^6 \text{ calcolato lungo la geodetica tangente, cioè}\right)$ *vale* $\dfrac{1}{T_g}\,\dfrac{1}{R_n^3}\,ds^6$ ($T_g$, $R_n$ raggi di torsione geod. e di curvatura normale). Per mezzo dei risultati ottenuti in (A) per le forme $F_2$, $F_3$, dalla $(22)_{bis}$ si possono trarre svariati significati metrici di $S_m$.

## Matematica. — *Alcune formule sulle superficie applicabili.* Nota di MATTEO BOTTASSO, presentata dal Corrispondente R. MARCOLONGO [1].

Alle formule sulla flessione d'una superficie inestendibile comunicate in una mia Nota [2], credo utile aggiungerne alcune altre, non meno notevoli, delle quali spero poter mostrare fra breve l'importanza nella teoria dell'applicabilità delle superficie. Queste nuove formule esprimono, in modo esplicito, l'omografia $d\lambda$ differenziale dell'isomeria vettoriale $\lambda$, che muta gli elementi lineari $(dP)$ uscenti dal punto generico $P$, di una superficie $S$, nei corrispondenti elementi $(dP_0)$ uscenti dal punto $P_0$ (omologo di $P$) di

[1] Pervenuta all'Accademia il 4 luglio 1918.

[2] M. Bottasso, *Sulla flessione delle superficie inestendibili* (Rend. R. Accad dei Lincei, vol. XXIV (5ª), 2° sem. 1915, pp. 174-182).

una superficie $S_0$ applicabile ad $S$, nonchè il vettore unitario **N**, normale ad $S$ in $P$, nell'analogo vettore $\mathbf{N}_0$ di $P_0$. Di tale omografia $d\lambda$, che risulta degenere, ho calcolato (nn. 2 e 3) gl'invarianti, il vettore e l'**R**. Valendomi poi dei risultati sulle derivate delle isomerie vettoriali, in generale, dal prof. Burali [1], ne ho dedotto (nn. 4 e 5) $\mathrm{Rot}\,\lambda$, $\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\lambda$, $\mathrm{grad}\,\lambda$, $\mathrm{grad}\,\mathrm{K}\lambda$, nonchè le derivate rispetto al punto $P$ (od al punto $P_0$) di $\lambda$, $\mathrm{K}\lambda$, $\lambda\mathbf{x}$, $\mathrm{K}\lambda\mathbf{x}$; per $\mathbf{x}$ vettore arbitrario.

1. Introducendo le solite dilatazioni $\sigma$, $\sigma_0$ caratterizzate dalle:

$$(a)\qquad \sigma = \frac{d\mathrm{N}}{dP} \quad , \quad \sigma\mathrm{N} = 0 \quad ; \quad \sigma_0 = \frac{d\mathrm{N}_0}{dP_0} \quad , \quad \sigma_0\mathrm{N}_0 = 0 \, ,$$

insieme all'isomeria vettoriale $\lambda$ ad invariante terzo positivo ($\mathrm{I}_3\lambda = 1$) tale che:

$$\lambda\, dP = dP_0 \quad , \quad \lambda\mathrm{N} = \mathrm{N}_0 \, ,$$

per ogni elemento $dP$; porremo ancora, per definizione:

$$[1]\qquad \nu = \sigma_0\lambda - \lambda\sigma \, .$$

Allora le (1) e (2) della mia Nota [cit. in (2)] si scrivono:

$$(1)\qquad d\lambda . \mathrm{N} = \nu . dP \, , \qquad (2)\qquad d\lambda . \mathbf{u} = \mathrm{H}(\nu\mathbf{u}\, , \mathrm{N}_0)\, dP_0 \, ,$$

essendo **u** un arbitrario vettore, funzione di $P$, del piano tangente ad $S$ in $P$. Formule analoghe si hanno scambiando fra loro le due superficie $S$ ed $S_0$; in generale per passare da una di queste formule alla corrispondente basta sostituire $P$, **N**, **u**, $\sigma$ e $\lambda$ rispettivamente con $P_0$, $\mathbf{N}_0$, $\mathbf{u}_0$, $\sigma_0$ e $\lambda_0 = \lambda^{-1} = \mathrm{K}\lambda$, e quindi $\nu$ con $-\mathrm{K}\nu = \sigma\mathrm{K}\lambda - \mathrm{K}\lambda . \sigma_0$. Nel seguito, pure omettendo spesso di scrivere materialmente queste formule, quando occorra si designeranno con gli stessi numeri di richiamo usati per le loro corrispondenti, affettati dall'indice 0.

Dalla 2ª e 4ª delle ($a$), per la [1] segue subito la proprietà:

$$[2]\qquad \nu\mathrm{N} = 0 \quad , \quad \mathrm{K}\nu\mathrm{N}_0 = 0 \, ;$$

come pure, tenendo presente il teorema di commutazione (*A. V.*, I, pag. 32):

$$[3]\qquad \mathrm{N}_0 \times \nu\mathbf{x} = 0 \quad , \quad \mathrm{N} \times \mathrm{K}\nu\mathbf{x} = 0 \, ,$$

(1) C. Burali-Forti, *Sulle derivate delle isomerie vettoriali* (Ibidem, vol. XXV (5ª), 1° sem. 1916, pp. 709-716). Vedi pure dello stesso Autore i lavori indicati nella mia Nota cit. in (2). Nel seguito dovremo ancora citare: C. Burali-Forti et R. Marcolongo, *Analyse vectorielle générale*, vol. I e II (Pavia, Mattei & C., 1912-13), che richiameremo brevemente con « *A. V.* ».

per $\mathbf{x}$ vettore arbitrario. Inoltre, moltiplicando a destra ed a sinistra la [1] per $K\lambda$, ovvero $K\nu$ per $\lambda$, essendo $\lambda . K\lambda = K\lambda . \lambda = 1$, si ha:

$$[4] \qquad \lambda . K\nu . \lambda = \nu \quad , \quad K\lambda . \nu . K\lambda = K\nu ,$$

le quali possono ancora scriversi sotto la forma:

$$[4'] \qquad \lambda . K\nu = \nu . K\lambda \quad , \quad K\lambda . \nu = K\nu . \lambda ;$$

e siccome in ognuna di queste i due membri sono coniugati l'uno dell'altro, ne segue che $\lambda . K\nu$ e $K\lambda . \nu$ *sono dilatazioni*.

2. Qualunque sia il vettore $\mathbf{x}$, applicando le (1), (2) alle due sue componenti (normale e tangenziale) $\mathbf{x} \times N . N$ , $\mathbf{x}' - \mathbf{x} \times N . N$ e sommando, per la [2], il teorema di commutazione ed (*A. V.*, I, pag. 43 [2]), si ha

$$d\lambda . \mathbf{x} = \mathbf{x} \times N . \nu dP - H(\nu \mathbf{x} , N_0)\, dP_0 = H(N , \nu dP)\, \mathbf{x} - H(K\nu\, dP , N_0)\, \mathbf{x}',$$

da cui:

$$[5] \quad d\lambda = H(N , \nu\, dP) - H(K\nu\, dP_0 , N_0) = \nu H(N , dP) - H(dP_0 , N_0)\, \nu ,$$

Da questa, per la (1) e l'analoga $(1)_0$, si ha pure subito:

$$[6] \quad d\lambda = d\lambda . H(N , N) + H(N_0 , N_0) . d\lambda = H(N , d\lambda N) + H(K d\lambda N_0 , N_0) .$$

L'omografia $d\lambda$, come somma di due diadi, *è degenere*, cioè $I_3\, d\lambda = 0$, mentre $I_2\, d\lambda$ si ha subito da una nota formula (*A. V.*, II, pag. 136 [12]); per $I_1\, d\lambda$ dalla [6] si ottiene (*A. V.*, I, pag. 28 [3] e pag. 32)

$$\begin{aligned} I_1\, d\lambda &= N \times d\lambda N + N_0 \times dK\lambda . N_0 = N \times dK\lambda N + \lambda N \times dK\lambda . \lambda N = \\ &= N \times (dK\lambda . K\lambda . \lambda + K\lambda . dK\lambda . \lambda)\, N = N \times dK\lambda^2 N_0 = N_0 \times d\lambda^2 N , \end{aligned}$$

mentre dalla [5] si ricava similmente

$$I_1\, d\lambda = N \times (\nu - K\lambda . K\nu . \lambda)\, dP = N \times (1 - K\lambda^2)\, \nu dP ;$$

e quindi:

$$[7] \qquad I_1\, d\lambda = N_0 \times d\lambda^2 N = N \times (1 - K\lambda^2)\, \nu\, dP ,$$

$$[8] \qquad I_2\, d\lambda = (N \wedge K\nu dP_0) \times (N_0 \wedge \nu dP) , \quad I_3\, d\lambda = 0 .$$

3. Dalla [5] per le $(b)$, $(b_0)$ e [4] si ricava (*A. V.*, I, pag. 43 [2]; pag. 28 [3])

$$\begin{aligned} d\lambda . K\lambda &= H(\lambda N , \nu\, dP) - H(\lambda . K\nu . \lambda dP , N_0) = \\ &= H(N_0 , \nu\, dP) - KH(N_0 , \nu\, dP) = 2\,[VH(N_0 , \nu\, dP)] \wedge = (N_0 \wedge \nu dP) \wedge , \end{aligned}$$

ed operando a destra con $\lambda$, si ha:

$$[9] \qquad d\lambda = (N_0 \wedge \nu\, dP) \wedge \lambda \quad , \quad dK\lambda = -(N \wedge K\nu\, dP_0) \wedge K\lambda .$$

Questa nuova espressione di $d\lambda$ permette di ottenere sotto altra forma $I_1 d\lambda = I_1 dK\lambda$ (*A. V.*, I, pag. 42 [1]; pag. 49 [3]):

$$[7'] \qquad I_1 d\lambda = -2(N_0 \wedge \nu dP) \times V\lambda = -2(N \times K\nu dP_0) \times V\lambda ;$$

e per il vettore e l' R di $d\lambda$ si ha (*A. V.*, I, pag. [42] [2], [3]; pag. 49 [3]):

$$[10] \qquad 2Vd\lambda = C\lambda(N_0 \wedge \nu dP) = CK\lambda(N \wedge K\nu dP_0)$$

$$[11] \qquad Rd\lambda = H(N_0 \wedge \nu dP \,,\, N_0 \wedge \nu dP)\lambda = H(N \wedge K\nu dP_0 \,,\, N_0 \wedge \nu dP).$$

4. Il prof. Burali [loc. cit. (1), pp. 713-14] ha dimostrato che il differenziale di ogni isomeria vettoriale $\lambda$ funzione del punto $P$, variabile in un campo continuo a tre dimensioni, è della forma:

$$(c) \qquad d\lambda = (\mu\, dP) \wedge \lambda \quad , \quad dK\lambda = (\mu_1\, dP) \wedge K\lambda = -(K\lambda . \mu\, dP) \wedge K\lambda ,$$

e quindi nel caso nostro, in virtù delle [9], risulta:

$$(d) \qquad \mu = N_0 \wedge \nu \quad , \quad \mu_1 = -K\lambda . N_0 \wedge \nu = -N \wedge K\nu . \lambda ;$$

e con ciò le formule da [7'] a [15] ottenute dal Burali ci dànno subito altrettante proprietà per la nostra isomeria $\lambda$. Così per le [12], [13] [loc. cit. (1), pag. 713], essendo $V(K\lambda . \nu) = 0$ e quindi ricordando le [4], [4'] (*A. V.*, I, pag 23 [5]; pag. 42 [1])

$$C(N \wedge K\lambda . \nu)\, K\lambda = -N \wedge K\lambda . \nu . K\lambda = -N \wedge K\nu ,$$

si ottiene immediatamente (*A. V.*, I, pag. 42 [2]; pag. 44 [1]):

$$[12] \qquad \begin{cases} \operatorname{Rot} \lambda = -C(N_0 \wedge \nu)\, \lambda = (2N_0 \times V\nu + N_0 \wedge \nu)\, \lambda , \\ \operatorname{Rot} K\lambda = -N \wedge K\nu , \end{cases}$$

$$[13] \qquad \begin{cases} \operatorname{grad} \lambda = -C(\lambda . K\nu)\, N_0 , \\ \operatorname{grad} K\lambda = K\lambda . C\nu . N_0 = I_1 \nu . N - K\nu . N_0 ; \end{cases}$$

e con i cambiamenti indicati nel n. 1 si hanno le analoghe:

$$[12]_0 \qquad \operatorname{Rot}_{P_0} \lambda = N_0 \wedge \nu \quad , \quad \operatorname{Rot}_{P_0} K\lambda = C(N \wedge K\nu)\, K\lambda ,$$

$$[13]_0 \qquad \operatorname{grad}_{P_0} \lambda = -\lambda CK\nu N \quad , \quad \operatorname{grad}_{P_0} K\lambda = C(K\lambda . \nu) N .$$

Similmente, dalle [14] o [14'] del Burali, per $\mathbf{x}$ vettore arbitrario funzione di $P$ (o costante), si ha subito:

$$[14] \qquad \frac{d\lambda}{dP}\mathbf{x} = (N_0 \wedge \nu \mathbf{x}) \wedge \lambda \quad , \quad \frac{dK\lambda}{dP}\mathbf{x} = (N \wedge K\nu . \lambda \mathbf{x}) \wedge K\lambda ,$$

$$[14'] \qquad \frac{d\lambda}{dP}\mathbf{x} = \lambda(N \wedge K\nu . \lambda \mathbf{x}) \wedge \quad , \quad \frac{dK\lambda}{dP}\mathbf{x} = K\lambda(N_0 \wedge \nu \mathbf{x}) \wedge .$$

(1)

Introducendo l'operatore iperomografico A (*assiale*), ponendo cioè col Burali [1] $\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}\wedge$ , $\mathrm{A}(\alpha\mathbf{x}) = \mathrm{A}\alpha\mathbf{x} = (\alpha\mathbf{x})\wedge$ , le [14'] si scrivono:

$$[14''] \qquad \frac{d\lambda}{dP} = \lambda\,.\,\mathrm{A}(\mathrm{N}\wedge\mathrm{K}\nu\,.\,\lambda) \quad , \quad \frac{d\mathrm{K}\lambda}{dP} = -\mathrm{K}\lambda\,.\,\mathrm{A}(\mathrm{N}_0\wedge\nu)\,.$$

Infine dalle [15] del Burali, per le (*d*), si ottiene:

$$[15] \qquad \begin{cases} \dfrac{d(\lambda\mathbf{x})}{dP} = \lambda\dfrac{d\mathbf{x}}{dP} - (\lambda\mathbf{x})\wedge(\mathrm{N}_0\wedge\nu) \ , \\ \dfrac{d(\mathrm{K}\lambda\mathbf{x})}{dP} = \mathrm{K}\lambda\dfrac{d\mathbf{x}}{dP} + (\mathrm{K}\lambda\mathbf{x})\wedge(\mathrm{N}\wedge\mathrm{K}\nu\,.\,\lambda)\,. \end{cases}$$

5. Sottraendo dalle [15] ordinatamente le [14] si ha pure:

$$[16] \qquad \frac{d(\lambda\mathbf{x})}{dP} = \lambda\frac{d\mathbf{x}}{dP} + \frac{d\lambda}{dP}\mathbf{x} + \nu[\mathrm{N}\times\mathbf{x} - \mathrm{H}(\mathrm{N}\,,\mathbf{x})]\,,$$

$$[17] \qquad \frac{d(\mathrm{K}\lambda\mathbf{x})}{dP} = \mathrm{K}\lambda\frac{d\mathbf{x}}{dP} + \frac{d\mathrm{K}\lambda}{dP}\mathbf{x} + \\ + \mathrm{K}\nu\,.\,\lambda[\mathrm{H}(\mathrm{N}_0\,,\mathbf{x}) - \mathrm{N}_0\times\mathbf{x}] - 2\mathrm{H}(\mathrm{V}\nu\wedge\mathbf{x}\,,\mathrm{N})\,.$$

Posto infatti

$$\alpha = (\lambda\mathbf{x})\wedge(\mathrm{N}_0\wedge\nu) + (\mathrm{N}_0\wedge\nu\mathbf{x})\wedge\lambda\,,$$

per $\mathbf{y}$ vettore arbitrario si ha

$$\alpha\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}\times\nu\mathbf{y}\,.\,\mathrm{N}_0 - \lambda\mathbf{x}\times\mathrm{N}_0\,.\,\nu\mathbf{y} + \mathrm{N}_0\times\lambda\mathbf{y}\,.\,\nu\mathbf{x} - \nu\mathbf{x}\times\lambda\mathbf{y}\,.\,\mathrm{N}_0\,,$$

e poichè per le [4'] ed il teorema di commutazione è

$$\lambda\mathbf{x}\times\nu\mathbf{y} = \mathbf{x}\times\mathrm{K}\lambda\,.\,\nu\mathbf{y} = \mathbf{x}\times\mathrm{K}\nu\,.\,\lambda\mathbf{y} = \nu\mathbf{x}\times\lambda\mathbf{y}\,,$$

risulta $-\alpha\mathbf{y} = [\mathbf{x}\times\mathrm{N}\,.\,\nu - \mathrm{H}(\mathrm{N}\,,\nu\mathbf{x})]\,\mathbf{y}$, donde la [16].

Similmente per essere in virtù delle [4'] e di note proprietà

$$(\mathrm{K}\lambda\mathbf{x})\wedge(\mathrm{N}\wedge\mathrm{K}\nu\,.\,\lambda\mathbf{y}) + (\mathrm{N}\wedge\mathrm{K}\nu\,.\,\lambda\mathbf{x})\wedge\mathrm{K}\lambda\mathbf{y} = \\ = \mathrm{K}\lambda\mathbf{x}\times\mathrm{K}\nu\,.\,\lambda\mathbf{y}\,.\,\mathrm{N} - \mathrm{N}\times\mathrm{K}\lambda\mathbf{x}\,.\,\mathrm{K}\nu\,.\,\lambda\mathbf{y} + \\ + \mathrm{N}\times\mathrm{K}\lambda\mathbf{y}\,.\,\mathrm{K}\nu\,.\,\lambda\mathbf{x} - \mathrm{K}\lambda\mathbf{y}\times\mathrm{K}\nu\,.\,\lambda\mathbf{x}\,.\,\mathrm{N} = \\ = (\mathbf{x}\times\nu\mathbf{y} - \mathbf{y}\times\nu\mathbf{x})\,\mathrm{N} - \mathrm{N}_0\times\mathbf{x}\,.\,\mathrm{K}\nu\,.\,\lambda\mathbf{y} + \mathrm{H}(\mathrm{N}_0\,,\mathrm{K}\nu\,.\,\lambda\mathbf{x})\,\mathbf{y}\,,$$

da cui (*A. V.*, I, pag. 23 [2]; pag. 43 [2]) segue la [17].

Il lettore può con i cambiamenti indicati nel n. 1, scrivere subito le formule analoghe delle [14], ..., [17].

[1] C. Burali-Forti, *Sopra alcuni operatori lineari vettoriali* (Atti R. Istit. Veneto, tomo LXXII, parte 2ª, 1912-13, pp. 265-276).

OSSERVAZIONE. — Per $\mathbf{x} \times \mathbf{N} = 0$ ed applicando $\frac{d(\lambda \mathbf{x})}{dP}$ soltanto ai vettori $\mathbf{y}$ normali ad $\mathbf{N}$, il 2° membro della [16] opera sugli $\mathbf{y}$ come $\lambda \frac{d\mathbf{x}}{dP} + \frac{d\lambda}{dP}\mathbf{x}$, come deve avvenire perchè $\lambda$ è, sulla superficie, una derivata rispetto a $P$.

## Matematica. — *Derivazione intrinseca nel calcolo differenziale assoluto.* Nota II di U. CISOTTI, presentata dal Socio TULLIO LEVI-CIVITA [1].

2. Richiamo dalla precedente Nota [2] le formole (I'):

$$(\mathrm{I}') \quad J_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1}} = \frac{\partial J_{r_1 r_2 \ldots r_m}}{\partial s_{r_{m+1}}} - \sum_1^m {}_l \sum_1^n {}_q \gamma_{r_l q r_{m+1}} J_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_m},$$

che forniscono le prime derivate intrinseche degli invarianti $J_{r_1 r_2 \ldots r_m}$. Per $m = 2$ si ha, in particolare per un sistema doppio $J_{ij}$:

$$(10) \qquad J_{ijk} = \frac{\partial J_{ij}}{\partial s_k} - \sum_1^n {}_q \{\gamma_{iqk} J_{qj} + \gamma_{jqk} J_{iq}\}.$$

Applichiamo queste formole alla ricerca delle prime derivate intrinseche $\gamma_{hijk}$ dei *coefficienti di rotazione di Ricci* $\gamma_{hij}$, che — come risulta dalle formole di definizione (3) — costituiscono appunto per ogni $h = 1, 2, \ldots, n$ un sistema doppio di invarianti. Si ottiene:

$$(11) \qquad \gamma_{hijk} = \frac{\partial \gamma_{hij}}{\partial s_k} - \sum_1^n {}_q (\gamma_{iqk} \gamma_{hqj} + \gamma_{jqk} \gamma_{hiq}).$$

Scambiando $j$ con $k$ si ottiene

$$\gamma_{hikj} = \frac{\partial \gamma_{hik}}{\partial s_j} - \sum_1^n {}_q (\gamma_{iqj} \gamma_{hqk} + \gamma_{kqj} \gamma_{hiq}),$$

e per sottrazione da (11), tenendo presenti le (3):

$$\gamma_{hij} + \gamma_{ihj} = 0,$$

si ha:

$$\gamma_{hijk} - \gamma_{hikj} = \frac{\partial \gamma_{hij}}{\partial s_k} - \frac{\partial \gamma_{hik}}{\partial s_j} +$$

$$+ \sum_1^n {}_q \{\gamma_{hiq}(\gamma_{qjk} - \gamma_{qkj}) + \gamma_{qhk}\gamma_{qij} - \gamma_{qhj}\gamma_{qik}\};$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 1° luglio 1918.

[2] Questi Rendiconti, vol, XXVII, pag. 387.

i secondi membri altro non sono che gli invarianti di secondo ordine $\gamma_{hi,jk}$ definiti dalle (4), per cui le precedenti si possono scrivere

$$\gamma_{hi,jk} = \gamma_{hijk} - \gamma_{hikj}\,. \tag{12}$$

Queste formole — che mi sembrano notevoli — possono sostituire le originarie formole (4) di definizione dei predetti invarianti $\gamma_{hi,jk}$: come si vede essi risultano definiti, in modo alquanto semplice, mediante le prime derivate intrinseche dei coefficienti di rotazione di Ricci.

3. Come risulta dalle (5), i simboli $\gamma_{hi,jk}$ altro non sono che la traduzione invariantiva dei simboli di Riemann; sono perciò legati tra di loro dalle stesse relazioni che hanno luogo tra i corrispondenti simboli di Riemann. Esse sono le seguenti:

$$\gamma_{hi,jk} + \gamma_{ih,jk} = 0\,, \tag{13}$$

$$\gamma_{hi,jk} - \gamma_{jk,hi} = 0\,, \tag{14}$$

$$\gamma_{hi,jk} + \gamma_{hk,ij} + \gamma_{hj,ki} = 0\,. \tag{15}$$

Corrispondentemente, per le (12), le prime derivate intrinseche dei coefficienti di rotazione sono legate dalle relazioni:

$$\gamma_{hijk} + \gamma_{ihjk} = \gamma_{hikj} + \gamma_{ihkj}\,, \tag{16}$$

$$\gamma_{hijk} + \gamma_{jkih} = \gamma_{hikj} + \gamma_{jkhi}\,, \tag{17}$$

$$\gamma_{hijk} + \gamma_{hkij} + \gamma_{hjki} = \gamma_{hikj} + \gamma_{hkji} + \gamma_{hjik}\,. \tag{18}$$

Dalle (12) scende altresì che l'annullarsi degli invarianti $\gamma_{hi,jk}$ (il che corrisponde per le (5) all'annullarsi dei simboli di Riemann) è equivalente a

$$\gamma_{hijk} = \gamma_{hikj}\,,$$

cioè alla simmetria rispetto ai due ultimi indici delle prime derivate intrinseche dei coefficienti di rotazione.

4. Dalle relazioni del Bianchi [1] che legano tra di loro le derivate (prime) covarianti dei simboli di Riemann, si ottengono, a norma di (5), le analoghe relazioni per i corrispondenti invarianti $\gamma_{hi,jk}$. Esse sono le seguenti:

$$\gamma_{hi,jkl} + \gamma_{lh,jki} + \gamma_{il,jkh} = 0\,. \tag{19}$$

Dalle (12) derivando (intrinsecamente) una volta, si ottiene

$$\gamma_{hi,jkl} = \gamma_{hijkl} - \gamma_{hikjl}\,; \tag{20}$$

[1] Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. I [Pisa, Spoerri, 1902], pag. 351.

relazioni che esprimono le prime derivate degli invarianti $\gamma_{hi,jk}$ mediante le derivate seconde dei coefficienti di rotazione. Per le (20) dalle (19) scendono le seguenti notevoli relazioni tra le derivate seconde dei coefficienti di rotazione:

$$\gamma_{hijkl} + \gamma_{lhjki} + \gamma_{iljkh} = \gamma_{hikjl} + \gamma_{lhkji} + \gamma_{ilkjh} \,. \tag{21}$$

5. In una recente Nota [1], concernente le equazioni gravitazionali nella teoria della relatività generale di Einstein, ebbi occasione di attribuire alle 10 componenti del tensore gravitazionale delle espressioni particolarmente semplici mediante gli invarianti $\gamma_{hi,jk}$. Le (12) consentono ora di esprimere le stesse componenti linearmente mediante le prime derivate intrinseche dei coefficienti di rotazione di Ricci: ciò che può riuscire forse più vantaggioso per ulteriori indagini sul comportamento della metrica quadridimensionale einsteiniana di fronte a determinati fenomeni fisici.

## Matematica. — *Sulle serie di potenze di una variabile sommate col metodo di Borel generalizzato.* Nota III [2] di Gustavo Sannia, presentata dal Socio Enrico d'Ovidio [3].

9. *Se sopra una semiretta $p$ uscente dal punto* O *nessuno dei raggi* (n. 6)

$$\ldots, OP_{-1}\,,\ OP_0\,,\ OP_1\,,\ OP_2\,,\ldots \tag{18}$$

*delle stelle* (5) *di sommabilità della serie di potenze* (1) *è nullo, ivi si ha*

$$u(z) \sim u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \cdots. \tag{19}$$

Ossia: per i valori di $z$ giacenti su $p$, la serie (1) è lo *sviluppo asintotico* intorno al punto O (nel senso di Poincaré) della funzione $u(z)$ che è somma della serie (n. 1).

Sia infatti $r$ un intero positivo qualunque. In un punto $z$ del raggio $OP_{r+1}$ (punto che supporremo diverso da O) la (1) è sommabile $(B, r+1)$, quindi [4] la serie

$$u_r z^r + u_{r+1} z^{r+1} + \cdots,$$

[1] Cisotti, *Forma intrinseca delle equazioni gravitazionali nella relatività generale* [questi Rendiconti, vol. XXVII, pag. 366].

[2] Complemento a due precedenti dallo stesso titolo (questi Rendiconti, vol. XXVII, serie 5ª, 1° sem., fasc. 2° e 4°). A pag. 99, linea 5ª della Nota I, si ponga « $r > 0$ » invece di « $r < 0$ ».

[3] Pervenuta all'Accademia il 4 luglio 1918.

[4] N, n. 3, cor. 2°, nel cui enunciato si scambino $(B, r-n)$ e $(B, r+n)$.

che se ne deduce sopprimendo i primi $r$ termini, è sommabile (B, 1) ed ha per somma $u(z) - u_0 - u_1 z - \cdots - u_{r-1} z^{r-1}$; sicchè si può scrivere

$$(20) \quad u(z) - u_0 - u_1 z - \cdots - u_{r-1} z^{r-1} = u_r z^r + u_{r+1} z^{r+1} + \cdots,$$

da cui

$$(21) \quad \frac{1}{z^{r-1}} [u(z) - u_0 - u_1 z - \cdots - u_{r-1} z^{r-1}] = u_r z + u_{r+1} z^2 + \cdots$$

La serie del secondo membro è sommabile (B, 1), come la (20) (N, n. 3, II), e la sua somma è zero per $z = 0$ ed è rappresentata dal primo membro per $z \neq 0$.

Poichè la serie (21) è sommabile (B, 1) nel punto $z \neq 0$ considerato di $p$, è ben certo che il raggio della sua stella di sommabilità (B, 1) giacente su $p$ non è nullo; e ciò permette di asserire [1] che la sua somma, considerata come funzione di $z$ nel campo *lineare* costituito dal raggio stesso, è funzione continua nel punto $z = 0$. Dunque si ha su $p$

$$\lim_{z=0} \frac{1}{z^{r-1}} [u(z) - u_0 - u_1 z - \cdots - u_{r-1} z^{r-1}] = 0$$

per ogni intero positivo $r$, ossia si ha la (19) (per definizione).

10. È noto che le serie asintotiche di Poincaré si possono integrare termine a termine, ma *non sempre* si possono derivare termine a termine. Però è facile vedere che nel nostro caso ciò è lecito.

Precisamente: *sotto le ipotesi fatte nel teorema precedente, le derivate successive $u'(z)$, $u''(z)$, ... di $u(z)$, prese secondo la semiretta $p$, sono rappresentate asintoticamente sopra $p$ ed intorno ad O dalle serie che si ottengono derivando successivamente la* (1) *termine a termine.*

Dimostriamo p. es. che

$$(22) \quad u'(z) \sim u_1 + 2u_2 z + 3u_3 z^2 + \cdots$$

Infatti le stelle di sommabilità della serie (22) coincidono con quelle della (1) [2], quindi le ipotesi fatte sulla (1) sono soddisfatte anche dalla (22), la quale perciò (teor. prec.) rappresenta asintoticamente su $p$ ed intorno ad O quella funzione che è somma della serie stessa sommata col metodo di Borel generalizzato. Ma tal somma è [3] la derivata $u'(z)$ di $u(z)$ presa secondo la semiretta $p$; dunque la (22) sussiste.

[1] Cfr. il n. 22 del mio lavoro: *Le serie di potenze di una variabile sommate col metodo di Borel generalizzato* (Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, vol. LIII, Nota I a pag. 135 e Nota II, a pag. 192).

[2] Ibid., n. 23.

[3] Ibidem.

11. I risultati dei nn. 9 e 10 valgono in particolare: *se sulla semiretta $p$ il raggio* OT *della stella* $\tau$, *ove la* (1) *è sommabile* B$t$ (n. 3), *non è nullo.* Poichè OT è limite inferiore dei raggi (18).

Più particolarmente ancora, valgono: *se esiste un numero positivo* $l$ *tale che per ogni intero* $r$ *la funzione di* $b$

$$e^{-lb}\, u^{(r)}(be^{i\theta}, 1),$$

*ove* $\theta$ *è l'inclinazione di* $p$ *sul semiasse reale positivo, sia limitata per* $b \geq 0$ [1].

Infatti in tal caso esiste un numero positivo K (dipendente da $r$) tale che

$$|u^{(r)}(be^{i\theta}, 1)| < Ke^{lb} \qquad (b \geq 0) \tag{23}$$

Ora in un punto $z = \varrho e^{i\theta}$ di $p$ ($\varrho \neq 0$) si ha (come al n. 6)

$$u^{(r)}(a, z) = z^r u^{(r)}(az, 1) = \varrho^r e^{ri\theta} u^{(r)}(a\varrho e^{i\theta}, 1),$$

quindi, posto $a\varrho = b$ ($a \geq 0$), si ha

$$e^{-a}\, |\, u^{(r)}(a, z)\, |\, da = \varrho^{r-1} e^{-b/\varrho}\, |\, u^{(r)}(be^{i\theta}, 1)\, |\, db < \varrho^{r-1} Ke^{b(l-1/\varrho)}\, db.$$

Poichè l'integrale di $e^{b(l-1/\varrho)}$ tra i limiti 0 e $+\infty$ è convergente se $\varrho < 1/l$, tale è pure l'integrale di $e^{-a}\, |\, u^{(r)}(a, z)\, |$ tra i limiti 0 e $+\infty$; quindi l'integrale (3) è convergente (ed assolutamente) per ogni $r$ in tutti i punti $z$ di $p$ il cui modulo è minore di $1/l$; sicchè in questi punti la (1) è sommabile B$t$, e quindi su $p$ è OT $> 0$.

12. Osserviamo per finire che tutta la teoria svolta fin qui (nelle due Note citate al n. 10 e nelle presenti tre Note), sulle serie di potenze sommate col metodo B$g$, è suscettibile di una larga estensione.

Affinchè una serie qualunque $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ sia sommabile B$g$, si richiede anzitutto che le serie associate

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{n+r} \frac{x^n}{n!} \qquad (u_{n+r} = 0 \text{ se } n + r < 0) \tag{24}$$

siano trascendenti intere. Ora questa condizione, per la quale molte serie notevoli sfuggono alla sommabilità, può essere sostituita dalla seguente, molto meno restrittiva: C) *le serie* (24) *abbiano il comune raggio di convergenza non nullo e definiscano funzioni analitiche* $u^{(r)}(x)$ *proseguibili*

[1] E quindi anche: *se esiste un* $l > 0$ *tale che, per ogni intero* $r$, *risulti*

$$\lim_{b=+\infty} e^{-lb}\, u^{(r)}(be^{i\theta}, 1) = 0.$$

Solo in questo caso particolarissimo i nostri risultati erano già noti. Cfr. Bromwich, loc. cit. (nella Nota I), nn. 136 e 137.

*analiticamente lungo tutto il semiasse reale positivo* ($x \geq 0$) *ed ivi regolari.*

Ho dimostrato infatti in una recente Memoria [1] che ciò non turba la teoria generale (aritmetica) del metodo di sommazione B$g$. Orbene ciò non turba neppure la teoria delle serie di potenze [2].

## Matematica. — *Sur certaines familles de fonctions.* Nota di JOSEPH PÉRÈS, presentata dal Socio V. VOLTERRA [3].

1. J'ai indiqué ailleurs [4] l'intérêt que présentent les familles de fonctions

$$f_n(t) = t^n + \int_0^t \tau^n \mathrm{K}(\tau, t)\, d\tau \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, \infty) \tag{1}$$

et j'ai étudié les relations entre les fonctions $f_n(t)$ et $\mathrm{K}(\tau, t)$ dans le cas où ces fonctions sont holomorphes dans le domaine de l'origine.

Le forme caractéristique des $f_n$ que j'ai indiquée [5] met en évidence, certaines relations simples entre les $f_n$ et $\mathrm{K}(\tau, t)$. Elle présente l'avantage de permettre, dans une certaine mesure, l'abandon de l'hypothèse d'analyticité. Mais surtout elle s'applique très aisément à l'étude de familles de fonctions (1) déduites de la théorie des fonctions permutables. C'est ainsi qu'on en déduira, presque sans calculs, que les fonctions

$$f(t), \overset{*}{f}{}^2(t), \ldots \overset{*}{f}{}^n(t), \ldots,$$

ou les fonctions

$$\psi(t), \overset{*}{\psi} \overset{*}{f}(t), \ldots \overset{*}{\psi} \overset{*}{f}{}^n(t), \ldots,$$

déduites par composition de deux fonctions $f$ et $\psi$ permutables avec l'unité forment des familles (2); on obtiendra immédiatement les noyaux correspondants.

(1) Di prossima pubblicazione in una raccolta di *Scritti matematici dedicati ad Enrico d'Ovidio in occasione del Suo LXXV compleanno* (Bocca, Torino).

(2) Soltanto il lemma del n. 9 della Nota citata al n. 10 (e che poi si invoca nei nn. 13 e 19) va sostituito col seguente: *se in un punto* $z_0 \neq 0$ *una delle serie* (24) *associate alla* (1) *soddisfa la condizione* C), *tutte le serie* (24) *la soddisfanno ed in ogni punto* $z$ *del segmento che unisce il punto* $z_0$ *al punto* $z = 0$.
Si dimostra facilmente allo stesso modo.

(3) Pervenuta all'Accademia il 13 luglio 1918.

(4) Comptes rendus de l'Académie des Sciences, tom. 166, pp. 723 et 806.

(5) Ibid., pag. 806.

On démontrera aussi que l'on a

$$(2) \qquad f_n(t) = t^n \left\{ 1 + \sum_0^\infty {}_q\, t^{q+1} \, B_q(n) \right\}$$

avec

$$B_q(n) = \frac{P_q(n)}{(n+1)(n+2)\dots(n+q+1)}$$

$P_q$ étant un polynôme en $n$ de degré inférieur ou égal à $q$.

2. Cherchons, plus généralement, la forme des fonctions données par les formules

$$(3) \qquad f_n(t) = t^n \lambda(t) + \int_0^t \tau^n \left(\frac{\tau}{t}\right)^p K(\tau, t)\, d\tau, \quad (n = 0, 1, \dots, \infty),$$

où l'on suppose $\lambda$ et $K(\tau, t)$ holomorphes autour de l'origine.

En posant

$$\lambda(t) = 1 + \sum_1^\infty {}_q\, d_q\, t^q$$

$$K(\tau, t) = \sum_0^\infty {}_{r,s}\, A_{rs}\, \tau^r t^s,$$

il vient

$$f_n(t) = t^n + \sum_0^\infty {}_q\, t^{n+q+1} \left( d_{q+1} + \sum_{r+s=q} \frac{A_{r,s}}{(n+p+r+1)} \right).$$

Donc

$$(4) \qquad f_n(t) = t^n + \sum_0^\infty {}_q\, t^{n+q+1} \frac{P_q(n)}{(n+p+1)(n+p+2)\dots(n+p+q+1)}$$

$P_q(n)$ étant un polynome de degré $(q+1)$ au plus.

En nommant $B_q(n)$ le coefficient de $t^{n+q+1}$ dans $f_n(t)$, on constate qu'il est possible de déterminer des constantes M et R de façon que

$$(5) \qquad |B_q(n)| < \frac{M}{R^q}.$$

Inversement, des fonctions $f_n(t)$ données par les formules (4) avec les inégalités (5) peuvent toujours se mettre sous la forme (3), $\lambda$ et K étant holomorphes autour de l'origine. On a d'ailleurs

$$\lambda(t) = \lim_{n=\infty} t^{-n} f_n(t).$$

Les développement en série d'une fonction arbitraire suivant les fonctions $f_n(t)$ s'étudieront comme je l'ai déja indiqué dans des cas analogues.

3. Comme exemple d'une famille de fonctions du type (3), on peut indiquer

$$f_n(\zeta) = \zeta^n F(a\,,\, n\,,\, 1 + p + n\,,\, \zeta)\,,$$

où F désigne la série hypergéomètrique

$$F(a\,,b\,,c\,,\zeta) = 1 + \zeta\frac{a\,.\,b}{1\,.\,c} + \zeta^2\frac{a(a+1)\,b(b+1)}{1\,.\,2\,.\,c(c+1)} + \cdots.$$

On a alors

$$\lambda(t) = \frac{1}{(1-t)^a}\,.$$

4. La formule

$$\frac{1}{1-\zeta t} = f_0(t)\,\varphi_0(\zeta) + f_1(t)\,\varphi_1(\zeta) + \cdots + f_n(t)\,\varphi_n(\zeta) + \cdots$$

permet d'associer aux fonctions $f_n(t)$ du n° 2 des fonctions $\varphi_n(\zeta)$; $\varphi_n(\zeta)$ étant un polynome de degré $n$ (1). Je n'ai pas à revenir ici sur l'intérêt de ces nouvelles fonctions.

Dans le cas du n° 2 on constatera que

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi_0(\zeta) &= 1 \\ \varphi_n(\zeta) &= C_n(0) + C_{n-1}(1)\,\zeta + C_{n-2}(2)\,\zeta^2 + \cdots + C_1(n-1)\,\zeta^{n-1} + \zeta^n, \end{aligned}\right.$$

avec

$$C_s(r) = \frac{\pi_s(r)}{(r+p+1)\,(r+p+2)\ldots(r+p+s)}\,,$$

$\pi_s$ étant un polynome en $r$ de degré $s$ au plus. On a d'ailleurs

$$(7)\qquad |C_s(r)| < \frac{M'}{R'^s}$$

et les formules (6) et (7) caractérisent les $\varphi_n$.

5. En particulier, on associera aux fonctions $f_n$ du n° 3 les polynomes

$$\varphi_n(\zeta) = \zeta^n\,F\left(-a\,,\,-n+1\,,\,-n-p\,,\,\frac{1}{\zeta}\right).$$

(1) Ces fonctions associées ont été introduites par M. Pincherle, Rend. R. Istituto Lombardo (Milano), 1882.

E. M.

## Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

---

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali storiche e filologiche.*
Vol. V. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*
Vol. I-XXVII. (1892-1918). Fasc. 1°, Sem. 2°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XXVII. (1892-1918). Fasc. 1°-2°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
Vol. I-XII. Fasc. 11.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-6.

---

## CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

### AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

---

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

P. MAGLIONE & C. STRINI (successori di E. Loescher & C.) — *Roma.*

RENDICONTI — Luglio 1918.

# INDICE

## Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

### MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

*pervenute all'Accademia durante le ferie del 1918.*




**E. Mancini** *Segretario d'ufficio responsabile.*

Pubblicazione bimensile. N. 2.

# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

## RENDICONTI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

**Volume XXVII.° — Fascicolo 2°**

2° Semestre.

*Comunicazioni pervenute all'Accademia durante le ferie del* 1918.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

# ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

## PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

---

### I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 9 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a pagine 4 $^{1}/_{2}$.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 30 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

### II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta a stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta, pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 50 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 30 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

# DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

## Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

---

## MEMORIE E NOTE
## DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

*pervenute all'Accademia durante le ferie del 1918.*

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo)

---

Fisica terrestre. — *Circa la sistemazione dell' Istituto vulcanologico del Vomero a Napoli.* Appunti del Vicepresidente ANTONIO RÒITI [1].

La Società Elvetica delle scienze naturali ha indirizzato una lettera, datata da Berna maggio 1918, all'Accademia dei Lincei, all'Accademia delle Scienze di Napoli, ed all' Università di Napoli, nella quale assevera che una Fondazione svizzera ha diritto di proprietà sull' Istituto vulcanologico Friedlaender posto al Vomero in Napoli, ed esprime il timore che la scienza possa venir danneggiata dal sequestro che di esso Istituto ha ordinato il Governo Italiano, credendo possibile la dispersione del materiale scientifico ivi raccolto.

In seguito a questa lettera, il Consiglio di Amministrazione della Reale Accademia dei Lincei, nella seduta del 16 giugno u. s., mi ha affidato di studiare la questione recandomi a Napoli per conferire anche con quei Colleghi.

Ho cominciato con l' informarmi presso la Direzione generale dell' Istruzione superiore intorno allo stato delle cose; e m'è stato detto che quando nell'aprile l' Istituto Friedlaender fu posto sotto la sorveglianza dell' Autorità, il prof. Ciro Chistoni, aveva messo avanti l' idea che fosse colà trasferita da Roma la Sezione Geodinamica dell' Ufficio Centrale di meteorologia e che

(1) Pervenuta all'Accademia il 20 luglio 1918.

il Ministero dell'Istruzione, a richiesta del Ministero degli Esteri dietro sollecitazione del nostro Ministro a Berna, aveva risposto di non aver preso alcun provvedimento circa la sistemazione di quell'Istituto in attesa del parere domandato alla Facoltà di scienze di Napoli.

Per parte mia, recandomi a Napoli, miravo principalmente a concertare fra le due Accademie una linea di condotta il più possibile conforme, ed a vedere se e come fosse possibile conciliare la funzione dell'Istituto Friedlaender con quella del R. Osservatorio Vesuviano.

A Napoli mi sono trattenuto ben dieci giorni, ma per quanta diligenza vi abbia posto non m'è riuscito d'ottenere un appuntamento dal prof. Giuseppe De Lorenzo attuale Presidente di quella R. Accademia delle scienze; ho potuto invece parlare a lungo con alcuni altri colleghi dell'Università. Ho visitato il R. Osservatorio Vesuviano e, per mezzo della Prefettura, ho fatto conoscenza col sequestratario della proprietà Friedlaender signor cavaliere avv. Candido Mura, Ispettore provinciale presso la Direzione generale del Fondo per il Culto, il quale mi ha condotto a visitare l'Istituto vulcanologico del Vomero.

---

Da quanto mi hanno detto i Colleghi, si può ritenere che per tutta la durata delle vacanze accademiche non verrà data, nè dall'Accademia di Napoli nè dall'Università, una risposta diretta alla Società Elvetica di scienze naturali, ed io non ho mancato di far rilevare che sarà prudenza evitare qualsiasi atto che possa interpretarsi come riconoscimento dei pretesi diritti del Governo Svizzero sulla proprietà Friedlaender.

Ed invero è giudizio generale che sia fittizia la cessione di essa proprietà ad una Fondazione vulcanologica con sede a Sciaffusa istituita non prima del 4 novembre 1915 da un suddito germanico; e però fa pena che un collega abbia assunto nella Facoltà di scienze un contegno d'eccezione. Ma per buona sorte la Facoltà di Napoli ha rimandato la discussione ad altra seduta.

Intanto si può vivere sicuri che tutti, senza eccezione, sono persuasi dell'opportunità e della convenienza di non sottrarre dall'Istituto Friedlaender il benchè minimo oggetto, sia mineralogico sia strumentale sia bibliografico, ed il sequestratario signor avv. Mura dà pieno affidamento che ogni cosa sarà conservata.

Egli ebbe la consegna della proprietà Friedlaender appena ne fu fatto il sequestro, cioè alla metà di aprile 1918, in seguito alla morte dell'avvocato Breglia che aveva continuato ad amministrarla per conto del sig. Friedlaender anche dopo che questi, allo scoppiare della guerra, era partito dall'Italia. Il sequestratario fu compreso della delicata responsabilità assuntasi e non tardò ad iniziare i necessari lavori di ristauro affidandone la direzione al signor prof. arch. Oreste Siverio della R. Sopraintendenza dei Monumenti.

Le riparazioni sono state rese necessarie dagli avvallamenti del terreno di riporto nei pressi del fabbricato, e più ancora dai guasti esterni ed interni alle opere murarie per la pessima qualità degli intonachi e dalle infiltrazioni delle acque, dannose specialmente nei locali ove sono basati gli strumenti sismici.

I primi fondi a ciò necessari ha potuto procurarseli il sig. avv. Mura pignorando delle argenterie trovate in deposito presso una Banca, ma occorrono ben altre somme, ed egli sta ora studiando se convenga accettarle dall'on. prof. De Ruggero che ha offerto di elargirle, oppure se sia preferibile, come pare a me, di ottenerle da un mutuo su ipoteca.

Pensa pure di fare un inventario, con relativa perizia, del materiale scientifice ricorrendo perciò agli scienziati più competenti, e mi ha lasciato intendere che desidererebbe affidarne l'incarico al prof. Ciro Chistoni, titolare della cattedra di fisica terrestre e direttore interino del R. Osservatorio Vesuviano, non che al prof. Michele Cantone, direttore dell'Istituto fisico della R. Università.

L'avv. Mura mi ha pure fatto capire che egli apprezza al suo giusto valore la Fondazione Svizzera del signor J. Friedlaender, con sede a Sciaffusa, attribuendole l'immobile e le collezioni di Napoli, al fine dichiarato d'incoraggiare gli studî vulcanologici. E desidera che tutto ciò diventi proprietà dello Stato Italiano.

Egli mi ha condotto nel magnifico possesso che discende da sotto Castel Sant'Elmo fino al Corso Vittorio Emanuele e comprende il grande edificio addossato a più ripiani sul fianco del colle, costruzione del signor Friedlaender destinata ad accogliere nei due piani inferiori il suo Istituto vulcanologico internazionale, e nei piani superiori la sontuosa dimora della sua famiglia. Avrei potuto visitare l'edificio in tutte le sue parti; ma per la ristrettezza del tempo ho dovuto limitarmi alla parte destinata ad uso scientifico; e nell'esame forzatamente superficiale ho notato che vi sono buoni apparecchi sismici ben collocati sulla roccia, quantunque dubiti che vi si trovi il corredo completo di una moderna stazione geodinamica, ma ho riconosciuto l'urgenza d'impedirvi l'infiltrazione dell'acqua e la necessità di risanare dall'umidità gli ambienti, specie quelli dove ho veduto buoni strumenti ottici e di misura, per lo più contenuti ancora nelle loro custodie come se non fossero mai stati utilizzati.

Prodotti vulcanici di svariata provenienza ve ne sono molti, e giacenti, con l'aspetto dell'ordine, in begli armadi. Ho chiesto invano se nei locali ad uso scientifico o in quelli di abitazione sieno stati ritrovati dei registri di osservazioni o qualche specie di archivio che attestasse una operosità continuativa e metodica.

In quella mia visita ho provato un certo malessere prodotto forse dall'incuria e dallo stato d'abbandono in cui fu lasciato tutto l'insieme del-

l'Istituto: e farà molto bene il sequestratario se metterà in assetto quella suppellettite che rappresenta un notevole valore.

L'Osservatorio Vesuviano invece, visitato sotto la guida del prof. Chistoni, mi ha lasciato una impressione piuttosto favorevole dopo tutto il male che ne ho sentito dire in tanti e tanti anni. Infatti l'edificio si presenta all'esterno ben restaurato, ed anche internamente, meno le due sale a levante che richiedono ancora una radicale bonifica, ha bell'aspetto. La base, ove collocare gli strumenti sismici, è giudiziosamente impiantata, ma bisognerà provvedere alla difficile difesa contro l'umidità dell'ambiente sotterraneo destinato agli strumenti di capitale importanza per un osservatorio qual'è questo. Essi sono ora raccolti in una delle sale superiori, inoperosi ancora perchè la loro funzione sarebbe stata turbata dai colpi degli scalpellini e dei muratori che stavano applicando due grandi barbacani di pietra per assicurare a tramontana la stabilità delle fondazioni. Questi strumenti sono in gran parte cimeli, ma tuttavia atti alcuni a prestare servizio quando vengono accompagnati da altri che si dovranno acquistare. La stessa cosa dicasi degli strumenti elettrici. E qualche strumento moderno per lo studio di altri fenomeni fisici ho pure notato, e la raccolta di prodotti vulcanici, ma ben poco per le ricerche chimiche; nulla, si può dire, per lo studio delle emanazioni.

Le osservazioni meteoriche si fanno regolarmente, ancor oggi con la disposizione ottima ai tempi del Palmieri, ma non più corrispondente alle esigenze dei nostri giorni: ed il prof. Chistoni si adopera affinchè vi sia provveduto, riconoscendo l'eccezionale interesse che presenta una tale stazione meteorologica. D'altro canto egli dichiara che l'Osservatorio Vesuviano non potrà essere ridotto a laboratorio scientifico in senso moderno.

Io vado più oltre e dico che, data l'ubicazione e le condizioni convulse dell'ambiente, sarebbe inumano ed antiscientifico pretendere la permanenza di un personale di ruolo là su relegato, che dovesse consacrarsi esclusivamente allo studio dei problemi offerti dal Vesuvio conducendovi a termine tutte le svariate esperienze che essi comportano, per cui trovo naturale che siano falliti i tentativi di riordinare quell'osservatorio e che se ne sia tratto così scarso frutto da che è prevalsa l'opinione di staccarlo da ogni altra istituzione.

Già il ruolo del personale non potrebbe ridursi ad un direttore con uno o due assistenti, perchè in tre sole persone non si troveranno mai raccolte e la vivificante erudizione di matematica, geologia, mineralogia, chimica, fisica nei suoi molteplici rami, e le relative intuizioni e le attitudini teoriche, sperimentali, pratiche e l'acuto spirito di osservazione che la immane officina di fenomeni richiede per essere sfruttata.

No, non è possibile compiere là su un corso metodico e continuativo di ricerche scientifiche, e ciò non solo in considerazione del personale; ma anche in riguardo al materiale scientifico permanentemente esposto alle mu-

tevoli emanazioni vesuviane che danneggerebbero, se non altro, con la loro azione corrosiva gli strumenti di precisione colà raccolti anche negli intervalli d'inazione.

Continuative debbono esservi solamente le osservazioni meteorologiche e le sismiche affidandole ad apparecchi registratori richiedenti un semplice riscontro giornaliero che può esser fatto per turno da due operatori. Continuativa potrà essere inoltre la descrizione dei mutevoli aspetti del vulcano quando si trovi un entusiasta che vi dedichi tutto sè stesso, quale è l'ottimo prof. Malagra, attuale vice direttore. Ma per le rimanenti operazioni e deduzioni di carattere continuativo è indispensabile stabilire una sede in Napoli, riservando l'Osservatorio ai lavori scientifici occasionali che necessariamente si devono eseguire sul luogo del fenomeno da studiare.

Gli impiegati scientifici di ruolo agiranno comunemente nella sede di Napoli, e solo occasionalmente all'Osservatorio. Alla sede di Napoli starà adunato il corredo strumentale per estrarne quel tanto che sia richiesto dall'Osservatorio durante ogni singola ricerca da effettuarsi quivi. Così pure i prodotti vulcanici, dopo compiuto il primo esame successivo alla loro formazione, verranno raccolti e classificati e messi in collezione nella sede di Napoli, ed ivi analizzati o comunque studiati ed illustrati. Insomma, alla sede di Napoli saranno compiuti regolarmente durante il corso dell'anno gli esperimenti, i calcoli ed in genere tutti gli studî metodici d'interesse vulcanologico; invece le indagini specifiche dei vari fenomeni dovranno effettuarsi all'Osservatorio per un tempo più o meno lungo, sia da specialisti nazionali o stranieri, sia da chiunque prosegua un'idea geniale.

Per ciò converrà suddividere il locale di guisa che vi siano spazi adatti alle diverse ricerche, ciascuno dei quali possa venir consegnato ad ogni singolo ospite, aggiungendovi, quando occorra, quegli strumenti necessari al caso specifico che si trovino a Napoli. L'ospite si tratterrà a piacer suo nell'Osservatorio per lo studio che si sarà prefisso; ed avrà agio di procurarsi alloggio e vitto confortevoli nel prossimo Albergo dell'Eremo.

Mirabilmente potrebbe servire come centro di questi studi l'edificio Friedlaender; e con viva soddisfazione ho appreso poi che la Società dei Naturalisti di Napoli aveva espresso al Ministero il voto di avvalersene annettendovi l'Osservatorio Vesuviano. Nella parte più bassa dell'edificio funzionerebbe un'ottima stazione geodinamica coordinata con le altre che già sono in azione; più su troverebbero posto le collezioni, e si avrebbero stanze per la direzione, la biblioteca, le operazioni grafiche e le eventuali misure geodetiche: i piazzali circostanti, i loggiati, le torrette offrirebbero campo ai più svariati generi di esperienze.

D'inestimabile valore scientifico sarebbe un Istituto vulcanologico avente in proprio questa sede al Vomero, una stazione sperimentale, unica al

mondo, qual'è l'Osservatorio Vesuviano e le altre stazioni geodinamiche d'Italia [1].

Tutto sta trovare la via di superare le difficoltà giuridiche per ridurre nostra proprietà demaniale il possesso sequestrato al Friedlaender; superatele, come credo possibile, converrà erigere in ente morale un Istituto vulcanologico proprietario del possesso medesimo, dell'Osservatorio Vesuviano e delle Stazioni geodinamiche ora rispettivamente dipendenti dal Ministero dell'Istruzione e da quello di Agricoltura.

Sarà poi ottima cosa affinchè l'ente possa esplicare intera la sua attività scientifica, che con gl'Italiani vi cooperino gli scienziati Belgi, Francesi, Inglesi, Americani, e Giapponesi più di tutti versati in materia; e contribuendovi i loro Governi in qualche modo, ne riceverà l'Istituto un'impronta interalleata valevole ad impedire che esso ricada direttamente, o per mezzo d'interposti Governi neutrali, sotto il predominio germanico.

In nome della R. Accademia dei Lincei faccio voti che il nostro Governo curi con sollecitudine l'effettuazione di questo programma che gioverà non poco al prestigio scientifico dell'Italia.

## Matematica. — *Delle varietà a tre dimensioni con terne ortogonali di congruenze a rotazioni costanti.* Nota del Socio Gregorio Ricci [2].

In due Note recenti inserite nel volume XXVII (serie 5ª) di questi Rendiconti ho dimostrato che le varietà a tre dimensioni dotate di terne principali di congruenze geodetiche si ripartiscono in due classi, una delle quali è costituita da varietà tali che le rotazioni delle loro terne principali sono tutte costanti. Non sono però con questa classe esaurite tutte le $V_3$ dotate di terne ortogonali a rotazioni costanti; interessanti e perchè ammettono gruppi continui transitivi di movimenti rigidi, e perchè possono essere in modo assai facile caratterizzate intrinsecamente, e perchè la loro determinazione intrinseca [3], a traverso una opportuna terna fondamentale, dipende da quella di una soluzione particolare (soggetta soltanto ad una condizione qualitativa poco restrittiva) di un sistema differenziale di 1° ordine di strut-

[1] Lascio al collega prof. Chistoni di coordinare la funzione di questo Istituto vulcanologico con l'Istituto universitario geofisico che egli vagheggia di veder sorgere ai Campi Flegrei a corredo della Cattedra di Fisica terrestre.

[2] Pervenuta all'Accademia il 28 giugno 1918.

[3] A questo proposito e a chiarimento anche dei risultati delle precedenti Note giova osservare che, trattandosi di determinazione intrinseca, non si devono considerare come distinte due terne, che si trasformano l'una nell'altra per effetto di una trasformazione in se stesso del $ds^2$ della varietà.

tura assai semplice, la cui soluzione generale non comporta altra arbitrarietà che quella che è rappresentata dall'arbitrarietà della scelta delle variabili indipendenti.

Ogni $V_3$ che ammetta una terna ortogonale a rotazioni costanti ne ammette una triplice infinità, e cioè tutte quelle, che da una di essa si traggono mediante una arbitraria sostituzione ortogonale a coefficienti costanti. Tra tutte occupano però un posto speciale quelle (in generale una sola) che ho chiamate *terne principali di 2ª specie*, la cui proprietà caratteristica consiste in ciò, che per ogni punto P della varietà e per ogni congruenza $\psi_h$ della terna sono eguali le proiezioni sulla tangente alla sua linea passante per P delle curvature geodetiche delle linee delle congruenze $\psi_{h+1}$ e $\psi_{h+2}$ passanti per lo stesso punto. Così le nove rotazioni spettanti ad una terna principale di 2ª specie si possono esprimere mediante sei sole costanti, e queste possono essere ripartite tra le tre congruenze assegnandone a ciascuna due e precisamente ad ogni congruenza $\psi_h$ la sua anormalità $\alpha_h$ e la proiezione $\delta_h$ sulla tangente alla sua linea uscente da un punto qualunque P della curvatura geodetica della linea uscente dal medesimo punto e appartenente all'una o all'altra delle congruenze $\psi_{h+1}$ e $\psi_{h+2}$. Di più si ha che:

« Per ogni congruenza di una terna principale di 2ª specie deve essere « eguale a 0 l'una o l'altra delle due costanti caratteristiche ad essa asse- « gnate ».

Dai diversi possibili modi di soddisfare a questa condizione segue una ripartizione delle possibili terne principali di 2ª specie in quattro classi, le quali però, per quanto riguarda la natura intrinseca delle varietà, a cui esse appartengono, si riducono a tre sole essenzialmente distinte e caratterizzate come segue:

(*a*) $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$ ,

(*b*) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \ , \ \delta_3 > 0$ ,

(*c*) $\delta_1 = \delta_2 = \alpha_3 = 0 \ , \ \alpha_2 > 0 \ , \ \delta_3 \neq 0$ .

Lo studio della classe (*a*) è stato esaurito nelle Note citate, nelle quali è stato posto in evidenza come con riguardo ai valori delle caratteristiche $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ essa si scinda in tre sottoclassi distinte. Quello delle altre due classi forma oggetto della presente Nota, e conduce alle seguenti conclusioni:

1°. Le terne della classe (*b*) appartengono alle varietà a curvatura costante negativa o nulla $K = - \Sigma_i \delta_i^2$. Per esse risultano determinati in ciascuna di tali varietà $\infty^3$ sistemi coordinati ortogonali, i quali per $K = 0$, coincidono coi sistemi cartesiani, mentre per $K < 0$ ne costituiscono una naturale e nota estensione.

2°. Le terne della classe (*c*) forniscono ancora delle speciali espressioni per il $ds^2$ delle varietà a curvatura costante negativa $K = - \delta_3^2$, se è

$\alpha_2 = \alpha_1$; e, prescindendo da questo caso, si possono suddividere in due sottoclassi, secondo che è $\alpha_2 \alpha_1 = -\delta_3^2$ ovvero $\alpha_2 \alpha_1 \neq -\delta_3^2$. E mentre le $V_3$ della prima sottoclasse hanno due invarianti principali eguali negativi e in valore assoluto maggiori del terzo, che è positivo, quelli delle varietà dell'altra sottoclasse sono tutti distinti, essendo tutti negativi e del resto qualunque, ovvero due negativi e l'altro positivo ma legato agli altri due da speciali condizioni di disuguaglianza. Appartengono a quest'ultima sottoclasse le varietà normali di Bianchi, per le quali una curvatura principale è media geometrica delle altre due.

È ancora da rilevare che, mentre nelle $V_3$ delle classi (*a*) e (*b*) le terne principali di 1ª e di 2ª specie coincidono, in quelle della classe (*c*) una sola congruenza (che è insieme normale e geodetica) è comune alle due terne. E poichè nella classe (*c*) incontriamo delle varietà, i cui invarianti principali hanno valori riconosciuti possibili anche per varietà della classe (*a*), ne concludiamo che i valori delle curvature riemanniane principali non bastano sempre per caratterizzare intrinsecamente una $V_3$ a curvature principali costanti.

In questa Nota, che intimamente si connette a quelle più volte citate, mi riferirò alle notazioni ed ai concetti fondamentali, di cui in esse feci uso e che vennero in esse esposti.

1. Si consideri ancora una $V_3$ qualunque definita intrinsecamente mediante tre forme differenziali lineari indipendenti $\psi_1, \psi_2, \psi_3$, alle quali mediante una sostituzione ortogonale affatto qualunque

$$A \equiv ||\alpha_{hk}||$$

si sostituiscono rispettivamente le tre forme $\psi_1', \psi_2', \psi_3'$; e si convenga che i simboli e le notazioni relative a questa seconda terna fondamentale differiscano soltanto per un apice da quelle, di cui si è fatto uso per la terna $\psi_1, \psi_2, \psi_3$.

Le rotazioni relative alle due terne risultano legate fra di loro dalle relazioni:

$$\varrho'_{hk} = \Sigma_i \, \alpha_{ki} \, \Sigma_j \left( \alpha_{h+2j} \frac{\partial \alpha_{h+1j}}{\partial s_i} + \varrho_{ji} \, \alpha_{hj} \right). \tag{1}$$

Se a queste si aggiungono quelle, che si ottengono derivando intrinsecamente le

$$\Sigma_i \, \alpha_{hi} \, \alpha_{ki} = \varepsilon_{hk} \,,$$

si ha un sistema costituito da tante equazioni quante sono le derivate intrinseche delle $\alpha_{hk}$ e risolubile rispetto a queste. E se le espressioni di queste derivate si derivano ancora intrinsecamente e tra esse e le espres-

sioni così ottenute per le derivate intrinseche di 2° ordine si eliminano queste e le derivate prime, si perviene alle relazioni

$$\omega'_{hk} = \Sigma_{ij}\, \omega_{ij}\, \alpha_{hi}\, \alpha_{kj} \,,$$

dalle quali segue che di fronte ad ogni sostituzione ortogonale le $\omega_{ij}$ si comportano come i coefficienti di una quadrica covariante.

Si suppongano ora le $\varrho_{hk}$ costanti. Per le (3) delle Note citate [1] saranno tali anche le $\omega_{hk}$ e quindi i coefficienti della sostituzione ortogonale, che riduce a forma canonica la quadrica anzidetta nonchè i coefficienti della espressione ridotta, cioè le curvature riemanniane principali della $V_3$ definita dal sistema di forma $\psi_i$. Dunque:

« Le $V_3$ dotate di terne ortogonali a rotazioni costanti hanno costanti « anche le curvature riemanniane principali ».

Si ponga ora mente alle (1), dalle quali risulta che la forma bilineare di coefficienti $\varrho_{ij}$ è essa pure covariante di fronte ad ogni sostituzione ortogonale a coefficienti costanti; donde segue che, se le $\varrho_{ij}$ sono costanti, tra le sostituzioni stesse ve n'ha una (ed in generale una sola) che riduce a forma canonica la quadrica di coefficienti $\frac{1}{2}(\varrho_{ij} + \varrho_{ji})$.

La corrispondente terna ortogonale, che ho chiamata terna principale di 2ª specie, è dunque caratterizzata dalla proprietà che le sue rotazioni sono costanti e legate dalle relazioni

$$\varrho_{h+1\,h+2} + \varrho_{h+2\,h+1} = 0 \,,$$

cioè

$$\gamma_{h+1\,h\,h+1} = \gamma_{h+2\,h\,h+2} \,,$$

dalle quali risulta che, se si considerano le tre linee delle congruenze principali di 2ª specie uscenti da uno stesso punto qualunque P della varietà, le proiezioni sulla tangente ad una qualunque di esse delle curvature geodetiche delle altre due sono eguali [2]:

2. Posto

$$\delta_h = \varrho_{h+1\,h+2} = -\varrho_{h+2\,h+1} \,,$$

le formole citate sopra per le terne principali di 2ª specie nelle varietà, di cui ci occupiamo, dànno

$$\omega_{hh} = -\Sigma_i\, \delta_i^2 + \varrho_h\, \alpha_h - \varrho_{h+1}\, \varrho_{h+2} \tag{2}$$

$$\omega_{h+1\,h+2} = 2\delta_h\, \varrho_{h+1} \quad , \quad \omega_{h+2\,h+1} = -2\delta_h\, \varrho_{h+2} \tag{3}$$

[1] Queste formole sono affette da un errore tipografico, per il quale il 1° termine del secondo membro porta indebitamente il segno —.

[2] Cfr. Ricci, *Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque*, Memorie della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. II, pag. 2.

e le equazioni (A) e (B) assumono rispettivamente la forma:

$$\text{(A)}\qquad \frac{\partial\lambda_{h/r+1}}{\partial x_{r+2}}-\frac{\partial\lambda_{h/r+2}}{\partial x_{r+1}}=\lambda(\alpha_h\,\lambda_h^{(r)}+\delta_{h+2}\,\lambda_{h+1}^{(r)}-\delta_{h+1}\,\lambda_{h+2}^{(r)})$$

$$\text{(B)}\qquad \alpha_h\,\delta_h=0\,.$$

Il caso studiato nelle Note precedenti è quello, in cui le (B) sono soddisfatte perchè sono nulle tutte le $\delta_h$ ed abbiamo già osservato che, per le (3) avendosi allora $\omega_{h+1\,h+2}=\omega_{h+2\,h+1}=0$, la terna principale di 2ª specie è anche terna principale di 1ª specie. Ciò si verifica ancora e soltanto in un altro caso, cioè se le (B) sono soddisfatte perchè sono nulle tutte le $\alpha_h$ e quindi tutte le $\varrho_h$. Le (2) dànno allora

$$\omega_{hh}=-\,\Sigma_i\,\delta_i^2$$

e ci dicono che si tratta di varietà a curvatura costante negativa o nulla

$$\text{(4)}\qquad K=-\,\Sigma_i\,\delta_i^2\,.$$

Posto

$$\text{(5)}\qquad H=\Sigma_i\,\delta_i\,x_i+c$$

($c$ costante arbitraria) si soddisfa in questo caso alle equazioni (A) assumendo:

$$\lambda_{h/h}=\frac{1}{H}\quad;\quad\lambda_{h+1/h+2}=\lambda_{h+2/h+1}=0\,,$$

cioè

$$\psi_h=\frac{dx_h}{H}\,.$$

Si perviene così alla espressione

$$ds^2=\frac{dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2}{H^2}$$

del $ds^2$ delle $V_3$ a curvatura costante negativa o nulla.

3. Esclusi i casi già considerati, possiamo supporre eguali a 0 $\delta_1$ ed $\alpha_3$; dopo di che tra le equazioni (B) rimane da soddisfare soltanto la $\alpha_2\,\delta_2=0$. Si osservi ora che la ipotesi che $\alpha_2$ sia zero assieme ad $\alpha_3$ ha per conseguenza $\varrho_2=\varrho_3=-\varrho_1$, e quindi la arbitraria orientazione della dupla $\psi_2$, $\psi_3$ nel proprio piano. Ed è pure facile riconoscere che questa orientazione può essere determinata in modo che sia $\delta_2=0$.

Un altro solo caso essenzialmente distinto da quelli già considerati ci rimane dunque da prendere in esame; quello, nel quale alle (B) si soddisfa assumendo

$$\text{(6)}\qquad \delta_1=\delta_2=\alpha_3=0\,;$$

nel quale la congruenza $\psi_3$ risulta quindi insieme geodetica e normale.

Posto $\delta$ in luogo di $\delta_3$, le (2) e le (3) ci dànno per questo caso

$$(7)\quad \begin{cases} \omega_{11} = \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)^2 - \alpha_1^2 - \delta^2 \;, \; \omega_{22} = \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)^2 - \alpha_2^2 - \delta^2 \;; \\ \omega_{33} = \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right)^2 - \delta^2 \,, \\ \omega_{23} = \omega_{31} = 0 \quad , \quad \omega_{21} = (\alpha_2 - \alpha_1)\,\delta \,. \end{cases}$$

La equazione di 3° grado, che colle sue radici fornisce le curvature riemanniane principali della $V_3$, si scinde poi nelle due equazioni:

$$\omega^2 + (\omega_{11} + \omega_{22})\,\omega + \omega_{11}\,\omega_{22} - \omega_{12}^2 = 0$$
$$\omega = \omega_{33} \,.$$

Posto

$$(8)\qquad \Delta = \left|\sqrt{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + 4\delta^2}\right|$$

abbiamo dunque per le dette curvature le espressioni

$$\omega'_{11} = -\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\,\Delta - \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right)^2 - \delta^2$$

$$\omega'_{22} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\,\Delta - \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right)^2 - \delta^2$$

$$\omega'_{33} = \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right)^2 - \delta^2 \,;$$

mentre

$$(9)\quad \begin{cases} \omega_1 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\,\Delta - 2\delta^2 \quad , \quad \omega_2 = -\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\,\Delta - 2\delta^2 \,, \\ \omega_3 = -2\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right)^2 - 2\delta^2 \end{cases}$$

sono quelle degli invarianti principali.

*a*) Suppongasi dapprima $\alpha_2 = \alpha_1 = \alpha$. La varietà sarà a curvatura costante negativa $K = -\delta^2$ e si soddisfarà alle equazioni (A) assumendo

$$\psi_1 = dx_1 + (\delta x_1 - \alpha x_2)\, dx_3$$
$$\psi_2 = dx_2 + (\alpha x_1 + \delta x_2)\, dx_3$$
$$\psi_3 = dx_3 \,;$$

donde una nuova espressione pel $ds^2$ delle varietà a curvatura costante negativa.

*b*) Sia

$$\delta^2 = -\alpha_1\,\alpha_2 \,,$$

essendo $\alpha_2 > 0$ , $\alpha_1 < 0$. Sarà

$$\Delta = \alpha_2 - \alpha_1$$

$$\omega_1 = \left(\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}\right)^2 \quad , \quad \omega_2 = \omega_3 = 2\alpha_1\alpha_2 - \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right)^2 .$$

Si tratta dunque di varietà, di cui due invarianti principali sono negativi, eguali e maggiori in valore assoluto dell'altro, che è positivo.

In queste varietà la congruenza principale $\psi'_1$ è determinata, mentre la coppia $\psi'_2, \psi'_3$ può essere scelta arbitrariamente nel piano a quella normale. In particolare si passa dalla terna principale di $2^a$ specie $\psi_1$ , $\psi_2$ , $\psi_3$ ad una terna principale di $1^a$ specie tenendo ferma la congruenza $\psi_3$ ed eseguendo sulla coppia $\psi_1$ , $\psi_2$ la sostituzione ortogonale

$$A \equiv \begin{Vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{Vmatrix}$$

essendo

$$\cos\theta = \pm \sqrt{\frac{-\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}} \quad , \quad \sin\theta = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}} ,$$

valendo il segno superiore o l'inferiore secondo che $\delta = \pm \left|\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1}\right|$ è positiva o negativa.

Si soddisfa in questo caso alle equazioni (A) assumendo

$$\psi_1 = dx_1 + (\delta x_1 - \alpha_1 x_2)\, dx_3$$
$$\psi_2 = dx_2 + (\alpha_2 x_1 + \delta x_2)\, dx_3$$
$$\psi_3 = dx_3 .$$

È poi facile riconoscere che, assieme alla congruenza principale $\psi'_3 \equiv \psi_3$, (che è pure geodetica) è normale anche la

$$\psi'_2 = \sin\theta\, \psi_1 + \cos\theta\, \psi_2 .$$

*c*) Tra le $V_3$, di cui ci occupiamo, rimangono da considerare quelle, le cui curvature riemanniane principali sono tutte distinte.

Dalle (9) seguono le

$$(10) \quad \begin{cases} \omega_1 + \omega_2 = -4\delta^2 \\ \omega_1 - \omega_3 + \omega_2 - \omega_3 = (\alpha_2 - \alpha_1)^2 \\ \omega_1(\omega_1 - \omega_3) + \omega_2(\omega_2 - \omega_3) = \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1)^2\,(\alpha_2 + \alpha_1)^2 , \end{cases}$$

le quali ci permettono di concludere:

1°) che esistono $V_3$, i cui invarianti principali sono tutti costanti negativi, distinti qualunque. Infatti, assegnati del resto comunque i valori

dei tre invarianti principali, basta assumere per $\omega_3$ quello, che è massimo in valore assoluto, perchè dalle (10) risultino valori reali per $\alpha_1, \alpha_2$ e $\delta$;

2°) che esistono $V_3$ per le quali gli invarianti principali sono costanti purchè tali che uno di essi, $\omega_1$, sia positivo e gli altri due negativi e tali che siano verificate le disuguaglianze:

$$\omega_1 + \omega_2 < 0 \quad , \quad \omega_3 > \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} .$$

Nell'un caso e nell'altro ai diversi sistemi di valori reali di $\alpha_1, \alpha_2, \delta$, che dalle (10) si traggono, dati quelli di $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, non corrispondono varietà essenzialmente distinte; ma semplicemente lo scambio delle congruenze $\psi_1$ e $\psi_2$ o l'inversione dei sensi positivi delle loro linee.

La sostituzione ortogonale, per la quale si passa dalla terna principale di 2ª a quella di 1ª specie è anche in questo caso una sostituzione binaria A da eseguire sopra $\psi_1$ e $\psi_2$, essendo

$$(11) \qquad \cos\theta = \pm \sqrt{\frac{\Delta - (\alpha_2 + \alpha_1)}{2\Delta}} \quad , \quad \sin\theta = \sqrt{\frac{\Delta + \alpha_2 + \alpha_1}{2\Delta}} ,$$

e valendo il segno superiore o l'inferiore, secondo che $\delta$ è positiva o negativa.

Per $\psi_1, \psi_2$ e $\psi_3$ valgono ancora le stesse espressioni che nel caso ($b$).

Delle congruenze principali di 1ª specie, in generale, è normale la sola $\psi'_3 \equiv \psi_3$, che è pure geodetica. Le altre due $\psi'_1$ e $\psi'_2$ sono o non sono normali insieme; e sono normali soltanto se è $\alpha_2 + \alpha_1 = 0$. In questo caso gli invarianti principali hanno le espressioni

$$\omega_1 = -2\delta(\alpha_1 + \delta) \quad , \quad \omega_2 = 2\delta(\alpha_1 - \delta) \quad , \quad \omega_3 = -2(\alpha_1^2 + \delta^2).$$

Le curvature principali sono invece

$$\omega'_{11} = -(\alpha_1 - \delta)^2 \quad , \quad \omega'_{22} = -(\alpha_1 + \delta)^2 \quad , \quad \omega'_{33} = \alpha_1^2 - \delta^2 ,$$

donde

$$\omega'^2_{33} = \omega'_{11}\,\omega'_{22} .$$

Si tratta dunque di quelle varietà normali di Bianchi, per le quali una curvatura principale è media geometrica delle altre due.

In fine osserviamo che dalle espressioni trovate per $\psi_1, \psi_2, \psi_3$ nei singoli casi risultano per il $ds^2$ delle varietà considerate in questo paragrafo delle espressioni, che si possono tutte comprendere nella seguente:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \{(\alpha_2^2 + \delta^2)\,x_1^2 + (\alpha_1^2 + \delta^2)\,x_2^2 + \\ + 2\delta(\alpha_1 - \alpha_2)\,x_1\,x_2\}\,dx_3^2 + \\ + 2\,\{(\delta x_1 - \alpha_1 x_2)\,dx_1 + (\delta x_2 + \alpha_2\,x_1)\,dx_2\}\,dx_3 ;$$

e che

$$dx_2 = dx_3 = 0 \quad ; \quad dx_1 = dx_3 = 0 \; ;$$

$$dx_1 + (\delta x_1 - \alpha_1 x_2)\, dx_3 = 0 \quad , \quad dx_2 + (\delta x_2 + \alpha_2 x_1)\, dx_3 = 0$$

sono le equazioni delle congruenze principali di 2ª specie; e

$$\sin\theta\, dx_1 + \cos\theta\, dx_2 = 0 \;,\; dx_3 = 0 \;;$$

$$\cos\theta\, dx_1 - \sin\theta\, dx_2 = 0 \;,\; dx_3 = 0 \;;$$

$$dx_1 + (\delta x_1 - \alpha_1 x_2)\, dx_3 = 0 \quad , \quad dx_2 + (\delta x_2 + \alpha_2 x_1)\, \delta x_3 = 0$$

quelle delle congruenze principali di 1ª specie.

## Matematica. — *Fondamenti di geometria proiettivo-differenziale di una superficie* [1]. Nota II del Corrisp. GUIDO FUBINI [2].

6. STUDIO PROIETTIVO DI S. — Dal nostro punto di vista è naturalmente opportuno porre $g = \varphi_2$, che è invariante per collineazioni, ed usare coordinate normali. Si trova, essendo $F_2 = \varphi_2$, ecc., e indicato con $S_p$ il valore corrispondente di S

$$S_p = \varrho^4\, S_m = N^2 \sqrt{K}\, S_m \tag{24}$$

$$S_p = -d\left[\sqrt{\nabla}\,(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u)\right]\varphi_2 + \sqrt{\nabla}\,(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u)\,\left(\tfrac{3}{2}\, d\varphi_2 + \varphi_3\right) + (x\,,\, Dx\,,\, D_2 x\,,\, D_3 x) \tag{25}$$

ove *i simboli* $\delta^2$, D *sono relativi alla* $\varphi_2$ [e non all'elemento lineare di Gauss, come in $(22)_{bis}$]. Le (23), (24) *dànno il significato metrico di* $S_p$. Una superficie essendo completamente determinata (a meno di collineazioni) da $S_p$, si trae da (25): *Una superficie è completamente determinata nel gruppo proiettivo dalle tre forme* $\varphi_2\,,\,\varphi_3\,,\,(x\,,\, Dx\,,\, D_2 x\,,\, D_3 x)$ (la seconda delle quali, come risulterà da quanto segue, è perfettamente determinata dalle altre due). Dividendo covariantemente la terza per la prima si abbia:

$$(x\,,\, Dx\,,\, D_2 x\,,\, D_3 x) = \overline{\psi}_6 + \overline{\psi}_4\, \varphi_2 + \overline{\psi}_2\, \varphi_2^2 + \overline{\psi}_0\, \varphi_2^3 \qquad (\overline{\psi}_n \text{ coniugate a } \varphi_2).$$

Proveremo che: *La forma* $\overline{\psi}_0$ *è identicamente nulla*; *le forme* $\overline{\psi}_4\,,\,\overline{\psi}_6$ *sono completamente determinate dalle* $\varphi_2\,,\,\varphi_3$ (anzi $\overline{\psi}_6$ è il prodotto di $\varphi_3$ per il suo covariante cubico $\overline{\varphi}_3$). Ne risulterà così provato:

*Date le forme* $\varphi_2\,,\,\varphi_3$, *una superficie è completamente determinata nel gruppo proiettivo dalla sola forma quadratica* $\overline{\psi}_2$, *anch'essa coniu-*

[1] Cfr. la Nota I a pag. 11 di questi Rendiconti.

[2] Pervenuta all'Accademia il 1° luglio 1918.

*gata della* $\varphi_2$. Dato il carattere intrinseco dei nostri studî, noi potremo, per provare il nostro teorema, scegliere ad arbitrio le $u, v$, e p. es. adottare *coordinate assintotiche*.

Scriviamo anzitutto le equazioni, cui soddisfano in tale caso le *coordinate normali*. Il modo più rapido (ma *non* proiettivo) di ottenerle è quello di servirsi delle equazioni

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} = \alpha\frac{\partial\theta}{\partial u} + \beta\frac{\partial\theta}{\partial v} \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \gamma\frac{\partial\theta}{\partial u} + \varepsilon\frac{\partial\theta}{\partial v}$$

$$\left(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon = \text{valori di } \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} \text{ per l'elemento lineare}\right)$$

a cui soddisfano le coordinate cartesiane $\theta$ nel caso che $u, v$ siano assintotiche. Sarà (cfr. A):

$$\varphi_2 = 2\beta\gamma\, du\, dv \quad \text{e quindi} \quad N = \frac{\beta\gamma}{D'}; \quad \varphi_3 = 2\beta\gamma(\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3).$$

Dalla $\varrho^2 = N\sqrt[4]{K}$, dalle equazioni di Gauss e Codazzi, si trae $2\frac{\varrho_u}{\varrho} = \frac{\partial}{\partial u}\log(\beta\gamma) - \alpha$ e $2\frac{\varrho_v}{\varrho} = \frac{\partial}{\partial v}\log(\beta\gamma) - \varepsilon$. Quindi $\varrho$, e $\varrho\theta$, cioè le coordinate *normali* soddisfano alle

$$(26) \qquad x_{11} = \beta x_2 + n x \qquad x_{22} = \gamma x_1 + \nu x$$

(ove $x_{rs}$ sono derivate *covarianti*) e dove:

$$(27) \quad 2n = \left[\frac{\partial^2}{\partial u^2}\log\beta\gamma - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\log\beta\gamma}{\partial u}\right)^2\right] - \left(\alpha_u - \frac{1}{2}\alpha^2\right) + (\beta_v + \beta_u) - \beta\frac{\partial\log\beta^2\gamma}{\partial v}$$

$(27)_{bis}$ $\nu$ si deduce da $n$ scambiando $\beta$ con $\gamma$, $u$ con $v$, $\alpha$ con $\varepsilon$.

Derivando *covariantemente* le (26) si deducono le $x, Dx, D_2x, D_3x$ come *combinazioni lineari* delle $x, x_1, x_2, x_{12}$. Quindi $(x, Dx, D_2x, D_3x)$ vale il prodotto di $(x, x_1, x_2, x_{12}) = \beta^2\gamma^2$ per il determinante dei coefficienti di queste combinazioni lineari. Si trova così:

$$(28) \quad (x, Dx, D_2x, D_3x) = \varphi_3\overline{\varphi}_3 + 2\beta\gamma\, du\, dv \times \left[\beta^2\gamma\frac{\partial\log\beta\gamma^2}{\partial u}du^4 - \beta\gamma^2\frac{\partial\log\beta^2\gamma}{\partial v}dv^4\right] - \frac{1}{2}(2\beta\gamma\, du\, dv)^2\,\overline{\psi}_2.$$

ove

$$\psi_2 = \left(n + \frac{3}{2}\beta\frac{\partial\log\beta^2\gamma}{\partial v}\right)du^2 + \left(\nu + \frac{3}{2}\gamma\frac{\partial\log\beta\gamma^2}{\partial u}\right)dv^2.$$

Mancando nella penultima formola un termine $du^3\,dv^3$, è $\overline{\psi}_0 = 0$. Il coefficiente $\overline{\psi}_4$ di $\varphi_2 = 2\beta\gamma\,du\,dv$ si deduce col metodo dato al § 2 dalla forma $\varphi_4$, dedotta [cfr. la (15)] dalle $\varphi_2$, $\varphi_3$; ed è perciò determinato dalle $\varphi_2$, $\varphi_3$, come avevamo enunciato. In altre parole $\overline{\psi}_4$ si deduce dalle $\varphi_2$, $\overline{\varphi}_3$ come la $\varphi_4$ si deduce da $\varphi_2$, $\varphi_3$ [essendo $\overline{\varphi}_3$ il covariante cubico di $\varphi_3$].

Date le forme $\varphi_2$, $\varphi_3$ sono determinate le $g_2$, $\Gamma_2$ (§ 4); si può quindi, invece di dare la forma $\psi_2$, dare una qualsiasi delle forme $f_2 = \psi_2 - \frac{3}{2} g_2$ e $t_2 = 2f_2 - \Gamma_2$, che in coordinate assintotiche valgono

$$f_2 = \psi_2 - \tfrac{3}{2} g_2 = n\,du^2 + \nu\,dv^2 \tag{29}$$

$$t_2 = 2f_2 - \Gamma_2 = m\,du^2 + \mu\,dv^2 \tag{30}$$

ove

$$m = \frac{\partial^2 \log \frac{1}{\gamma}}{\partial u^2} - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \log \frac{1}{\gamma}}{\partial u}\right]^2 - (\alpha_u - \tfrac{1}{2}\alpha^2) + (\beta_v + \beta\varepsilon) \tag{31}$$

$(31)_{bis}$ $\mu$ si deduce da $m$, scambiando $\beta$ con $\gamma$, $\alpha$ con $\varepsilon$, $u$ con $v$.

7. Come si determina una superficie, per cui sono date le forme $\varphi_2$, $\varphi_3$, $\psi_2$? (Invece di $\psi_2$ è indifferente dare $f_2$ oppure $t_2$). — Si può, p. es., costruire (§ 6) la forma S, risolvere la $S = 0$; ottenuta così l'equazione delle sezioni piane, si può (cfr. T) risalire alle equazioni parametriche della superficie.

Ma, molto più semplicemente, si possono cercare direttamente le coordinate *normali* di un punto della superficie. Le equazioni (26) dicono che, almeno in coordinate assintotiche,

$$D_2 x = P_2^x + x f_2 + 2x_{12}\,du\,dv$$

*cioè che* $D_2 x - P_2^x - x f_2$ *è proporzionale a* $\varphi_2$ (*ossia che* $P_2^x + x f_2$ *è il resto ottenuto dividendo covariantemente* $D_2^x$ *per* $\varphi_2$). Questa proprietà è *intrinseca*, e, essendo stata provata in coordinate assintotiche, vale *in generale e dà in ogni caso le equazioni differenziali per le coordinate normali.* (Nel caso metrico $D_2 x$ è proporzionale ad $F_2$, se $x$ è una coordinata cartesiana, e $D_2$ è calcolato rispetto all'elemento lineare). Vi è dunque una profonda *analogia* tra caso *metrico* e caso *proiettivo*.

8. Condizioni di integrabilità. — Per trovare queste, che dànno *tutte* le relazioni che devono intercedere tra le nostre forme $\varphi_2$, $\varphi_3$, $f_2$ (di cui $\varphi_3$ ed $f_2$ *coniugate* a $\varphi_2$), si scrivono le condizioni di integrabilità delle (26). Si trovano essere le

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 \log \beta\gamma}{\partial u^2} - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u}\right]^2\right) + 2\beta\gamma_u + \beta_u\gamma = \frac{\partial}{\partial v}\left[2n + \beta\,\frac{\partial \log(\beta^2\gamma)}{\partial v}\right] \tag{32}$$

$(32)_{bis}$ l'equazione ottenuta scambiando $\beta$ con $\gamma$, $n$ con $\nu$, $u$ con $v$.

Tenuto conto di queste, l'ultima condizione di integrabilità si può scrivere:

(33) $$2\gamma'_u m + \gamma m'_u = 2\beta'_v \mu + \beta \mu'_v .$$

Le (32) e $(32)_{bis}$ provano in coordinate assintotiche il seguente teorema, che, essendo di carattere intrinseco, vale dunque in generale (cfr. le notazioni del § 4):

*Prima condizione di integrabilità è che* $2\delta(\psi_2 - g_2) - g_3 - \frac{1}{2}\varphi_3\varphi_1$ *sia coniugata di* $\varphi_2$.

La (33) prova poi che:

*Seconda e ultima condizione di integrabilità è che la forma* $R_t$ *dedotta da* $t_2$ *col metodo del* § 4 *sia proporzionale a* $\varphi_3$.

9. Superficie proiettivamente applicabili. — Per studiare queste classi di superficie, possiamo p. es. usare coordinate assintotiche; e cercare le superficie per cui

$$\varphi_2 = 2\beta\gamma \, du \, dv \qquad \varphi_3 = 2\beta\gamma(\beta \, du^3 + \gamma \, dv^3)$$

sono forme prefissate *a priori*. Assumiamo come incognite (anzichè le $n$, $\nu$) le

(34) $$L = -2n - \beta \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v} + \frac{\partial^2}{\partial u^2} \log \beta\gamma - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u}\right)^2 = \alpha_u - \tfrac{1}{2}\alpha^2 - \beta_v - \beta\varepsilon$$

$(34)_{bis}$ $$M = \varepsilon_v - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 - \gamma_u - \gamma\alpha .$$

Le condizioni di integrabilità diventano:

(35) $$L'_v = -(2\beta\gamma_u + \gamma_u\beta) \qquad M'_u = -(2\gamma\beta_v + \gamma_v\beta)$$

$(35)_{bis}$ $$\beta M_v + 2\beta_v M + \beta_{vvv} = \gamma L_u + 2\gamma_u L + \gamma_{uuu} .$$

Per studiare un tale sistema, si possono (Bianchi L.) assumere come nuove incognite le

$$P = L'_u \qquad Q = M'_v$$

cosicchè $(35)_{bis}$ è un'equazione lineare nelle quattro incognite $L, M, P, Q$. Come condizione di integrabilità si trova un'altra equazione dello stesso tipo; da cui, derivando rispetto $u$ oppure rispetto $v$, se ne deducono altre due. I calcoli si complicano in modo tale, che non mi è riuscito di dominarli. Ci si può chiedere quando le forme $\varphi_2$, $\varphi_3$ non determinano completamente la superficie corrispondente, cioè quando questa si può deformare proiettivamente in modo effettivo. In tale caso le (35) e $(35)_{bis}$ ammettono almeno due sistemi di soluzioni $L = L_r$, $M = M_r$ per $r = 1, 2$. La $U = L_1 - L_2$

sarà una funzione della sola $u$, la $V = M_1 - M_2$ sarà una funzione della sola $v$; entrambe devono soddisfare all'unica equazione

$$(36) \qquad \beta V' + 2\beta_v V = \gamma U' + 2\gamma_u U .$$

Senza diminuire la generalità si possono cambiare i parametri $u, v$ in guisa che $U = 0$, oppure 1, oppure $u^2$ e $V = 0$ oppure 1, oppure $v^2$; e ricavarne i possibili valori di $\beta, \gamma$. (Se p. es. $U = u^2, V = v^2$, sarebbe $\beta = \frac{v}{u}\frac{\partial\sigma}{\partial u}$ $\gamma = \frac{u}{v}\frac{\partial\sigma}{\partial v}$ con $\sigma$ funzione arbitraria di $u, v$). Varrebbe fôrse la pena di studiare le (35) e $(35)_{bis}$ almeno per questi valori di $\beta, \gamma$; gli altri eventuali sistemi di valori di $\beta, \gamma$, per cui tali equazioni fossero compatibili, e ammettessero perciò *una sola* soluzione $L, M$ corrisponderebbero a superficie non deformabili proiettivamente, e determinate pertanto completamente (a meno di una collineazione) dalle sole forme $\varphi_2, \varphi_3$.

10. Cenno di altre ricerche. — Si potrebbero svolgere considerazioni duali, definendo le *coordinate normali* $\xi, \eta, \zeta, \tau$ di piano tangente. Queste si ottengono dalle coordinate cartesiane (coseni diretti $X, Y, Z$, e $-W$, ove $W$ è la distanza dall'origine) moltiplicandole per $\varrho_1$ ove $\varrho_1^2 = \frac{N}{\sqrt[4]{K}} = \frac{\varrho^2}{\sqrt{K}}$.

Esse soddisfano alle (26) ove si lascino *affatto inalterati* i valori (27) di $n, \nu$, ma si cambii il segno di $\beta, \gamma$. Si trova $\Sigma \xi d^2 x = \varphi_2$; si trova che le $\xi, \eta, \ldots$ sono uguali ai minori di $(x, x_u, x_v)$ divisi per $\sqrt{\nabla}$. Si ha insomma la più completa analogia col caso metrico.

Assunta la forma $\varphi_2$ a definire una geometria metrica, si può estendere la teoria delle geodetiche, della curvatura e torsione geodetica. Lo studio dell'inviluppo dei piani osculatori in un punto A della superficie alle geodetiche (per tale metrica) uscenti da A porta in modo molteplice alla generalizzazione di normali, di linee di curvatura ecc.

Si può definire un poliedro generalizzazione del triedro mobile di Darboux e Ribaucour, da cui pure è partito il Cesàro per la sua geometria intrinseca ecc. Riassumerò questi studii nella Nota cit. in corso di stampa negli Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino.

In un'altra Memoria in corso di stampa negli Annali di Matematica si generalizzano queste ricerche, si studiano le congruenze $w$, si estendono a questo campo le applicazioni geometriche dei gruppi di Lie, ecc.

## Meccanica. — *Le formule del Cauchy e i fluidi viscosi.* Nota di Umberto Crudeli, presentata dal Socio T. Levi-Civita [1].

I. In un articolo sull'idrodinamica, comparso nella Revue des Sciences [2], Maurice Lévy si domandava se l'esistenza del potenziale di accelerazione, sufficiente per la validità dei teoremi fondamentali di Helmholtz sui filetti vorticosi, fosse anche necessaria per la medesima validità. La risposta fu affermativa [3].

[1] Pervenuta all'Accademia il 10 luglio 1918.

[2] *Revue générale des Sciences pures et appliquées*, 1890, pag. 724. L'articolo in questione trovasi citato anche nel *Traité de Mécanique rationelle* di Appell (1909, vol. III, pag. 336).

[3] Per mostrarlo, qualora si volessero adottare procedimenti analoghi a quelli usati in note questioni d'idrodinamica da Cauchy e da Kirchhoff, si potrebbe procedere nel modo che qui appresso diremo, dopo avere premesso la seguente osservazione.

Si supponga che sussistano i teoremi fondamentali di Helmholtz. Rappresentiamo con

$$(\alpha_0) \qquad \frac{da}{\xi_0}=\frac{db}{\eta_0}=\frac{dc}{\zeta_0}$$

e con

$$(\alpha) \qquad \frac{dx}{\xi}=\frac{dy}{\eta}=\frac{dz}{\zeta}$$

le equazioni differenziali delle linee vorticose rispettivamente nell'istante iniziale $t_0$ e nel generico istante $t$, intendendo che $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$ e $\xi, \eta, \zeta$ rappresentino le componenti del vortice rispettivamente nell'istante $t_0$ e nell'istante $t$. Siano, inoltre, $l_0$ e $\sigma_0$ rispettivamente la lunghezza e la sezione retta di un *elemento* di filetto vorticoso nell'istante $t_0$ ed $l$ e $\sigma$ quelle corrispondenti nell'istante $t$. Infine, siano in corrispondenza del medesimo elemento, $\Omega_0$ la grandezza del vortice nell'istante $t_0$ ed $\Omega$ quella nell'istante $t$. Avremo $\sigma_0\Omega_0=\sigma\Omega$. Ma, denotando con $\lambda_0$ il comune valore dei rapporti che figurano nelle $(\alpha_0)$ e con $\lambda$ quello corrispondente dei rapporti che figurano nelle $(\alpha)$, potremo scrivere $l_0=\lambda_0\Omega_0$, $l=\lambda\Omega$. Quindi avremo $\lambda_0\sigma l=\lambda\sigma_0 l_0$. E, tenendo presente che $\sigma_0 l_0=\sigma l \mathrm{D}$ (dove D rappresenta il ben noto determinante funzionale) sarà

$$(\beta) \qquad \lambda_0=\lambda \mathrm{D}\,.$$

Ora, osservando che

$$dx=\lambda\xi \quad , \quad dy=\lambda\eta \quad , \quad dz=\lambda\zeta\,,$$

cioè

$$\frac{\partial x}{\partial a}da+\frac{\partial x}{\partial b}db+\frac{\partial x}{\partial c}dc=\lambda\xi\,,\ \text{etc.},$$

e che $da=\lambda_0\xi_0$, $db=\lambda_0\eta_0$, $dc=\lambda_0\zeta_0$, si perviene, ricordando, infine, la $(\beta)$, alle

Noi osserveremo che, più generalmente, l'esistenza del potenziale di accelerazione, è necessaria e sufficiente per la validità delle formule del Cauchy

$$(1)\qquad \begin{cases} D\xi = \dfrac{\partial x}{\partial a}\xi_0 + \dfrac{\partial x}{\partial b}\eta_0 + \dfrac{\partial x}{\partial c}\zeta_0 \\[2ex] D\eta = \dfrac{\partial y}{\partial a}\xi_0 + \dfrac{\partial y}{\partial b}\eta_0 + \dfrac{\partial y}{\partial c}\zeta_0 \\[2ex] D\zeta = \dfrac{\partial z}{\partial a}\xi_0 + \dfrac{\partial z}{\partial b}\eta_0 + \dfrac{\partial z}{\partial c}\zeta_0 , \end{cases}$$

dove $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$ e $\xi, \eta, \zeta$ rappresentano le componenti del vortice, inerente ad una medesima particella del mezzo, rispettivamente nell'istante $t_0$ e nell'istante $t$; e dove D rappresenta il ben noto determinante funzionale.

Infatti, che sia sufficiente resulta dall'osservare che, qualora si abbia

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{e le due analoghe,}$$

potranno applicarsi i noti procedimenti di Cauchy e di Kirchhoff; e che sia necessaria può dimostrarsi come segue. Qualora sussistano le (1), ricavando da esse $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$ e poi eseguendo operazioni di tipo noto, si può pervenire alle relazioni

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c} - \frac{\partial u}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial v}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c} - \frac{\partial v}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial w}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b}\right) = 0, \text{ etc.,}$$

dove i simboli hanno noti significati. Avremo, dunque, allora

$$(2)\quad \frac{\partial u'}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c} - \frac{\partial u'}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial v'}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c} - \frac{\partial v'}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial w'}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial w'}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b} = 0, \text{ etc.,}$$

avendo denotato con $u', v', w'$ rispettivamente le $\dfrac{du}{dt}, \dfrac{dv}{dt}, \dfrac{dw}{dt}$.

---

formule del Cauchy

$$\frac{\partial x}{\partial a}\xi_0 + \frac{\partial x}{\partial b}\eta_0 + \frac{\partial x}{\partial c}\zeta_0 = D\xi, \text{ etc.}$$

Ciò premesso, ricavando $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$ da coteste equazioni e poi eseguendo operazioni che superiormente vedremo, si ottiene (come volevasi dimostrare)

$$\frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} = 0,$$

avendo denotato con $u', v', w'$ rispettivamente le $\dfrac{du}{dt}, \dfrac{dv}{dt}, \dfrac{dw}{dt}$.

Ora, si moltiplichino le (2) rispettivamente per $\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial x}{\partial b}, \frac{\partial x}{\partial c}$ e poi si sommino membro a membro. Analogamente si operi dopo avere moltiplicato le (2) medesime rispettivamente per $\frac{\partial y}{\partial a}, \frac{\partial y}{\partial b}, \frac{\partial y}{\partial c}$; come pure dopo averle rispettivamente moltiplicate per $\frac{\partial z}{\partial a}, \frac{\partial z}{\partial b}, \frac{\partial z}{\partial c}$. E si tenga presente che

$$\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c} - \frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b} = - \mathrm{D}\frac{\partial a}{\partial z}, \text{ etc.},$$

dove D, come abbiamo già accennato, rappresenta lo jacobiano

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a}, & \frac{\partial x}{\partial b}, & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a}, & \frac{\partial y}{\partial b}, & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a}, & \frac{\partial z}{\partial b}, & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix}.$$

Avremo così

$$\frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} = 0,$$

come volevasi dimostrare.

Le (1) non richiedono la preliminare ipotesi che il moto sia verticoso (ipotesi che, naturalmente, figura nei suddetti teoremi di Helmholtz).

Le precedenti considerazioni, avendo carattere puramente cinematico, valgono *per qualsiasi mezzo continuo*. Il moto (anche qui appresso) viene implicitamente supposto regolare (¹).

II. In virtù della suddetta condizione necessaria e sufficiente relativa alle (1), resulta che per un fluido *perfetto*, nell'ipotesi che la densità del fluido stesso sia funzione $f(p)$ della pressione $p$, le formule (1) del Cauchy sussisteranno qualora e *soltanto* qualora esista il potenziale delle forze.

III. Si considerino le equazioni del moto dei fluidi viscosi omogenei, nell'ipotesi che esista il potenziale delle forze. Coteste equazioni, mediante

(¹) Per il significato che viene qui attribuito alla parola « regolare » vedasi la *Geometria del movimento* del Maggi, pag. 83; oppure i suoi *Principî della teoria matematica del movimento dei corpi*, pag. 75. Noi, dunque, diciamo che il movimento è regolare qualora delle $x, y, z$ esistano e siano continue le derivate che occorre considerare, unitamente con la circostanza che il determinante funzionale D sia diverso da zero.

le notazioni vettoriali, verranno scritte

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dt} = \operatorname{grad}\left(U - \dfrac{p}{\varrho} + k \operatorname{div} V\right) + \nu \Delta'_2 V \\ \dfrac{d\varrho}{dt} + \varrho \operatorname{div} V = 0 , \end{cases}$$

dove i simboli hanno noti significati.

E si osservi che (¹)

$$\Delta'_2 V \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \operatorname{grad} \operatorname{div} V - \operatorname{rot} \operatorname{rot} V .$$

È chiaro che, qualora si abbia $\Delta'_2 V = 0$ oppure $\operatorname{rot} \operatorname{rot} V = 0$, varranno, per i suddetti fluidi viscosi, le formule del Cauchy. Ma nè l'una nè l'altra di coteste condizioni è necessaria (²). Infatti, ricordando le considerazioni del precedente paragrafo, si vede che: condizione necessaria e sufficiente è che $\Delta'_2 V$ sia anch'esso il gradiente di una funzione, cioè che si abbia $\operatorname{rot} \Delta'_2 V = 0$. Ma $\operatorname{rot} \Delta'_2 V = \Delta'_2 \operatorname{rot} V$. Dunque, chiamando, per brevità, vettore armonico un vettore del quale le componenti siano funzioni armoniche, avremo che *condizione necessaria e sufficiente, affinchè (supposto esistente il potenziale delle forze) valgano, nei riguardi del moto di un fluido viscoso omogeneo, le formule* (1) *del Cauchy, è che il vettore* rot V *sia un vettore armonico.*

## Chimica. — *Determinazione quantitativa dell'acetone nelle polveri infumi.* Nota di A. Pieroni (³), presentata dal Socio Angelo Angeli.

I metodi ora seguìti per la determinazione dell'acetone in un liquido qualunque conducono a risultati poco concordanti; le cause di errore vanno ricercate nella difficoltà che presenta l'acetone a trasformarsi quantitativamente in iodoformio, nella facilità con cui quest'ultimo viene attaccato dall'alcali eccedente, nella perdita in jodo per effetto di reazioni secondarie, nella volatilità dell'jodoformio stesso. Queste cause di errore poi aumentano quando si voglia dosare l'acetone nel distillato che si ottiene da una polvere infume in corrente di vapore.

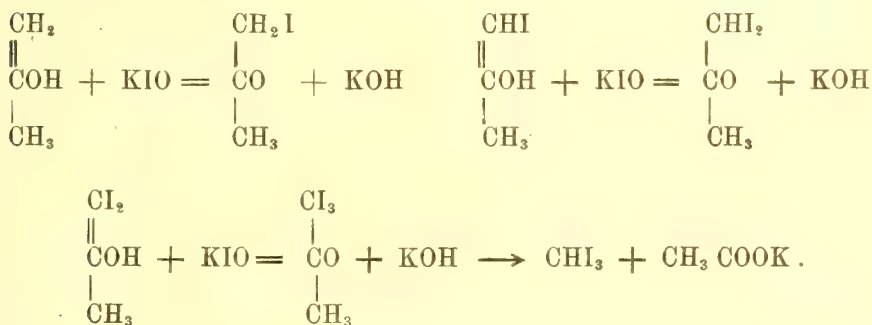
(¹) Vedasi, *Analise vectorielle générale* di Burali-Forti e Marcolongo.

(²) Ricerche di condizioni sufficienti, nei riguardi, però, soltanto del teorema di Lagrange sul potenziale di velocità, furono eseguite dal De Saint-Venant, dal Bresse, dal Poincaré, dall'Hadamard e dal Duhem (vedasi Compt. Rend., 1902, pp 686 e 580).

(³) Pervenuta all'Accademia il 19 luglio 1918.

Se si aggiunge ad una soluzione di acetone, in una sola volta, lo jodo e la potassa anche se in quantità rispettivamente quattro ed otto volte superiori alle calcolate ed in concentrazioni doppio-normali, non tutto l'acetone presente dà jodoformio nè tutto l'jodoformio che, in un primo tempo, si forma, rimane inalterato. Nelle numerose determinazioni da me fatte, aggiungendo a 10 cc. di una soluzione di acetone al 0,6 $^0/_0$, cc. 20 di una soluzione doppio normale di potassa caustica, e cc. 10 di una soluzione di jodo pure doppio-normale, ottenni per l'acetone valori disparatissimi che oscillavano tra 0.4 e 0.5 per cento, nè mi fu possibile, pur variando le concentrazioni della potassa, dello jodo, dell'acetone, ottenere valori tanto vicini al calcolato da potere imputare gli errori a cause di esperienza. Dato il grande eccesso di reattivi impiegati ogni volta, dati i risultati che ottenni studiando l'azione dell'ipojodito sull'acetone [1] per i quali si dimostra che la quantità di jodoformio che si forma, in presenza di grande eccesso di acetone, è corrispondente alla quantità di ipojodito teoricamente calcolato da determinate quantità di potassa caustica e di jodo, si deve ammettere, che, operando nelle condizioni su accennate, la velocità di formazione del jodoformio è di molto inferiore alla velocità di decomposizione dell'ipojodito; inoltre che l'jodoformio nascente, in presenza di un grande eccesso di alcali, reagisce per dare joduro e formiato di potassio. La reazione che si effettua tra l'acetone e l'ipojodito si svolge per gradi e si comporta come un processo di secondo ordine [2]:

$$\begin{array}{l} CH_2 \\ \| \\ COH \\ | \\ CH_3 \end{array} + KIO = \begin{array}{l} CH_2I \\ | \\ CO \\ | \\ CH_3 \end{array} + KOH \qquad \begin{array}{l} CHI \\ \| \\ COH \\ | \\ CH_3 \end{array} + KIO = \begin{array}{l} CHI_2 \\ | \\ CO \\ | \\ CH_3 \end{array} + KOH$$

$$\begin{array}{l} CI_2 \\ \| \\ COH \\ | \\ CH_3 \end{array} + KIO = \begin{array}{l} CI_3 \\ | \\ CO \\ | \\ CH_3 \end{array} + KOH \longrightarrow CHI_3 + CH_3COOK\,.$$

Anche l'ipojodito reagisce con se stesso dando luogo ad un processo di secondo ordine [3] per cui, se si rappresentano con $a$ e $b$ le quantità di acetone e di ipojodito, sciolte nell'unità di volume, che nell'unità di tempo vengono trasformate completamente per dare jodoformio, e con V la velocità media di questa trasformazione, si avrà: $V = K'ab$.

(1) G. Ch., *42*, II, 543 (1912).
(2) G. Ch., *42*, II, 534 (1912); *43*, II, 620 (1913).
(3) Z. Phys. Ch., *16* (303-314).

D'altra parte, se con $c$ si rappresenta la quantità di ipojodito sciolto nell'unità di volume, che nell'unità di tempo viene completamente trasformato in joduro e jodato di potassio, la velocità media V' di questa trasformazione sarà data da $V' = K'' c^2$

per cui $$\frac{V}{V'} = \frac{K'}{K''} \frac{ab}{c^2} \qquad \frac{K'}{K''} = K \quad \frac{V}{V'} = K \frac{ab}{c^2}$$

da ciò appare chiaro che volendo aumentare V in rapporto a V' (cioè la velocità di formazione del jodoformio in rapporto a quella di trasformazione dell' ipojodito) si deve aumentare $a$ o $b$ oppure diminuire $c$. E poichè nel caso in quistione la concentrazione $a$ dell'acetone è fissa e non è opportuno consumare un eccesso di jodo, conviene diminuire $c$, cioè la concentrazione dell' ipojodito nell'unità di volume. Cosicchè, volendo trasformare dell'acetone quantitativamente in jodoformio, si deve impiegare o un grande eccesso di ipojodito o fare reagire con l'acetone nell'unità di tempo e di volume piccolissime quantità di ipojodito stesso per evitare nel miglior modo possibile che la massima parte vada perduta nella formazione di joduro e di jodato.

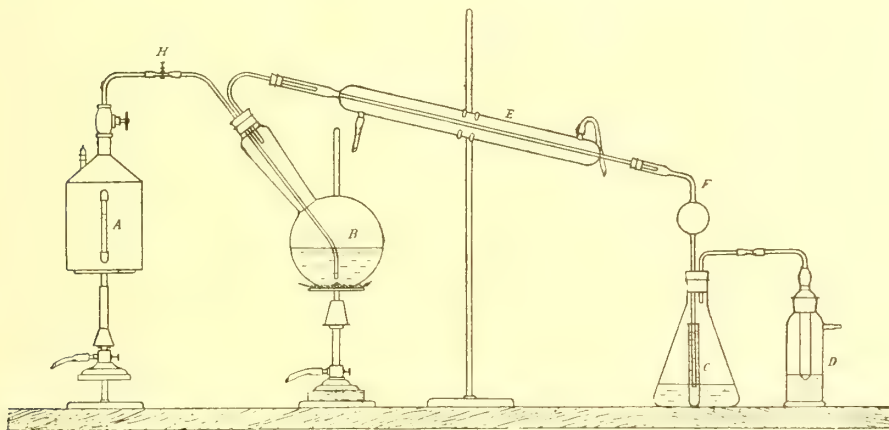
Tutto ciò trova conferma nella pratica sperimentale; i risultati di queste ricerche, fatte su 10 cc. della soluzione a percentuali segnate nell'ultima colonna, sono riassunti nella tabella seguente:

| Numero della serie di determinazione | Numero dei cc. di KOH 2N impiegati | Numero di cc. di I 2N impiegati | Acetone trovato. Valori medii di due determinazioni | Acetone calcolato |
|---|---|---|---|---|
| I | 8 | 8 | 0,059 | 0,06 |
| II | 7 | 6 | 0,059 | » |
| III | 7 | 6 | 0,02 | 0,02 |
| IV | 8 | 6 | 0,019 | » |
| V | 3 | 3 | 0,02 | » |

Queste determinazioni vennero eseguite sia direttamente sulla soluzione di acetone, sia sul distillato ottenuto sottoponendo a distillazione in corrente di vapore una certa quantità di balistite e acido solforico con 10 cc. della soluzione titolata di acetone; le soluzioni di potassa e di jodo contenute in burette vennero fatte sgocciolare contemporaneamente nella soluzione di acetone in modo che di ciascuna cadessero dalle 10 alle 20 goccie al minuto. L'jodoformio formatosi venne dosato come descritto più avanti. Così precisate le condizioni più opportune per effettuare la trasformazione completa dell'acetone in jodoformio, mi riuscì facile stabilire un *Metodo per la determinazione dell'acetone nelle polveri infumi.*

Le polveri senza fumo contengono una percentuale di acetone che varia da 3 a 0,25 circa. Quando si abbia ad operare con liquidi diluiti, si pesano

al cg. circa gr. 35-50 di polvere ridotta in pezzi, si macinano in apparecchio speciale mantenendo bagnata la polvere con un filo d'acqua distillata per evitare l'evaporazione del solvente; la massa che esce macinata con l'acqua si raccoglie in un grande bicchiere o direttamente mediante un imbuto in un pallone a distillazione in corrente di vapore della capacità di due litri circa. Generalmente comprese anche le acque di lavaggio per la macina, si impiegano, per gr. 50 di polvere, cc. 400 di acqua; il tutto viene sottoposto a distillazione in corrente di vapore usando l'apparecchio rappresentato dalla figura.

Al liquido che devesi distillare è bene aggiungere 100 cc. di acido solforico diluito 1:1 per evitare che il distillato passi emulsionato. L'acido

solforico come risulta nelle prove riferite nella tabella precedente non disturba in alcun modo la determinazione, che è invece disturbata dalla presenza di potassa in cui la polvere, anche se non macinata, si scioglie completamente, ma per distillazione dà prodotti di idrolisi capaci di generare jodoformio. Nella figura, A rappresenta il generatore di vapore; B il pallone; E il refrigerante; C la bevuta dove si raccoglie il distillato; F il tubo adduttore che pesca in una provetta ripiena d'acqua; D una comune boccia di lavaggio che serve a trattenere quelle traccie di acetone che possono eventualmente sfuggire da C. Quando il vapore esce da A ed incomincia ad agitare la massa contenuta in B, si accende la lampada sotto il pallone e si scalda fino a vivace ebollizione regolando l'entrata del vapore con la pinza H.

Raccolti circa cc. 250-300 di distillato, poco più della metà del liquido primitivo contenuto in B, si stacca il tubo adduttore F, si raccoglie in una provetta un po' di distillato e su questa si fa la ricerca dell'acetone con potassa e jodo, ricerca che riesce sempre negativa se l'operazione è stata condotta con le dovute norme. Nel caso contrario, si riattacca e si continua a distillare sino a che la prova riesce negativa. Cessata la distillazione i

liquidi contenuti nel tubo d'assaggio, nella bevuta e nelle boccie di lavaggio, e le acque di lavatura dei rispettivi recipienti e del tubo F si riuniscono in un pallone graduato da cc. 500 portando a segno con acqua distillata. Si agita per rendere uniforme la soluzione e si procede, su una parte aliquota di essa, alla determinazione dell'acetone. A tale scopo si pipettano esattamente cc. 100 della soluzione in un cilindro a tappo smerigliato di circa 300 cc.; da due burette e nello stesso tempo, si fanno sgocciolare in essi la soluzione di potassa contenente gr. 112 di KOH in un litro e l'altra di jodo, contenente gr. 257 di I e 330 gr. di KI in un litro. Le due soluzioni debbono sgocciolare contemporaneamente entro il cilindro e le goccie cadere possibilmente in numero di venti circa al minuto, mentre il cilindro dev'essere continuamente agitato. Di tempo in tempo ci si arresta, si attende che l'jodoformio formato si depositi, che il liquido giallo sovrastante diventi limpido e si aggiunge sempre allo stesso modo potassa e jodo senza agitare. Se il liquido non intorbida si deve ritenere che la trasformazione dell'acetone è stata completa. Si lascia in riposo qualche minuto il tutto, poi si aggiunge un eccesso di cloruro di sodio, tanto che ne rimanga indisciolto una decina di grammi. Al liquido così saturato si aggiungo cc. 50 di etere, conservato su sodio, si agita energicamente per tre o quattro volte tenendo ben chiuso il cilindro. Appena i due strati sono completamente e nettamente separati, si pipettano 25 cc. della soluzione eterea di jodoformio e si versano in 25 cc. di una soluzione alcoolica di potassa caustica satura (il numero dei cc. di potassa alcoolica che si devono adoperare varia col numero dei cc. di jodo che si sono impiegati nella reazione con l'acetone; in generale per un cc. di jodo bastano due di potassa). Si diluisce con alcool sino ad ottenere una soluzione limpida. Si evapora a bagno-maria l'etere, si scalda all'ebollizione per 15 minuti, si distilla l'alcool, si diluisce con acqua, indi si raffredda e si acidifica con acido nitrico diluito; l'joduro di potassio formatosi si titola col metodo di Volhard. Dal numero dei cc. di nitrato d'argento consumato si risale alla quantità di acetone per cento contenuto nella polvere esaminata, applicando la formula

$$\text{acetone } \% = \frac{2a}{b}$$

dove $a$ è il numero di cc. di nitrato d'argento impiegato e $b$ il peso della sostanza analizzata.

Con questo metodo furono eseguite determinazioni di acetone in diversi campioni di cordite di calibro differente e si ebbero i seguenti risultati.

Campione n. 1. — gr. 36,80 di polvere diedero un distillato di 500 cc. di cui 100 cc. consumarono:

| | KOH 2N cc. | I 2N cc. | $Ag\,NO_3$ N/IO cc. | Acetone % trovato |
|---|---|---|---|---|
| Prova I) | 9 | 7 | 13,50 | 0,37 |
| Prova II) | 11,5 | 10,5 | 13,00 | 0,36 |

Per gr. 45,02 si ebbe sopra 100 cc. dei 500 distillati:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Prova I) | 12 | 11 | 16,00 | 0,355 |
| Prova II) | 10 | 9 | 16,00 | 0,355 |

Campione n. 2. — Per gr. 38,51 si ebbe:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 10,5 | 8 | 8,6 | 0,22 |

Per gr. 47,86 si ebbe:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 12 | 11 | 10,1 | 0,21 |

Campione n. 3. — Per gr. 40,69 si ebbe:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Prova I) | 16 | 13,5 | 41,6 | 1,02 |
| Prova II) | 15 | 14 | 41,6 | 1,02 |

Per gr. 43,7:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 19 | 16 | 44,2 | 1,01 |

Campione n. 4. — Per gr. 38,95 si ebbe;

| | | | |
|---|---|---|---|
| 12 | 10 | 24,8 | 0,63 |

Per gr. 38,55:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 15 | 13,5 | 24,0 | 0,62 |

E. M.

## Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali storiche e filologiche.*
Vol. V. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti. Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I-XXVII. (1892-1918). Fasc. 2°, Sem. 2°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-XXVII. (1892-1918). Fasc. 1°-2°.
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XII. Fasc. 11.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-6.

---

## CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

P. Maglione & C. Strini (successori di E. Loescher & C.) — *Roma.*

# INDICE

## Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

*pervenute all'Accademia durante le ferie del 1918.*



E. Mancini *Segretario d'ufficio responsabile*.

Pubblicazione bimensile. N. 3-4.

# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

## RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

**Volume XXVII.° — Fascicoli 3°-4°**

2° Semestre.

*Comunicazioni pervenute all'Accademia durante le ferie del* 1918.

(Ogni Nota o Memoria porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

# ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

## PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

---

### I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 9 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a pagine 4 ½.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 30 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

### II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta a stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta, pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 50 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 30 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

### Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

---

## MEMORIE E NOTE
## DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

*pervenute all'Accademia durante le ferie del 1918.*

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo)

---

**Chimica.** — *Il problema dell'affinità chimica nei cristalli e la velocità di cristallizzazione.* Nota di M. Padoa, presentata dal Socio G. Ciamician [1].

Da quando gli spettri dei raggi X hanno dato il modo di riconoscere la posizione degli atomi nei reticoli cristallini, si è presentata ai chimici la questione della natura delle forze che legano gli atomi e le molecole nei cristalli: ed infatti con questo mezzo non fu possibile rilevare la direzione e tanto meno la qualità e l'intensità delle forze colleganti gli atomi nei cristalli. È dunque necessario ricercare se tali forze siano della stessa natura di quelle che i chimici chiamano valenze, se in altre parole è l'affinità chimica che presiede alla formazione dell'edificio cristallino; inoltre sarebbe da vedere se possa ammettersi l'esistenza individuale delle molecole nei cristalli [2].

A me è sembrato che il processo della cristallizzazione potesse fornire dei dati sperimentali per chiarire la prima questione.

Se si considera la configurazione caratteristica di ogni elemento cristallino di un dato corpo, cioè quell'aggruppamento di atomi che costituisce il minore poliedro, vien fatto di persuadersi che nel processo di cristalliz-

[1] Pervenuta all'accademia il 3 agosto 1918.

[2] Su tali argomenti vedi le seguenti pubblicazioni: W. H. e W. L. Bragg, *X Rays and Cristal Structure* (1905); Debye e Scherrer, *Göttingen. Nachr. der Königl. Gesellsch. des Wissenschaften*, 1915 (4 e 18 dicembre); 1916, pp. 16-26, *1*, 1; 1917, *2*, 180; Chemical Society, Annual Reports, 1917, pp. 6-10; 226-235.

zazione debbano avvenire modificazioni nella distanza e nelle posizioni relative degli atomi: la cristallizzazione potrebbe dunque essere considerata come un processo di trasformazione chimica dello stesso genere della trasformazione di due stereoisomeri o di tautomeri, al quale si accompagna naturalmente quello di collegamento delle molecole fra loro; questo non potrebbe dirsi per il caso di molecole monoatomiche o di composti come il cloruro di sodio, nei quali non sembra possa variare (nella cristallizzazione) che la distanza fra atomo ed atomo.

Se poi si considera che uno stesso corpo può assumere forme cristalline diverse (polimorfismo) sembra naturale ammettere che il polimorfismo non sia che isomeria allo stato solido, che non può esistere nello stato liquido e gassoso. E qui torna opportuno ricordare che il chiarirsi dei fatti va rendendo sempre più problematica la distinzione fra polimorfismo ed isomeria, per quanto si sia fatto da varî autori per stabilirla.

Se dunque la cristallizzazione è nella generalità dei casi un processo di trasposizione atomica e di collegamento per mezzo di valenze fra le molecole più o meno libere provenienti dalle fasi gassose e liquide, essa è molto più vicina ad un processo chimico di quanto si potrebbe credere, e la velocità di cristallizzazione è una velocità di reazione.

Giova appena ricordare che la velocità di cristallizzazione, misurata come velocità di accrescimento in cm/sec della fase cristallina ottenuta dal liquido soprafuso, cresce col sopraraffreddamento della sostanza fino ad un valore massimo che si mantiene pressochè costante per un certo intervallo perchè alla superficie di separazione delle due fasi si mantiene costante la temperatura ed uguale a quella di fusione: quando il calore di fusione sviluppato non è più in grado di riportare questa regione della cristallizzazione a tale temperatura, la velocità diminuisce [1]. In questo comportamento si ravvisa una somiglianza con le comuni reazioni chimiche, le quali sono pure accelerate dagli aumenti di temperatura.

La velocità di cristallizzazione deve anche dipendere dalla rapidità più o meno grande colla quale le molecole, dotate del movimento constatato nei liquidi e nei gas secondo la teoria cinetica, possono collocarsi nel reticolo cristallino: e ciò, mentre spiega l'influenza della viscosità [2] e della velocità di diffusione nei liquidi soprafusi o soprasaturi [3], ci indica anche un altro fattore sul quale agisce la variazione di temperatnra.

Per dare una conferma a quanto precede mi sono proposto di verificare i seguenti punti, che ne sono la conseguenza:

[1] Vedi ad es. Tammann, *Kristallisieren und Schmelzen* (1903).

[2] Doelter, *Physikalisch- Chemische Mineralogie* (1905), pp. 105-110.

[3] Su questo argomento ed in genere sulla velocità di cristallizzazione vedi i lavori di R. Marc, *Zeitschr. für Physikal. Ch. 61*, 385; *67*, 470; *68*, 104: *Zeitschr. für Elektrochemie, 16* 201; *17*, 134.

I. Se nei corpi di struttura uguale ed isomorfi si trovino velocità di cristallizzazione uguali o almeno dello stesso ordine di grandezza.

A questo proposito giova notare che, colla moderna conoscenza della struttura dei cristalli, l'isomorfismo deve corrispondere ad una somiglianza o identità di posizione rispettiva degli atomi nelle molecole isomorfe; ne consegue la probabilità di riscontrare analogie nelle velocità di cristallizzazione di corpi isomorfi, a conferma dei concetti suesposti.

II. Se in una serie di sostanze di costituzione chimica perfettamente analoga, si osservino velocità di cristallizzazione paragonabili e dipendenti, a parità delle altre condizioni, dalla grandezza molecolare.

Le misure qui riportate hanno dato una conferma soddisfacente di queste previsioni.

| Sostanza | Formula | P. F. | Forma crist. | Velocità | Sopra-raffredd.° |
|---|---|---|---|---|---|
| m-bromonitrobenzolo . . | $C_6H_4<^{Br}_{NO_2}$ | 56° | rombico | 600 | 21° |
| m-cloronitrobenzolo . . . | $C_6H_4<^{Cl}_{NO_2}$ | 44 | » | 882 | 20 |
| p-biclorobenzolo . . . . | $C_6H_4<^{Cl}_{Cl}$ | 52,7 | monoclino-romb. | 4800 | 27 |
| p-bibromobenzolo . . . | $C_6H_4<^{Br}_{Br}$ | 87 | » » | 7000 | 20 |
| p-bijodobenzolo . . . . | $C_6H_4<^{J}_{J}$ | 129 | » » | 6000 | 39 |
| p-clorojodobenzolo . . . | $C_6H_4<^{Cl}_{J}$ | 56 | » » | 1153 | 30 |
| benzolo . . . . . . . . | $C_6H_6$ | 5,4 | rombico | 34500 | 18 |
| p-xilolo. . . . . . . . | $C_6H_4<^{CH_3}_{CH_3}$ | 15 | monoclino | 3375 | 20 |
| naftalina . . . . . . . | $C_{10}H_8$ | 80,8 | » | 9000 | 30 |
| antracene . . . . . . | $C_{14}H_{10}$ | 216 | » | 1600 | 46 |
| fenantrene . . . . . . | $C_{14}H_{10}$ | 100 | » | 1600 | 20 |
| etere dimetil. ac. ossalico | $CH_3.OOC.COOCH_3$ | 54 | » | 3860 | 62 |
| » succinico | $CH_3.OOC.(CH_2)_2.COO.CH_3$ | 18 | — | 660 | 22 |
| » sebacico | $CH_3.OOC.(CH_2)_8.COO.CH_3$ | 38 | — | 600 | 42 |
| » suberico | $CH_3.OOC.(CH_2)_6.COO.CH_3$ | —5° | — | non misurab. | 20 |
| acido formico. . . . . | $H.COOH$ | 8 | — | 109 | 16 |
| » acetico . . . . . | $CH_3.COOH$ | 17,5 | — | 2500 | 32 |
| » caprilico . . . . | $C_7H_{15}.COOH$ | 16,5 | — | 4714 | 30 |
| » nonilico (pelargonico) | $C_8H_{17}.COOH$ | 12 | — | 2250 | 24 |
| » laurinico . . . . . . | $C_{11}H_{23}.COOH$ | 44 | — | 2400 | 30 |
| » palmitico . . . . . | $C_{15}H_{31}.COOH$ | 62 | — | 6000 | 30 |
| » stearico . . . . . . | $C_{17}H_{35}.COOH$ | 69 | — | 3600 | 40 |

Nelle prime due serie di corpi (isomorfi) si notano le prevedute analogie nella velocità di cristallizzazione; il solo clorojodobenzolo, nella seconda serie, si discosta dai corpi con esso isomorfi, in parte forse a causa della notevolmente diversa viscosità. Nella terza serie si nota la grande diversità

fra benzolo e xilolo, dovuta all' introduzione dei metili, che ritardano in modo considerevole la cristallizzazione; per la naftalina e seguenti si hanno, secondo le previsioni, minori velocità rispetto al benzolo; il noto isomorfismo fra antracene e fenantrene è anche accompagnato da identità nella velocità di cristallizzazione. Nella quarta serie si può osservare il forte distacco fra l'etere ossalico e quello succinico, dovuto all'introduzione dei gruppi —CH—; un successivo aumento del loro numero (etere sebacico) non influisce sensibilmente.

Nella serie degli acidi grassi, come era prevedibile per le irregolarità qui osservate nei riguardi di altre proprietà, non vi è un andamento uniforme; si può rilevare soltanto che, all' infuori dell'acido formico, che si distacca notevolmente dagli altri, le velocità di cristallizzazione sono dello stesso ordine di grandezza.

Gli eteri metilici degli acidi grassi elevati, laurinico, palmitico e stearico, hanno tutti e tre velocità minima non misurabile perchè in tutti e tre si formano troppi germi spontanei di cristallizzazione.

Le seguenti misure, riguardanti sali isomorfi, stanno a conferma di quanto è stato notato per corpi organici isomorfi:

| Sostanza | Formula | P. F. | Forma crist. | Velocità | Sopra-raffredd. |
|---|---|---|---|---|---|
| Nitrato di litio . . . . . . . | $Li NO_3$ | 253° | romboedrico | 324 | 33° |
| » di sodio . . . . . . | $Na NO_3$ | 312 | » | 360 | 46 |
| » di potassio . . . . . | $KNO_3$ | 339 | rombico | 1875 | 69 |
| » d'argento . . . . . . | $Ag NO_3$ | 208 | » | 920 | 38 |
| Cloruro d'argento . . . . . . | $Ag Cl$ | 450 | monometrico | 2140 | 24 |
| Bromuro d'argento . . . . . | $Ag Br$ | 427 | » | 1400 | 27 |
| » d'arsenico . . . . . | $As Br_3$ | 31 | rombico | 600 | 41 |
| Cloruro d'antimonio . . . . . | $Sb Cl_3$ | 73 | » | 225 | 65 |
| Bromuro stannoso . . . . . | $Sn Br_2$ | 215 | » | 3600 | 35 |
| Cloruro stannoso . . . . . . | $Sn Cl_2$ | 250 | » | 4500 | 60 |
| Bromuro mercurico . . . . . | $Hg Cl_2$ | 238 | » | 3000 | 20 |

Ritornando ai composti organici è interessante rilevare che la velocità di cristallizzazione del benzolo è fra le più alte che siano state fin qui osservate ed è superata soltanto da quella del fosforo che è di 60000: questo mi ha fatto pensare che il reticolo cristallino del benzolo deve formarsi in modo che il gruppo CH funzioni come un atomo, cosicchè la velocità di cristallizzazione elevata sarebbe giustificata: *a*) dal minimo spostamento degli atomi che sarebbe necessario per la cristallizzazione; *b*) dall'affinità residuale proveniente dai legami doppi o centrici del benzolo [1].

[1] In questi ultimi tempi Debye e Scherrer hanno dimostrato con l'interferenza dei raggi X nel benzolo liquido, che questo è effettivamente costituito da anelli esagonali.

Con questo ragionamento si verrebbe ad ammettere implicitamente che i legami fra atomi e molecole nei cristalli siano della stessa natura delle valenze chimiche.

Sulla velocità di reazioni chimiche ha influenza l'affinità espressa quantitativamente come calore di reazione; il moderno sviluppo della teoria cinetica tende anzi a fare la previsione delle velocità di reazione dallo sviluppo termico, e probabilmente il problema verrà risolto, almeno pei sistemi gassosi, come già venne risolto quello della previsione degli stati di equilibrio chimico dalla tonalità termica ([1]).

Per analogia si potrebbe credere che il calore di fusione di un cristallo fosse in relazione con l'affinità delle reazioni di collegamento degli atomi e delle molecole nello stesso cristallo, e che per tal titolo la velocità di cristallizzazione dovrebbe dipendere dai calori di fusione. Senonchè il processo di fusione è alquanto complesso e dalle poche misure che potrebbero servire a fare dei raffronti non può trarsi alcuna conclusione sicura.

Comunque sia, seguendo i concetti predetti, mi sembrava logico immaginare che, fra due corpi della stessa struttura, l'uno saturo e l'altro non saturo, quest'ultimo dovesse presentare una maggior velocità di cristallizzazione perchè le affinità latenti nei doppi legami debbono favorire il processo di cristallizzazione e questo deve compiersi in condizioni di gran lunga più favorevoli che quelli di un corpo saturo, nel quale gli atomi di carbonio non potranno avere disponibili che delle valenze secondarie di intensità minima.

Tutti i corpi scelti per la riprova sperimentale sono fra loro isomorfi, essendo notorio che tale relazione si riscontra fra tutti i corpi non saturi ed i relativi idrogenati ([2]). L'isomorfismo completo garantiva della identità di struttura allo stato solido; e siccome si è riscontrato coi precedenti esempi che i corpi isomorfi e di uguale funzione chimica hanno presso a poco la stessa velocità di cristallizzazione, così il riscontrare fra corpi non saturi e corrispondenti idrogenati delle differenze notevoli, avrebbe singolarmente appoggiato le vedute ora esposte.

Le misure seguenti, in gran parte eseguite per la prima volta, confermano completamente le previsioni fatte.

([1]) Marcelin, Comptes Rendus, *151* (1910), pp. 152-155; Pratolongo, questi Rendiconti, 1917, II, 182; Trautz, Zeitschr. für Anorg. Chemie, *102* (1918), pag. 81.

([2]) Sulle relazioni d'isomorfismo alle quali si allude in questa Nota, vedi Bruni, *Feste Lösungen und Isomorphismus* (1908).

| Sostanza | Formula | P. F. | Form. crist. | Velocità | Sopra-raffredd. |
|---|---|---|---|---|---|
| Benzolo . . . . . . | $C_6H_6$ | 5°,4 | rombico | 34500 | 18° |
| Cicloesano . . . . . | $C_6H_{12}$ | 5 | » | 3900 | 16 |
| Naftalina . . . . . | $C_{10}H_8$ | 80,8 | monoclino | 9000 | 30 |
| Diidronaftalina . . . | $C_{10}H_{10}$ | 15 | — | 150 | 25 |
| Fenantrene . . . . | $C_{14}H_{10}$ | 100 | » | 1600 | 20 |
| Tetraidrofenantrene . | $C_{14}H_{14}$ | 0 (circa) | — | piccoliss. | 15 |
| Stilbene . . . . . . | $C_6H_5.CH:CH.C_6H_5$ | 124 | » | 6000 | 44 |
| Dibenzile . . . . . | $C_6H_5.CH_2 \cdot CH_2.C_6H_5$ | 51 | » | 580 | 36 |
| Azobenzolo . . . . | $C_6H_5.N{=}N.C_6H_5$ | 68 | » | 800 | 50 |
| Idrazobenzolo . . . | $C_6H_5 NH.NH.C_6H_5$ | 34 | rombico | piccoliss. | 34 |
| Acido cinnamico . . | $C_6H_5.CH:CH.COOH$ | 133 | monoclino | 480 | 23 |
| » idrocinnamico . | $C_6H_5.CH_2.CH_2.COOH$ | 46 | » | 210 | 26 |
| Etere dimetilico acido fumarico . . | $H.C.COOH_3$ ‖ $CH_3OOC.C.H$ | 102 | triclino (?) | 13500 | 52 |
| Etere succinico . . | $H.CH COO CH_3$ ⊢ $CH_3:OOC CH.H$ | 18 | — | 658 | 22 |

Come sempre è accaduto finora, le relazioni fra le proprietà chimico-fisiche e la costituzione dei corpi, si dimostrano per eccellenza nelle serie dei corpi organici; tuttavia, per ciò che riguarda quelli minerali, anche tenuto conto delle misure qui riportate, si può pensare che per la velocità di cristallizzazione entrino in giuoco quelle valenze secondarie o residuali che concorrono alla formazione di complessi e di idrati.

Nei corpi elementari e massime nei metalli, che sono monoatomici, le valenze libere dovrebbero avere per questo riguardo la massima efficienza, e per quanto non si abbiano misure che per il fosforo (tetratomico, velocità 60000) e per lo zolfo monoclino il quale, benchè ottoatomico, percorre secondo nostre misure 960 mm. al minuto primo, si può pensare che per gli elementi e specialmente pei metalli la velocità di cristallizzazione sarà assai grande [1].

Concludendo, pure col riconoscere la necessità di ulteriori indagini sperimentali, mi sembra di potere affermare quanto segue:

I) La velocità di cristallizzazione è una proprietà costitutiva.

II) I legami fra atomi ed atomi nei reticoli cristallini sono della stessa natura delle valenze chimiche.

Colgo l'occasione per ringraziare la signorina Elisabetta Buschi, laureanda in Chimica pura, che mi ha validamente coadiuvato per ciò che riguarda le misure qui riportate.

[1] Esistono pei metalli soltanto tre misure eseguite da Czochralski con un metodo speciale (Zeitschr. für Phykal. Chemie, *92* (1917), 219-221). Questo A. dà per piombo, zinco e stagno delle velocità già discrete (da 90 a 140 mm.) alla temperatura di fusione; naturalmente, se fosse possibile soprarafreddare, si noterebbero (se tutto va come per gli altri corpi) velocità enormemente maggiori.

## Fisica terrestre. — *Sulla natura del 1° impulso del terremoto Marsicano del 1915.* Nota di G. Agamennone, presentata dal Socio E. Millosevich [1].

1. Già in questi stessi Rendiconti, non mancai di richiamare l'attenzione sul fatto importantissimo che i sismografi di Rocca di Papa, fin dall'inizio della perturbazione, avevano rivelata l'esistenza di onde lente del suolo in occasione del disastroso terremoto Calabro del 1905 e anche di quello catastrofico di Messina del 1908 [2]. Insistetti di nuovo su questo punto, capitale per la teoria di propagazione delle onde sismiche, in occasione d'altro mio studio sul notevole terremoto giapponese del 21 gennaio 1906, pel quale giunsi pure alla stessa conclusione che, cioè, le prime perturbazioni negli strumenti fossero state con grande probabilità prodotte da onde gravitazionali [3].

Ora mi propongo di portare il mio esame sull'altro non meno memorando terremoto della Marsica del 1915, del quale mi sono già occupato per ciò che si riferisce alla sua velocità di propagazione. Incentivo a questa mia nuova ricerca è stata la lettura d'una recente Memoria [4], il cui scopo era appunto di arrecare un contributo al presente argomento. In essa mi hanno colpito due fatti assai singolari. Il primo è che scorrendo la Tabella data dall'Autore, nella quale sono riassunti i dati strumentali dell'Italia, risultano, quasi sempre, più grandi le ampiezze del 1° impulso, date da sismografi a periodo oscillatorio più lento, beninteso fatto il debito conto dell'ingrandimento strumentale, della risultante delle due componenti orizzontali e, infine, della diversa distanza dall'epicentro. Il secondo fatto è che mentre la 1ª onda sarebbe arrivata *condensata* in alcuni Osservatorî, in altri, invece, si sarebbe rivelata *rarefatta*, senza che si possa invocare per il disaccordo tra gli uni e gli altri, una plausibile spiegazione nella diversa distanza o direzione per rapporto all'epicentro.

[1] Pervenuta all'Accademia il 17 agosto 1918.

[2] *Importante particolarità nei sismogrammi del R. Oss. Geod. di Rocca di Papa in occasione dei terremoti Calabri dell'8 settembre 1905 e 28 dic. 1908* (Seduta del 21 marzo 1909); *Alcune considerazioni sul meccanismo di propagazione delle onde sismiche* (Seduta del 18 aprile 1909).

[3] *Intorno ai sismogrammi senza tremiti preliminari* (Boll. d. Soc. Sism. It., XIV, 1910, pag. 9).

[4] R. Labozzetta, *A proposito della direzione e del senso della 1ª semionda del terremoto catastrofico del 13 genn. 1915* (Ivi. XX, 1916, pag. 205).

Quest'ultimo fatto, posto in evidenza ma non spiegato dall'A., è evidentemente in opposizione con la teoria dell'elasticità de' corpi solidi, poichè, ammesso, come fa l'A., essere il 1° impulso dovuto all'arrivo di onde *longitudinali*, si sarebbe pur dovuta aspettarsi dappertutto o un'onda condensata o una rarefatta.

2. Incominciamo dalla 1ª questione, concernente l'ampiezza registrata nei varî Osservatorî. L'A. parte dal noto principio che, all'arrivo della 1ª onda sismica *longitudinale*, la massa pendolare dei sismografi resti immobile, per inerzia, in modo che le penne scriventi registrino, convenientemente ingrandito, il moto reale del suolo. In quest'ordine d'idee, dovrebbe risultare nulla, o per lo meno piccola, l'influenza del periodo oscillatorio strumentale, perchè appunto, all'urto provocato dall'arrivo della 1ª onda, le masse pendolari non avrebbero il tempo sufficiente per entrare in oscillazione propria, e per conseguenza si dovrebbe ottenere presso a poco pari ampiezza, anche con tipi diversi di strumenti installati in località a non troppo diversa distanza dall'epicentro, e tanto meglio con tipi identici, oppure situati in uno stesso Osservatorio. Ora niente di tutto questo si riscontra nella Tabella data dall'A. come ora vedremo, cominciando dagli Osservatorî più vicini alla Marsica e poi passando, a mano a mano, a quelli più lontani [1].

Nulla di speciale risulta da un confronto tra *M. Cassino* (Km. 60) e *Roma* (Km. 90), in quanto che i Pendoli Orizzontali « Agamennone » che vi funzionarono, avevano periodi non troppo diversi, e l'ampiezza di 2830 micron della risultante, calcolata per M. Cassino, fu effettivamente maggiore di quella di 1020$^{\mu}$ ottenuta a Roma, come doveva essere. — Ma si nota subito un enorme disaccordo tra *Benevento* (Km. 140) e *Valle di P.* (160) in cui funzionavano due stessi tipi di strumenti (P. O. « Alfani »), poichè mentre nella 1ª località il moto effettivo del suolo sarebbe di neppure 1$^{\mu}$, invece, nella 2ª, sebbene più lontana, risulterebbe di ben 460$^{\mu}$! E se vogliamo altresì considerare l'ampiezza di 22$^{\mu}$ ottenuta a B. da una coppia di P. O. « Agamennone », la troviamo ancora più che 20 volte inferiore a quella di V. Ma il divario non può essere tutto spiegato con la diversità dei periodi, che erano di $11^s$ e $8^s$-$9^s$ per B. e di $7^s,5$ e $17^s$ per V., il cui sismografo era forse più sensibile. — Una discordanza risulta eziandio tra *Valle di P.* (Km. 160) e *Foggia* (180), dappoichè nella 1ª si trova un'ampiezza di 460$^{\mu}$ e se ne ottiene una di 930$^{\mu}$ per F., sebbene disti 20 Km. di più, ma presenta periodi più lenti ($17^s$ e $19^s$) ne' suoi P. O. « Stiattesi ». Più significativo è il confronto tra i due Osservatorî di *Siena* (Km. 230): quello dell'Università e quello dell'Osservanza, muniti entrambi d'un Microsismografo « Vicentini ». Ebbene, nel 1° si ha un'ampiezza di 27$^{\mu}$, nel

[1] Avverto d'aver supplito ad alcune costanti strumentali, mancanti nella Tavola, con quelle tolte dai Bollettini, o avute da comunicazioni degli stessi Osservatorî.

2° di ben $515^{\mu}$; ma convien notare che il microsismografo dell' Università era lungo m. $1\frac{1}{2}$ e quello dell' Osservanza m. 5 c. — Se poi veniamo al confronto tra *Siena* (230) e *Firenze* (270), troviamo in quest'ultima un'ampiezza assai più notevole, sebbene a maggiore distanza. Infatti, mentre abbiamo visto, nei due Osservatorî di S., ampiezze di $27^{\mu}$ e $515^{\mu}$, per F. troviamo $695^{\mu}$ per i P. O. *Aperiodici* e ben $1770^{\mu}$ per i P. O. « Alfani ». Qui v'è da rilevare non solo il fatto strano che per la stessa F. si trovino due valori, l'uno più che doppio dell'altro; ma se confrontiamo l'enorme ampiezza di $1770^{\mu}$ di F. con quella di S. (più vicina all'epicentro), la troviamo più che tripla di quella dell'Osservanza e circa 66 volte maggiore di quella dell' Università! È sintomatico che questi forti valori di F. siano stati ricavati da P. O. di lentissimo periodo (aperiodici o con $20^{s}$ di periodo) assai superiore a quello di $2^{s},4$ e $4'\frac{1}{2}$ c. di S. — Consideriamo ora i due Microsismografi « Vicentini » di *Padova* (Km. 400). L'uno, con pendolo di m. $1\frac{1}{2}$, dà soltanto $20^{\mu}$ verso NE; dall'altro, con pendolo lungo m. 11 c., si ottiene un valore settuplo ($80^{\mu}$ (¹) verso NNW) e, cosa curiosa, in direzione quasi perpendicolare alla 1ª! — Se passiamo al confronto tra *Padova* (400) e *Chiavari* (425), alle ampiezze di $20^{\mu}$ e $80^{\mu}$ di P. corrisponde quella di $250^{\mu}$ di C. sebbene più distante. Ma deve tenersi presente che mentre a P. i pendoli verticali oscillavano con periodi di $2^{s},3$ e $6^{s},7$, i P. O. « Stiattesi » di C. avevano periodi di $11^{s}\frac{1}{2}$ e $13^{s}$. — Un'eccezione si ha dal confronto tra *Chiavari* (Km. 425) e *Mileto* (430), poichè mentre per C. si hanno $250^{\mu}$, vien fuori un'ampiezza di soli $97^{\mu}$ per M., dove funzionava una coppia di P. O. « Alfani » con un periodo di ben $18^{s}$. — Ma se si paragona *Mileto* (430) con *Catania* (515), si trova per quest'ultimo Osservatorio un'ampiezza di soli $12^{\mu}$, cioè c. 8 volte meno di quella ($97^{\mu}$) di M.; ed il disaccordo, più che con la distanza, è spiegabile col periodo di $18^{s}$ nel sismografo di M. in confronto di quello ($2^{s},4$) del microsismografo di C. — Venendo a *Moncalieri* (Km. 580), troviamo $288^{\mu}$, dati dai P. O. « Stiattesi » e soltanto $43^{\mu}$ ricavati dal Pendolo Verticale, avendo presente che i primi hanno un periodo di c. $20^{s}$, mentre il 2° oscilla con soli $3^{s},2$ di periodo (²). — Infine, istituendo un parallelo tra *Catania* (515) e *Moncalieri* (580), troviamo soli $12^{\mu}$ per il microsismografo della 1ª località contro i $43^{\mu}$ del P. V. e i $288^{\mu}$ dei P. O. della 2ª, sebbene maggiormente distante. Ma insisto nel far rilevare che mentre a C. il periodo era di soli $2^{s},4$, quelli di M. erano di $3^{s},2$ e $20^{s}$ c.

3. Mi par lecito quindi concludere che i sismografi, dotati di più lento periodo, hanno in realtà fornito maggiori ampiezze. Viene quindi spontaneo il dubbio se veramente il 1° impulso sia dovuto all'arrivo di onde *longitudinali*, come ammette il Labozzetta, o non piuttosto di onde *gravitazionali*

(¹) Ottenuto coll' ingrandimento di 108 e non 180 del Labozzetta.

(²) Nella Tavola del Labozzetta è, per equivoco, riportato $2^{s},3$.

le quali, al loro passaggio, hanno fatto inclinare il suolo e con ciò provocata, fin dal primo momento, la deflessione delle stesse masse pendolari; ed allora si spiegherebbe perfettamente perchè i pendoli, dotati di più lento periodo, a guisa appunto di livelle sensibilissime, abbiano potuto dare tracciati più ragguardevoli. Se così fosse, rimarrebbe subito spiegata la strana anomalia, rilevata dal Labozzetta, e cioè che per taluni Osservatorî l'inizio della perturbazione sia dovuto ad un'onda *condensata* (moto centrifugo) e per altri ad un'onda *rarefatta* (moto centripeto).

Poichè si tratterebbe sempre, specialmente per gli Osservatorî più distanti, d'inclinazioni lievissime del suolo, è chiaro che la diversa sensibilità degli strumenti avrebbe avuta, nel nostro caso, un'influenza preponderante nel far sì che quelli più delicati siano rimasti più facilmente e sensibilmente deflessi al passaggio delle prime evanescenti onde lente del suolo, e quelli meno delicati soltanto al sopraggiungere delle successive, più e meno rinforzate. Con ciò rimarrebbe spiegato perchè in alcuni Osservatorî la 1ª deviazione della penna è stata causata da una data inclinazione del suolo ed in altri, invece, da un'inclinazione in senso opposto; e sono appunto queste diverse deviazioni, interpretate come dovute a onde longitudinali, che han fatto credere a onde condensate, o rarefatte, secondo i casi.

Se veramente il 1° impulso fosse dovuto alle onde longitudinali, ritenute generalmente dotate d'un periodo piuttosto rapido, assai meno dannosa sarebbe stata l'influenza della diversa sensibilità degli strumenti, in quanto che, avuto anche riguardo all'eccezionale intensità del terremoto Marsicano, avrebbero pur dovuto agire tutti i sismografi all'arrivo della 1ª onda emanata dal centro di scuotimento, a meno che non si fosse trattato proprio di strumenti eccessivamente pigri ed a troppa distanza dal medesimo.

4. Restando in quest'ordine di idee, quale meraviglia dunque se l'ora dell'inizio del sismogramma in qualche Osservatorio possa essere stato sensibilmente in ritardo per rispetto ad altri, all'incirca alla stessa distanza? L'inizio del sismogramma può mostrarsi anche ben netto, ma provocato non dalla 1ª onda, ma dalla 2ª o dalla 3ª, e magari dalle successive sempre meno lievi. Un esempio assai istruttivo ci è offerto dallo stesso A., quando avverte di non aver tenuto conto, nelle sue ricerche, del Microsismografo « Vicentini » installato nel proprio Osservatorio di Mileto, perchè, *causa il forte attrito*, la registrazione vi è cominciata con un ritardo di ben 9ˢ in confronto dei P. O. « Alfani ». Ne consegue pertanto che se in detto Osservatorio avesse agito il solo Microsismografo, si sarebbe ottenuta un'ora sensibilmente ritardata, e la si sarebbe, senza dubbio, ritenuta esattissima! [1].

[1] Basta gettare uno sguardo alla Tabella del Labozzetta, per convincersi che in alcuni Osservatorî, anche vicini all'epicentro, quali Benevento e Siena (Università), l'inizio è costituito da deviazioni così insignificanti delle penne, da generare giustamente il sospetto che qualche precedente ondulazione del suolo possa essere passata inavvertita allo strumento. La stessa riflessione vale per Catania, sebbene più lontana.

Queste le prime impressioni suscitate dalla lettura della Memoria sopra citata. Mi son proposto, però, di sviscerare l'argomento con un esame accurato degli stessi sismogrammi originali, già inviatimi da quasi tutti gli Osservatorî del Regno, e di vedere fino a qual punto queste mie deduzioni ricevano una conferma dal risultato delle mie ricerche, condotte con la maggiore obbiettività, nell'intento di arrecare un qualche contributo alla soluzione del difficile e quanto mai ancora oscuro problema della propagazione delle onde sismiche.

## Litologia. — *Sulle sabbie ferrifere del litorale pugliese a sud del Promontorto garganico* (1). Nota del dott. G. Checchia-Rispoli, presentata dal Corrisp. Federico Millosevich (2).

Le sabbie pirosseniche con magnetite titanifera del litorale presso Barletta hanno richiamato, per quanto sempre fugacemente, l'attenzione di parecchi studiosi. Il primo a segnalarle è stato il Ludwig (3); molto tempo dopo ne hanno parlato il Virgilio (4) e brevemente il Sacco (5). Il dottore Chelussi ha infine studiato la composizione mineralogica di queste sabbie insieme con quelle di vari punti della costa pugliese a sud della penisola garganica segnalando in tutte un'abbondanza di magnetite e di ilmenite (6).

Per incarico della Direzione dell'Istituto Sperimentale delle Ferrovie dello Stato ho dovuto anch'io occuparmi delle sabbie del litorale barlettano allo scopo di studiare l'entità di quei depositi, che tuttora si vanno formando, rispetto al tenore della magnetite che contengono, per un possibile loro sfruttamento industriale. Durante questo studio m'è riuscito di compiere anche alcune osservazioni circa la provenienza della magnetite ed il modo di concentrarsi lungo quella costa, che credo non del tutto prive di interesse esporre in questa breve Nota.

Il tratto di litorale, lungo il quale si svolsero le ricerche, si estende per oltre 30 chilometri tra la foce Carmisina a nord di Margherita di Sa-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Sperimentale delle Ferrovie dello Stato.

(2) Pervenuta all'Accademia il 3 agosto 1918.

(3) Ludwig R., *Geologische Bilder aus Italien* (Bull. Soc. Imp. d. Naturalistes de Moscou, vol. XLVIII). Mosca, 1874.

(4) Virgilio F., *Geomorfogenia della Provincia di Bari* (dal vol. III dell'opera *La Terra di Bari*). Trani, 1900.

(5) Sacco F., *La Puglia. Schema geologico* (Boll. Soc. Geol. Ital., vol. XXX), Roma, 1911.

(6) Chelussi I., *Contribuzione alla psammografia dei litorali italiani.* I: *Le sabbie dell'Adriatico da Ravenna a Bari*; II: *Sabbie del litorale da Molfetta a Taranto.* (Boll. Soc. Geol. Ital., vol. XXX). Roma, 1911.

voja [1] e Trani. In questo tratto di litorale la costa pugliese assume due distinti aspetti. Quella a nord-ovest di Barletta, formata di depositi alluvionali-marini, è bassa, larga e qua e là paludosa. Da Barletta invece procedendo verso Trani la spiaggia è rocciosa, irta di punte e di frastagliature, coperta interamente di alghe, e talmente stretta che in molti punti è difficile il passaggio. Su di essa si eleva a picco un gradino alto talora più di 5 metri formato da strati perfettamente orizzontali di calcare compatto del Cretaceo e più limitatamente da quelli del tufo-calcareo conchigliare del Pliocene. Detto gradino, originatosi in seguito al fratturamento del tavolato calcareo delle Murge, man mano che dal Casino Arisciauno si procede verso l'Ofanto, si va addentrando verso terra; però prima di arrivare a Torre Ofantina si perde ogni traccia di esso. Presso Barletta il gradino è formato dai sabbioni giallicci più o meno cementati del Postpliocene, i quali si estendono maggiormente al di là dell'Ofanto per formare il Tavoliere delle Puglie.

* * *

Sulla bassa costa che si estende a nord-ovest di Barletta sino a Margherita di Savoja avvengono le maggiori concentrazioni di magnetite; si può dire anzi che le sabbie ferrifere formano un deposito quasi continuo con punti, talora molto estesi, di arricchimento di minerale alternanti con altri meno ricchi. Da notizie assunte sui luoghi ho potuto apprendere che dette sabbie si rinvengono abbondanti anche oltre Margherita di Savoja. Invece al di là di Barletta verso Trani non si formano depositi di una qualche importanza, per quanto si sappia che le sabbie con magnetite trasportate dalla corrente litoranea si ritrovino anche oltre Bari. Piccoli depositi sabbiosi e talora con forti percentuali di minerale si trovano in tutte le insenature e le frastagliature di quella costa rocciosa, la quale nondimeno si conserva nella sua caratteristica forma originaria, non essendo le piene dell'Ofanto capaci di interrarla.

È opportuno notare intanto che alla distribuzione dei materiali lungo la costa tra Manfredonia e Bari resta completamente estranea l'azione della corrente adriatica, la quale, come è risaputo, è fortemente deviata dal suo percorso rasente il litorale dalla sporgenza del Promontorio garganico, lasciando così completamente libero l'ampio golfo di Manfredonia. È verso Bari che la corrente tende a raggiungere il litorale pugliese per rasentarlo poi sino al canale di Otranto. Sono quindi le onde di mare e le mareggiate che operano sulla distribuzione dei materiali lungo quel tratto del litorale

[1] La così detta foce Carmisina è il primo dei tre canali, procedendo da Margherita di Savoja verso Zapponeta, aperti attraverso il cordone, che separa la laguna di Salpi dall'Adriatico, i quali mettono in comunicazione il lago col mare, permettendo un lentissimo ricambio delle acque.

pugliese. Le prime depongono progressivamente sulla spiaggia i materiali e nel ritirarsi abbandonano le parti più pesanti, rappresentate dalla magnetite, ilmenite, augite ecc. e trasportano seco quelle più leggere. Le mareggiate poi, specialmente quelle più forti, portano la sabbia un po' più dentro la spiaggia, di guisa che uno strato di sabbia nera si troverà successivamente a qualche distanza dalla battigia dentro terra. Anche l'azione eolica ha poi un ufficio importante sulla distribuzione e sulla concentrazione della magnetite operando una cernita dei materiali e provocando il movimento più rapido verso l'interno delle parti più leggere, mentre quelle più pesanti si muovono meno rapidamente. Per l'azione di questi vari agenti si originano dei monticelli di sabbia parallelamente alla costa formati da letti di sabbia nera di spessore variabile alternanti con altri di sabbia ordinaria.

Per quanto le ricerche dovettero essere limitate alla sola zona costiera, per una larghezza di 50 a 100 metri, io ho voluto estenderle anche molto al di là di detta zona. Sempre ho potuto segnalare la presenza della magnetite, là dove si trovano terreni alluvionali: così a titolo di curiosità ricordo che in alcuni campioni prelevati, a circa 1 chilometro dal mare, oltre la rotabile che da Barletta va a Torre Ofantina, in terreni coltivati da tempo a vigneti, è stato riscontrato sino al 4 % di magnetite. Tracce di questa esistono dappertutto: negli orti di Barletta, nei *campi* di sale presso Margherita di Savoja, nei tratti paludosi del delta dell'Ofanto, presso le sponde di questo fiume, ecc.

Le zone di arricchimento lungo il litorale sono parecchie. La più estesa è quella che dalla punta destra del delta si spinge per circa 3 chilometri verso Barletta. In questa zona esiste tra le altre una forte concentrazione di magnetite che sembra abbastanza ampia, in cui il minerale è nella proporzione in peso di 75 su 100 parti di sabbia. In questo punto, che si trova in linea retta con il caseggiato della masseria di San Lazzaro e dista circa una cinquantina di metri dal mare, si è verificata la più forte concentrazione di magnetite.

A sinistra del fiume si può distinguere una prima zona larga un centinaio di metri e lunga un chilometro circa, che si estende dalla punta sinistra del delta verso Margherita di Savoja. Una seconda zona larga quanto la prima e lunga circa mezzo chilometro si trova ad un chilometro e mezzo a sud di Margherita di Savoja. Infine una terza zona larga non più di una decina di metri (1) e lunga un chilometro si trova nella regione detta *il Quarto* a nord di Margherita (2).

(1) Non devesi interpretare come una duna quel rialzo di sabbia imboscato parallelo alla spiaggia alto circa 3 metri, il quale è stato costruito per difendere i retrostanti orti dai venti di mare. Di siffatti rialzi se ne vedono dappertutto lungo quella costa.

(2) Seguendo le norme sugli scandagli eseguiti per simili ricerche è stato fatto un

***

Il Ludwig, il Virgilio ed il Sacco sono concordi nell'ammettere che le sabbie nere che attualmente si depositano lungo il litorale barlettano risultano di minerali, i quali provengono dal disfacimento delle rocce vulcaniche del Vulture e che dall' Ofanto sono trasportati al mare. Il Chelussi solo crede invece che « il pirosseno verde..., la magnetite, il plagioclasio basico e talora il granato provengono da un massiccio cristallino sommerso a non grande profondità nella parte meridionale del bacino adriatico ».

Ecco ciò che io ho osservato circa l'origine dei minerali suddetti, che sono i più comuni delle sabbie del litorale tra Margherita di Savoja e Barletta.

Avendo avuto la fortuna di risalire il corso dell' Ofanto pochi giorni dopo una fortissima pioggia, ho potuto osservare sull'ampio letto del fiume degli estesi veli di sabbia nera di recentissima formazione identici a quelli del vicino litorale. In tutti i campioni di queste sabbie, alcuni dei quali prelevati ad una distanza dalla foce del fiume di oltre 50 chilometri, ho riscontrato sempre una notevole quantità di magnetite, che vi è contenuta sino al 5 %.

Ciò non basta, perchè ho voluto fare anche un paragone tra la sabbia presa lungo il corso dell' Ofanto, a monte del ponte di Canosa, e quella del litorale. Non intendo di fare lo studio completo di queste sabbie non avendo potuto far eseguire dei preparati in lamina sottile, ma mi limito ad indicare solo i minerali più abbondanti allo stato di granelli che ho potuto determinare col gentile aiuto dell' ing. S. Franchi del R. Ufficio Geologico.

In un campione di sabbia prelevato a circa tre chilometri a sud-est del delta verso Barletta ho potuto riconoscere i seguenti minerali:

*Magnetite* ed *Ilmenite*. Sono gli elementi ferriferi che costituiscono rispettivamente i minerali di ferro e di titanio e che si possono trovare nelle sabbie sino al 75 %. Separati a mezzo di una comune calamita sono, come del resto tutti gli altri elementi, sempre molto fini. Carattere importante è che essi sono rarissimamente arrotondati, anzi non di rado sono angolosi e con angoli appena smussati.

*Augite*. È l'elemento di gran lunga prevalente fra quelli non attratti dalla calamita. Si presenta in cristalli di color verde bottiglia più o meno intenso, talora quasi opaco, che conservano gli spigoli appena smussati dalla levigazione. La freschezza di molti cristalli indica la loro non lontana prove-

---

calcolo approssimativo del minerale contenuto nelle quattro zone indicate, le sole presumibilmente utilizzabili; si è ottenuto un totale di circa 30,000 tonnellate di magnetite, che corrispondono a circa 20,000 tonnellate di ferro. In questo calcolo non si è tenuto conto di concentrazioni locali talora molto ricche di minerale.

nienza dal giacimento originario ed il poco tempo durante il quale hanno subìto il lavorio delle onde.

*Orneblenda*. Assai più rara, con spigoli anche più conservati di quelli dell'augite.

*Pleonasto*. *Granato melanite?*

*Oligisto*. Abbastanza frequente in scagliette rosse.

*Zircone*. I piccoli rari cristalli sono completamente terminati e con spigoli poco smussati.

*Granato*. Roseo, forse almandino, in elementi molto arrotondati senza tracce di facce cristalline.

Sono di determinazione incerta (eccetto la *calcite* eliminata col trattamento dell'acido acetico), gli altri elementi senza forme cristalline. Fra questi però sembra che si possano riferire all'*olivina* numerose scaglie informi verdi e molto birifrangenti. Alcuni elementi si possono a causa della geminazione polisintetica riferire a *feldspati* plagioclasi, altri certamente a *quarzo*.

Nel campione di sabbia preso, come si è detto, a monte del ponte di Canosa, ho rinvenuto *tutti gli elementi della sabbia del litorale, eccettuati il granato roseo e lo zircone*. Si rinvenne inoltre in detta sabbia qualche elemento di biotite e molto maggiore abbondanza di elementi chiari.

L'associazione, tanto nell'una quanto nell'altra sabbia, dell'augite con i minerali ferriferi (magnetite ed ilmenite) e con i caratteri che questi ultimi hanno nelle sabbie litoranee, indica la identica genesi di questi minerali. Or donde provengono essi? Indubbiamente dalle rocce del Vulture, le quali effettivamente li contengono ([1]). Sappiamo anche dal lavoro del De Lorenzo che la magnetite e l'ilmenite presenti in tutte le rocce dell'antico vulcano, sia come secrezioni porfiriche, sia come microliti della massa fondamentale, sono così abbondanti, specialmente in quelle basiche, che devesi a questi minerali l'elevato magnetismo di quelle rocce.

Ora l'Ofanto, pur non lambendo nel suo corso direttamente le rocce del Volture, riceve sulla sua destra le fiumane di Atella e di Rendina, che circondano alla base interamente il cono vulcanico, raccogliendo lo scolo dei numerosi torrenti e ruscelli che lo solcano radialmente e fluiscono senza pausa al basso convogliando i materiali strappati verso l'Ofanto. Nè potrà far meraviglia la grande quantità di magnetite e di ilmenite radunate su quel litorale, se si tien presente che da tempo il Vulture, i cui prodotti occupano una superficie di oltre 150 chilometri quadrati, è in fase di prevalente erosione (ved. De Lorenzo, op. cit.).

È lecito dunque concludere che dal disgregamento delle rocce del Vulture provengono in gran parte i minerali (augite, orneblenda, olivina, oligisto, magnetite, ilmenite, ecc.) che compongono le sabbie nere del litorale pugliese

([1]) De Lorenzo G., *Studio geologico del monte Volture*. Napoli, 1900.

a sud del Gargano. L'assenza in queste sabbie di minerali del gruppo della sodalite (noseana ed hauyna) e della leucite, o meglio la mancata loro determinazione a causa dell'esame incompleto e con mezzi imperfetti da me compiuto, non crediamo che possa essere sufficiente per infirmare la conclusione sull'origine della magnetite e degli altri minerali contenuti nelle sabbie che attualmente si depositano lungo quel tratto della costa pugliese, tanto più che tali minerali sono facilmente alterabili.

## Matematica applicata. — *Della volgarizzazione ed applicazione della fisica matematica in medicina* [1]. Nota I del professore S. Salaghi, presentata dal Socio S. Pincherle [2].

L'acustica fisiologica è particolarmente adatta all'opera di volgarizzazione, a cui da anni attendo, della fisica-matematica in medicina. Varî problemi, che possono essere illuminati dalla fisica, attendono ancora una soluzione. Sono quindi giustificato, se mi ci trattengo più a lungo che non abbia fatto in altre parti.

In due Note precedenti trattai « delle vibrazioni sonore in rapporto con la conformazione dell'organo dell'udito nell'uomo » [3].

Questa volta porto un contributo raccolto nel dominio della musica, ove mi avvenne di trovare parecchi fatti che mi sembrano usufruibili dalla fisiologia dell'udito.

In un lavoro preparatorio, diviso in due parti ed esposto in forma piana per i medici, ho già disposto ed ordinato il materiale armonico, affinchè possa essere esaminato in quella direzione [4]. Gli accordi musicali, mediante procedimenti analitico-geometrici, vi sono disposti sotto una forma dalla quale appare la relazione che hanno le loro immagini coll'ordine di localizzazione dei suoni entro la chiocciola umana. Ora ne do conto in sede matematica.

Nelle costruzioni grafiche, di cui adduco qualche esempio nelle unite figure, sono prese come ordinate le altezze, in direzione degli acuti, dei suoni che compongono gli accordi; come ascissa il tempo, la durata *musicale* dei suoni, durante la quale le note sono tenute. Gli accordi sono arpeggiati [5]. È tirata una congiungente la sommità delle ordinate, delle altezze cioè dei tre suoni.

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Terapia fisica della R. Università di Bologna.

[2] Pervenuta all'Accademia il 14 agosto 1918.

[3] Questi Rendiconti, Nota I. vol. XXV, ser. 5ª, 1° sem., fasc. 11°, 1916; Nota II, vol. XXV, ser. 5ª, 1° sem., fasc. 12°, 1916.

[4] S. Salaghi, *Notazione fisiologica delle armonie*, Bullettino delle scienze mediche, 1916, n. 12; Id. *Le armonie nella musica odierna*, ibid., 1917, nn. 7 e 8.

[5] Gli accordi da sottoporre alla analisi sono spogliati delle parti intermedie e

Seguendo nell'insieme degli accordi il decorso di questa congiungente, si nota che da principio essa è rettilinea, poi va gradatamente sempre più incurvandosi nella sua parte superiore. Dà origine ad archi di conica in ordine progressivo di schiacciamento: rami di iperbole, quindi parabola ed infine ellisse [1]. Al limite, col sovrapporsi della parte destra e sinistra della conica, termina in un segmento rettilineo, che è visibile nel disegno schematico indicante lo schiacciamento progressivo delle coniche (fig. 5).

Per la determinazione di conica in generale, ai tre punti dati dalle altezze dei suoni si aggiungono i loro punti simmetrici rispetto all'asse delle ascisse. Mediante un procedimento grafico si trova un sesto punto, il quale serve per la determinazione del centro, e rispettivamente del genere della conica.

Quanto alle ascisse, se ne calcola la lunghezza $a$ colla formula

$$a = 1.68\, d\,,$$

ove $d$ è la differenza tra le due ordinate non nulle: formula trovata con procedimento di analisi. Nell'insieme degli accordi la differenza $d$ scende da 2 a 0, l'ascissa da 2 (1.68) a 0. Al diminuire di $d$, diminuisce la lunghezza $a$ dell'ascissa (tempo), cresce l'incurvamento della estremità superiore dell'arco, e dal lato sperimentale acustico si fa più aspro l'accordo. Si fa più aspro, ma dura meno. Va acquistando sempre più il carattere di accordo di moto.

---

ridotti a tre parti principali che loro imprimono una fisionomia propria, e ciò conforme alla numerica usata nei partimenti. Conservata vi è sempre la nota fondamentale e quella più acuta la quale indica la classe dell'accordo. Omessi sono preferibilmente i primi armonici dei suoni conservati, perchè già naturalmente risuonano nell'accordo.

Negli accordi, per tal guisa spogliati, per mezzo di piccole operazioni complementari in gran parte aritmetiche, si giunge ad esprimere la differenza nell'altezza dei suoni in una forma di uso pratico. Ne vien fuori da ultimo un numero che è distintivo per ciascun accordo, e che rappresenta l'altezza del suono di mezzo in rapporto agli altri due tenuti fermi. Queste cose sono descritte in modo particolareggiato in una Memoria, che pubblico a parte per i musicisti, col titolo: *Un problema di acustica fisiologica risoluto musicalmente* (Rivista musicale italiana, 1918).

[1] Riguardo all'effetto acustico degli accordi analizzati, copiose ricerche eseguite nel campo musicale hanno mostrato che l'azione armonica degli accordi procede in modo corrispondente al decorso del tracciato nelle costruzioni grafiche. Fu verificato tanto nella musica tradizionale, quanto nella più complessa arte odierna. Ne riferii nelle due citate pubblicazioni di volgarizzazione per i medici, ed ora ne tratto più ampiamente nel lavoro diretto ai musicisti.

Quando nelle grafiche la congiungente la sommità delle altezze è una linea retta, la consonanza tra i suoni è piena. V'è però una condizione, ed è che i suoni non siano troppo ravvicinati di intonazione, nel qual caso si disturberebbero a vicenda nella loro sede cocleare, con effetto di asprezza. Se la congiungente descrive un arco di curva, comincia subito ad avvertirsi dissonanza, la quale poi va intensificandosi di pari passo col grado d'incurvamento della parte superiore dell'arco.

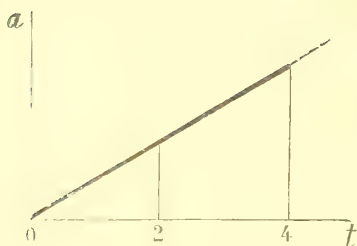



**Fig. 1.** — Immagine grafica dell'accordo perfetto maggiore secondo la frequenza delle vibrazioni nei tre suoni che lo compongono. 0, 2, 4 altezze dei tre suoni dell'accordo.
La congiungente la sommità delle altezze è una linea retta.

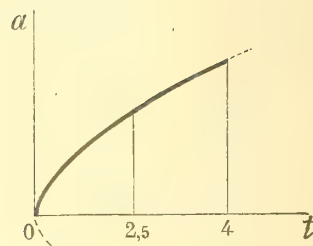



**Fig. 2.** — 0 , 2.5 , 4 altezze dei tre suoni che compongono l'accordo di settima dimin.ª. La congiungente la sommità delle altezze dei suoni è un arco d'iperbole.

**Fig. 3.** — 0 , 3 , 4 altezze dei suoni che compongono l'accordo di 11ª, o ritardo di quarta: ($\frac{5}{4}$). La congiungente la sommità delle altezze è un arco di ellisse poco schiacciata.

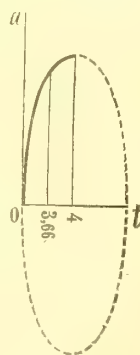



**Fig. 4.** — 0, 3.66 , 4 altezze dei suoni che compongono l'accordo di 9ª di sopratonica nella scala maggiore.
La congiungente la sommità delle altezze è un arco di ellisse molto schiacciata.

**Fig. 5.** — Disegno schematico indicante lo schiacciamento progressivo delle coniche secondo i risultati delle presenti ricerche. *R* retta; $I$, $I_1$ iperboli (1); *P* parabola; $E$, $E_1$, $E_2$, $E_3$ ellissi in ordine graduale di schiacciamento.

(1) Le iperboli della figura 5 non si hanno a ritenere simmetriche rispetto alla retta che contiene il segmento punteggiato $E_3$.

Zoologia. — *Nuovo contributo alla conoscenza dello sviluppo larvale di Stomias boa* Risso [1]. Nota di LUIGI SANZO, presentata dal Socio B. GRASSI [2].

Dello sviluppo larvale di questa specie nulla era conosciuto precedentemente alla mia Nota [3] del 1912, nella quale venivo a far conoscere una larva di mm. 41,63 caratteristica per la presenza di un'ancor ampia pinna primordiale sul profilo dorsale, e l'abbozzo di una serie di organi luminosi, corrispondente nell'adulto alla serie più vicina alla linea mediano-ventrale.

In seguito alla mia prima Nota potei, annualmente, rinvenire nelle acque di questo Stretto, un rilevante numero di altri stadî larvali, accennati, in parte, nel Convegno della Unione Zoologica italiana in Palermo [3] del 1914, su cui mi è possibile stabilire, per questa specie:

*a*) un periodo d'accrescimento larvale;

*b*) un periodo di riduzione a cui segue

*c*) la ripresa d'accrescimento dell'animale fino alle sue definitive caratteristiche.

PERIODO D'ACCRESCIMENTO LARVALE. — Le forme appartenenti al primo periodo, pervengono, almeno secondo i dati offerti dal mio materiale, fino alla lunghezza di 50 mm., nel quale stato si notano gli abbozzi degli organi luminosi, privi di pigmento e distinguibili in trasparenza per differente refrazione dei tessuti circostanti.

Stadî con organi luminosi dimostranti un'incipiente pigmentazione misurano in lunghezza sui 46 mm. e da essi si può, col diminuire della lunghezza, seguire, per contro, il progressivo affermarsi dei caratteri verso i giovanissimi *Stomias*.

Tali primi stadî di riduzione larvale non sono per questa specie così infrequenti come per molte specie di Scopelidi, nelle quali con la comparsa degli organi luminosi si accoppia una fortissima riduzione in percentuale di individui pescabili in superficie qui nello Stretto. D'altra parte i caratteri di collegamento fra gli stadî più lunghi da me trovati della serie di accrescimento e di quella in riduzione sono così vicini che si può, con molto grado di sicurezza, ritenere che essi stiano al culmine di passaggio dallo sviluppo larvale a quello semilarvale.

[1] Dall'Istituto centrale di Biologia marina in Messina, del R. Comitato talassografico italiano.

[2] Pervenuta all'Accademia il 19 luglio 1918.

[3] L. Sanzo, *Larva di Stomias boa Risso*, Memoria X del R. Comitato Talassografico italiano, 1912; Idem, *Notizie ittiologiche*. II: *Stadî larvali di Stomias boa Risso*, Monitore Zoologico Italiano, Anno XXVI, n. 5-6, pag. 132.

Tali larve ho potuto pescare viventi alla superficie delle acque di questo Stretto: sono trasparentissime come i Leptocefali e si muovono, come questi, con movimenti serpentiniformi.

*Larva di mm. 15,6* (fig. 1). — La più piccola larva da me posseduta misura mm. 15,6. È trasparentissima, molto allungata e schiacciata lateralmente.

Capo piegato in basso ad angolo sulla direzione del corpo; occhi piccoli, ellittici, con riflessi argenteo-dorati; mascella superiore guarnita di piccoli denti; archi branchiali ben distanziati tra loro nel senso antero-posteriore. Persiste dorsalmente un largo lembo di pinna primordiale che anteriormente s'inizia poco addietro del cingolo toracico e va indietro gradatamente aumentando in altezza fino a raggiungere, quasi a metà del corpo, ad oltrepassare quella del tronco.

Sia dorsalmente che ventralmente la pinna primordiale subisce, poco avanti dell'estremo del tronco, un discreto restringimento, dietro al quale sta il lembo di pinna caudale, finamente striato, ed immediatamente in avanti gli abbozzi dei portaraggi della dorsale e dell'anale, le quali ripetono a questo stadio larvale, la posizione affatto posteriore che esse hanno nell'adulto.

Gli abbozzi dei portaraggi non sono ancora al numero completo: 15 quelli della pinna anale e 12 quelli della dorsale. L'estremo del tronco si termina ancora diritto all'indietro senza alcun accenno a rialzarsi dorsalmente.

Sono presenti dei pezzi ipurali.

Le pettorali sono ancora membranose con impianto vicinissimo alla sinfisi del cingolo toracico.

Manca qualsiasi accenno alle ventrali.

Nel tronco si contano 78 segmenti, 64 addominali e 14 caudali.

Dei piccoli cromatofori in nero si mostrano distribuiti vicino al profilo dorsale e ventrale del tronco, sul capo, sopra un tratto anteriore dell'intestino e corrispondentemente alla sua porzione terminale. Cromatofori più piccoli, ma più numerosi, si riscontrano sulla pinna primordiale che circonda la parte caudale del tronco.

L'intestino corre diritto all'indietro con sbocco del tutto posteriore: ai $^7/_8$ quasi della lunghezza totale del

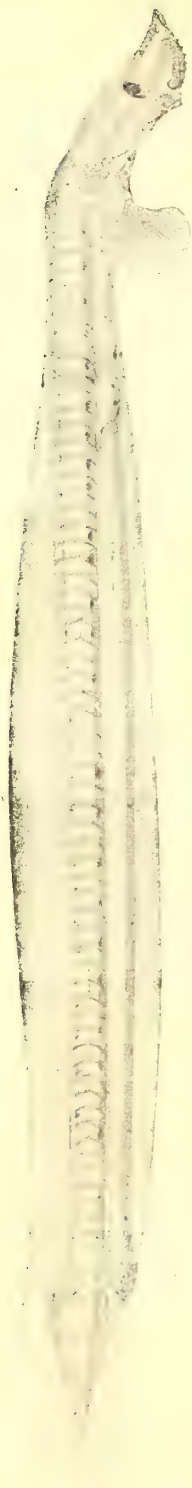



Fig. 1.

corpo. Il tratto terminale è contrassegnato da quello medio da una ben distinta plica valvolare.

*Larva di mm. 21.* — È formato l'urostilo ed il numero definitivo dei grandi raggi della pinna caudale, oltre 3-4 piccoli raggi tanto dorsalmente quanto ventralmente. Il margine posteriore di questa pinna è leggermente incavato; il lobo superiore risulta meno sviluppato del lobo inferiore. Sono presenti 14 raggi alla dorsale ed altrettanti alla pinna anale. Le due pinne risultano vicinissime alla caudale.

Persiste il lembo dorsale di pinna primordiale.

Sulle tre pinne, nel loro margine più distale, del pigmento puntiforme. Sul tronco ed al capo analogo pigmento che nella larva precedente; al tronco è però meno appariscente.

Segmenti 78.

*Larva di mm. 28.* — Sono già comparse le ventrali, piccolissime. Le pettorali sono tuttavia membranose. Sulla caudale, dorsale ed anale il pigmento puntiforme si è maggiormente diffuso verso la base.

Sul capo è leggermente aumentato il numero dei cromatofori. La primordiale dorsale si mantiene ampia, posteriormente in continuazione colla pinna dorsale.

*Larva di mm. 33,5.* — Permangono gli stessi caratteri che nella larva precedente. Alla pinna anale il numero dei raggi è salito a 16.

*Larva di mm. 39,40.* — Corrispondentemente tra il profilo ventrale del tronco e quello dorsale dell'intestino è comparso una serie d'abbozzi di fotofori non ancora pigmentati e distinguibili in trasparenza, anche ad occhio nudo, perchè più rifrangenti. Questa serie corrisponde a quella più ventralmente posta delle due definitive dell'adulto.

Si contano, con l'aiuto d'una loupe 43 abbozzi in avanti ed 11 dietro delle ventrali. Sono disposti segmentalmente. Permangono i caratteri pigmentari alla caudale, dorsale, anale e sul capo. Il pigmento del tronco è divenuto ancora meno evidente. Persiste l'ampia pinna primordiale dorsale tuttora in continuazione con la dorsale. Questa pinna ha 15 raggi, 17 l'anale.

*Larva di mm. 44,30.* — È aumentato il numero degli abbozzi di fotofori della serie ventrale: 47 tra le ventrali e le pettorali, 14 tra le ventrali e la pinna anale, 11 lungo la base di questa pinna. Alla caudale il lobo inferiore s'è relativamente più sviluppato che il lobo superiore. La dorsale, anteriormente ancora connessa con la primordiale, presenta 18 raggi, la anale 17; le pettorali e le ventrali tuttavia membranose.

*Larva di mm. 48.* — È il massimo d'accrescimento larvale. Vivente la larva misurava circa 50 mm. La serie degli abbozzi ha raggiunto il numero definitivo di fotofori che si trovano nella sua estensione: 48 fra il cinto toracico e le ventrali, 14 tra le ventrali e l'anale, 9 alla base della pinna anale e 2 indietro. Le ventrali sono tuttavia piccolissime e così anche le pettorali; entrambe membranose.

Periodo di riduzione larvale. — S' inizia da stadî larvali intorno ai 50 mm., ed è caratterizzato dalla comparsa di fotofori della 2ª serie vicino e sopra alla prima serie ventrale. Tali fotofori sono più piccoli dei primi, privi di pigmento e visibili in trasparenza per diversa rifrazione dei tessuti circostanti. Il grado di riduzione è in questa specie assai rilevante. Io ho potuto avere stadî semilarvali fino ai mm. 32,30. Non è improbabile che la riduzione proceda anche sotto ai 30 mm.

*Semilarva di mm. 45.* — È già comparsa la 2ª serie ventrale di organi luminosi; sono evidenti dei fotofori dall' istmo alla sinfisi toracica, e 12 sulla membrana branchiostegale. Dal cinto toracico alle ventrali la nuova serie conta 49 fotofori corrispondenti uno per uno a ciascuno della serie ventrale che ha 48 fotofori. Solo il primo della serie non ha corrispondente. Dalle ventrali indietro seguono in fila altri 12 fotofori. I fotofori della serie ventrale prima apparsa mostrano del pigmento nella porzione superiore del loro contorno. Il capo è divenuto più massiccio e meno inclinato sull'asse del corpo. Persiste la pinna primordiale dorsale ancora in continuazione con la pinna dorsale. Pettorali e ventrali tuttavia membranose. Persistono i caratteri pigmentari della larva precedente.

*Semilarva di mm. 41,5.* — Il tronco è divenuto alto e più spesso; i fotofori della serie più ventrale sono distintamente pigmentati nella loro porzione dorsali; quelli della serie soprastante sono ancora privi di pigmento. Pigmentazione del corpo invariata; persiste ancora il lembo dorsale di pinna primordiale; ventrali e pettorali ancora membranose.

Stadî in accrescimento giovanile. *Stadio di mm. 32,30* (fig. 2). — È molto probabile, dati i caratteri dell'esemplare, che esso rappresenti uno stadio in accrescimento, e che la riduzione larvale vada, come si disse, sotto ai 30 mm.

Fig. 2.

Il corpo è semitrasparente, il capo diritto sulla direzione del corpo; occhio rotondo con riflessi argenteo-dorati. Le due serie ventrali di fotofori brillano dei medesimi riflessi che l'occhio. È presente e bene sviluppato il barbiglio con tre piccole appendici terminali; le ventrali, discretamente sviluppate, presentano cinque raggi; le pettorali piccolissime con cinque raggi.

Lungo la zona mediana-laterale del tronco è comparsa una fine punteggiatura, la quale si estende in ogni segmento tanto dorsalmente che ventralmente. Non è più distinguibile la pigmentazione delle tre pinne: dorsale, caudale, anale.

È comparso qualche dente alle due mascelle. La pinna primordiale si è molto ridotta da avanti indietro; resta, posteriormente, ancora connessa con la pinna dorsale.

È fortemente diminuita l'altezza addominale.

Di nuovi fotofori sono comparsi:

un f. sott'orbitario;

due f. preopercolari;

un f. opercolare.

Il numero dei f. branchiostegali risulta di 16.

Mancano a comparire i piccoli fotofori disposti in serie longitudinale ai lati del tronco. Essi si riscontrano allo:

*Stadio di mm. 37,5.* — Ancora alquanto trasparente. I caratteri dentarî si avvicinano a quelli definitivi della specie. Sul tronco e sul capo si è largamente diffusa una pigmentazione puntiforme; e sono comparsi sul tronco dei piccoli fotofori pigmentati disposti in serie longitudinale, dal cinto toracico all'estremo del tronco caudale, le quali ripetono il dispositivo che hanno nell'adulto.

Al completo sono gli organi dall'istmo alle pettorali e quelli branchiostegali.

Nello sviluppo adunque di questa specie si ha:

Un periodo d'accrescimento larvale che arriva intorno ai 50 mm.;

un periodo di rilevante riduzione in lunghezza per lo meno fino ai mm. 32;

accrescimento giovanile dell'animale.

Degli organi luminosi

prima a comparire è la serie inferiore delle due ventrali per lato dell'adulto. Essa compare in larve in accrescimento, sui mm. 40, e si mantiene priva di pigmento fino al massimo d'accrescimento larvale;

segue la seconda serie ventrale vicino e sopra alla precedente. Compare all'inizio di riduzione larvale. Per la piccolezza e mancanza di pigmento degli elementi la serie non è facilmente distinguibile al principio del periodo riduttivo. Vi si riesce facendo dell'animale dei preparati microscopici in toto. Ho potuto così assodare la presenza di questa 2ª serie anche nella semilarva da me descritta nel 1912 e nella quale era data solo la serie più ventrale con fotofori pigmentati;

ultime ad apparire sono le serie di piccoli fotofori sul tronco. Non lo sono nello stadio descritto di mm. 32,30, in cui le due serie ventrali brillano già di riflessi argenteo-dorati.

La larva di mm. 44,5 descritta da Senna [1] non può, evidentemente, per la presenza di un'unica serie ventrale di fotofori pigmentati e di caratteri vicinissimi a quelli di larve in incipiente riduzione, essere assegnata all'inizio del normale accrescimento che ha luogo, come risulta dal mio materiale, in stadî assai ridotti per lo meno intorno ai 32 mm. Tenendo conto dell'accorciamento che le larve di questa specie subiscono al momento di fissazione, e in tanto maggior grado per quanto più vicine sono ai naturali fenomeni di riduzione, nonchè di quello a cui le stesse larve vanno soggette in un lungo periodo di conservazione, quale quello della larva descritta da Senna, la larva medesima deve ritenersi allo stato di incipiente riduzione ed interporsi fra lo stadio di mm. 48 e quello di 45 ora descritti.

Gli organi che l'autore riscontrò nella larva in esame, al vertice dei miomeri caudali ed interpetrò senz'altro come piccoli fotofori, rispondenti a quelli dell'adulto lungo la linea laterale, incorrendo, per ciò stesso, nell'errore di assegnare la larva all'inizio del normale accrescimento, sono verosimilmente gli organi proprî della linea laterale nella modalità che mi risultano nello sviluppo di altri Scopelini.

[1] A. Senna, *Note ittiologiche.* II: *Stadî larvali di Stomias boa* (*Risso*). Monitore Zoologico Italiano, 1917, n. 12, pag. 188.

E. M.

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

### Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

---

## MEMORIE E NOTE
## DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

*pervenute all'Accademia durante le ferie del 1918.*

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo)

---

### Astronomia fisica. — *Sull'estinzione della luce stellare nell'atmosfera di Roma.* Nota di G. Armellini, presentata dal Corrispondente A. Di Legge [1].

1. Espongo in questa Nota i risultati di molte osservazioni che io ho eseguito alla Specola della R. Università sul Campidoglio, onde determinare l'assorbimento atmosferico: altre osservazioni furono fatte dall'egr. prof. F. Giacomelli ed io spero che questo illustre astronomo voglia presto discuterle e pubblicarle. Inutile aggiungere che qui pubblico soltanto le mie.

2. Nel presente lavoro mi sono servito di un eccellente equatoriale Merz, a cui applicavo un fotometro estintore di Toepfer. La prima cosa da determinare era la *costante* K *del fotometro*, cioè il suo potere estintore — misurato in grandezze stellari — corrispondente ad una divisione della scala.

A tale scopo ho utilizzato coppie di stelle soddisfacenti alle seguenti condizioni:

1) grande differenza di splendore;

2) identità, o almeno, debole diversità di colore;

3) prossimità delle due stelle.

Di queste tre condizioni, che è difficile realizzare simultaneamente, io credo che la più importante sia la prima. L'esperienza infatti mi ha dimostrato che è assai difficile determinare esattamente il punto di estinzione:

(1) Pervenuta all'Accademia il 21 agosto 1918.

adoperando quindi stelle di splendore molto diverso, il piccolo errore commesso va distribuito in un gran numero di divisioni e diviene insensibile.

Nella seguente tabella I[a], in cui riporto le mie osservazioni, la seconda colonna dà la coppia esaminata, la terza il colore, la quarta la differenza $\Delta G$ di splendore delle due stelle, secondo la *Phot. Durch.*; la quinta la differenza $\Delta L$ delle due letture al fotometro, la sesta la costante K — ottenuta dividendo $\Delta G$ per $\Delta L$ — la settima infine dà il numero N di osservazioni, da cui dipende ciascuna misura. Solo per alcune stelle, mancanti nella *Phot. Durch.*, ho ricorso al Catalogo generale dell'*Astron. Gesell.*

TABELLA I.

| DATA | Coppia | Colore | $\Delta G$ | $\Delta L$ | K | N | DATA | Coppia | Colore | $\Delta G$ | $\Delta L$ | K | N |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1917 9 maggio | 1 | WG ; GW | 6,02 | 32,85 | 0,183 | 8 | 1917 16 agosto | 5 | GW— ; GW— | 5,45 | 28,77 | 0,189 | 10 |
| 13 » | 2 | GW— ; GW | 2,10 | 11.68 | 0,179 | 12 | 17 » | » | » » | » | 29,76 | 0,183 | » |
| » » | 3 | » » | 5,62 | 31.19 | 0,180 | 10 | » » | » | » » | » | 28,40 | 0,192 | » |
| 14 » | » | » » | » | 28,40 | 0,197 | 10 | 18 » | » | » » | » | 28,82 | 0,189 | » |
| » » | 1 | WG ; GW | 6,02 | 29,80 | 0,202 | 8 | 21 » | » | » » | » | 30,46 | 0,179 | » |
| 15 » | 2 | GW— ; GW | 2,10 | 12,23 | 0,172 | 6 | » » | » | » » | » | 29,66 | 0,183 | » |
| » » | 3 | » » | 5,62 | 29,85 | 0,188 | 6 | 28 » | 1 | WG ; GW | 6,02 | 33,44 | 0,180 | » |
| 16 » | » | » » | » | 28,76 | 0,195 | 10 | » » | 6 | WG— ; WG | 7,57 | 43,18 | 0,175 | » |
| 28 luglio | 4 | GW ; GW | 1,81 | 9,40 | 0,194 | 10 | 30 » | 1 | WG ; GW | 6,02 | 35.28 | 0.175 | » |
| 3 agosto | 1 | WG ; GW | 6.02 | 31,35 | 0,192 | 16 | » » | 7 | W ; W | 6,92 | 38,74 | 0,178 | » |
| 8 » | » | » » | » | 34,06 | 0,177 | 10 | 31 » | 1 | WG ; GW | 6,02 | 33.02 | 0,182 | » |
| » » | » | » » | » | 33,14 | 0,181 | 10 | » » | 8 | WG— ; GW | 6,63 | 34,23 | 0,193 | » |
| » » | 3 | GW— ; GW | 5,62 | 29.90 | 0,188 | 10 | 1 settem. | 1 | WG ; GW | 6,02 | 34.42 | 0,175 | » |
| 9 » | 1 | WG ; GW | 6,02 | 33,12 | 0.181 | 10 | 12 ottob. | 9 | G+ ; G+ | 2.84 | 15,88 | 0,179 | » |
| » » | » | » » | » | 33,20 | 0,181 | 10 | 18 » | » | » » | » | 14,78 | 0,193 | » |
| » » | 3 | GW— ; GW | 5,62 | 31,28 | 0,179 | 10 | 1918 | | | | | | » |
| 10 » | 5 | GW— ; GW— | 5,45 | 30,54 | 0,178 | 10 | 12 agosto | 10 | GW— ; WG | 2,70 | 14,44 | 0,187 | » |
| 11 » | » | » » | » | 27.69 | 0,197 | 10 | 21 » | » | » » | » | 14,30 | 0,188 | » |
| 12 » | » | » » | » | 29,58 | 0,184 | 10 | | | | | | | |

1 = $\alpha$ Bootis; 7658 PD  5 = $\alpha$ Aquilae; 11037 PD  8 = $\alpha$ Aurigae; 3167 PD
2 = $\zeta$ Ursae Maior. g Urs. Maior  6 = $\alpha$ Aurigae; 4282 AG  9 = $\beta$ Urs. min.; $\vartheta$ Urs. min.
3 = $\zeta$ Urs. Maior; 7559 A. G  7 = $\alpha$ Lyrae; 9974 PD  10 = $\alpha$ Aquilae; $\beta$ Aquilae
4 = 12221 PD; 12202 PD

Un secondo metodo di determinare la costante K può consistere nel misurare due volte lo splendore di una stessa stella, prima ad obiettivo libero, poi con obiettivo parzialmente coperto mediante un diaframma forato. Sussistono però alcune cause perturbatrici, sulle quali la brevità dello spazio non mi permette d'insistere; onde io ho limitato questo metodo a poche

osservazioni e, più che altro, a scopo di controllo. Poichè col diaframma il diametro dell'obiettivo veniva ridotto da 117 a 60 mm., ne risultava, applicando note leggi fotometriche, che lo splendore della stella osservata diminuiva di grandezze 1,45. Ciò posto, riporto le mie osservazioni nella seguente

TABELLA II.

| DATA | Stella | Colore | $\Delta L$ | K | N | DATA | Stella | Colore | $\Delta L$ | K | N |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1917<br>22 agosto | α Coronae | W | 7,44 | 0,195 | 10 | 1918<br>9 agosto | α Persei | GW+ | 7.20 | 0,201 | 10 |
| 23 » | α Androm. | W | 8,28 | 0,175 | » | 13 » | β Aquilae | WG | 8,18 | 0,177 | » |
| » » | α Aquilae | GW— | 7,76 | 0.187 | » | » » | Nova Aquil. | G | 8,12 | 0,179 | » |
| » » | α Androm. | W | 7.82 | 0,185 | » | | | | | | |
| » » | α Bootis | WG | 7,24 | 0,200 | » | | | | | | |

Da tutte queste osservazioni risulta come valore medio

$$K = 0,186 .$$

4. Eseguito questo lavoro preliminare, ho proceduto alla ricerca dell'estinzione atmosferica a Roma determinando la differenza di splendore di uno stesso astro a diverse distanze zenitali. Nelle seguenti tabelle $Z_1$ e $Z_2$ indicano le due distanze zenitali, corrette dalla rifrazione, dell'astro studiato nel momento della prima e della seconda osservazione; la quinta colonna dà la differenza di splendore $\Delta G$, la sesta il rapporto di estinzione tra Roma e Potsdam $\varrho = \frac{\text{estinz. a Roma}}{\text{estinz. a Potsdam}}$, dove il denominatore è tratto dalla nota tavola del Müller, l'ultima infine dà il numero N delle osservazioni da me eseguite per ogni misura.

TABELLA III.

*Estinzione atmosferica ad oriente.*

| DATA | Stella | $Z_1$ | $Z_2$ | $\Delta G$ | $\varrho$ | N | DATA | Stella | $Z_1$ | $Z_2$ | $\Delta G$ | $\varrho$ | N |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1917<br>15 giugno | α Aquilae | 72°,6 | 35°,3 | 1,01 | 2,03 | 10 | 1917<br>12 ottobre | α Aurigae | 78°,1 | 69°,8 | 0.95 | 2,31 | 10 |
| 16 » | » » | 69,3 | 36,7 | 1,04 | 2,70 | » | 18 » | » » | 78,8 | 69,2 | 0,87 | 1,89 | » |
| » » | β Capric. | 74,5 | 59,5 | 0,94 | 2,29 | » | 1918 | | | | | | |
| 12 luglio | α Aquari | 80,7 | 50,0 | 1,85 | 1,98 | » | 5 agosto | α Androm. | 64,2 | 38,9 | 0,63 | 2,62 | » |
| 14 » | » » | 78,6 | 56,5 | 1,30 | 1,93 | 6 | 8 » | » » | 64,4 | 36,3 | 0,64 | 2,46 | » |
| 16 » | α Pegasi | 76,7 | 48,5 | 1,66 | 2,63 | 8 | » » | α Persei | 76,2 | 62,1 | 0,71 | 1,61 | 6 |
| 21 » | α Aquari | 68,6 | 49,0 | 0,503 | 1,68 | 10 | 9 » | α Aurigae | 84,0 | 78,1 | 1,29 | 1,95 | 10 |
| 22 » | » » | 64,3 | 47,3 | 0,38 | 1,76 | 8 | » » | α Persei | 74,1 | 56,9 | 0,66 | 1,57 | » |
| » » | α Pegasi | 65,2 | 37,1 | 0,47 | 1,79 | » | 12 » | » » | 73,6 | 57,8 | 0,64 | 1,68 | » |
| 24 agosto | α Aurigae | 81,5 | 68,2 | 1,21 | 1,68 | 6 | 17 » | » » | 72,5 | 52,9 | 0.80 | 2,05 | » |
| » » | α Persei | 67,9 | 45,8 | 0,799 | 2,66 | 8 | » » | α Aurigae | 84,0 | 74,2 | 1,62 | 1,84 | » |
| 31 » | α Aurigae | 78,9 | 69,6 | 0,87 | 1,89 | » | | | | | | | |

TABELLA IV.

*Estinzione atmosferica ad occidente.*

| DATA | Stella | $Z_1$ | $Z_2$ | $\Delta G$ | $\varrho$ | N | DATA | Stella | $Z_1$ | $Z_2$ | $\Delta G$ | $\varrho$ | N |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1917<br>15 giugno | α Leonis | 77°,1 | 83°,4 | 1,28 | 2,06 | 10 | 1917<br>12 agosto | α Bootis | 61°,0 | 82°,1 | 1,59 | 1.69 | 10 |
| » » | » » | 83.4 | 88,0 | 3,22 | 1,88 | » | 20 » | » » | 74,7 | 82,2 | 1,25 | 2,16 | » |
| 17 » | » » | 80,0 | 87,2 | 3,05 | 1,88 | 6 | 22 » | » » | 74,1 | 82,6 | 1.15 | 1,77 | » |
| 19 » | » » | 76,0 | 85,6 | 2,01 | 1,66 | 8 | 24 » | » » | 72,1 | 84,7 | 1,88 | 1.67 | » |
| » » | » » | 85.6 | 87,7 | 1,41 | 1,41 | » | 30 » | » » | 67,6 | 83,5 | 1,84 | 1,82 | » |
| 17 luglio | α Bootis | 60,5 | 82,6 | 1,80 | 1,76 | 6 | 1 settem. | » » | 73,1 | 81,6 | 1,35 | 2,37 | » |
| 18 » | β Leonis | 77,4 | 87,2 | 2,83 | 1,56 | 10 | 1918 | | | | | | |
| 20 » | » » | 81,7 | 87,4 | 2,28 | 1,44 | 8 | 31 luglio | » » | 60,2 | 78,1 | 1,21 | 2,02 | » |
| » » | α Bootis | 59,6 | 76,3 | 1,05 | 2,10 | » | 2 agosto | » » | 67,7 | 79,9 | 1,16 | 1,96 | » |
| 23 » | » » | 74,4 | 87,5 | 4,09 | 1,88 | » | 8 » | » » | 69,2 | 81,8 | 1,47 | 2,04 | » |
| 24 » | » » | 61,7 | 78,3 | 1,28 | 2,16 | 10 | | | | | | | |

Da tutte queste osservazioni risulta per l'estinzione media di Roma:

α) Lato orientale: $\varrho = 2{,}03$; β) Lato occidentale: $\varrho = 1{,}87$;
γ) Media generale: $\varrho = 1{,}96$.

5. Il valore di $\varrho$ ora determinato, mostra che l'atmosfera di Roma è notevolmente più trasparente di quella di altre città italiane. Abbiamo infatti per:

1) *Catania* [1] (A. Bemporad) $\varrho = 3$;
2) *Napoli* [2] (A. Bemporad) $\varrho = 2{,}5$;
3) *Napoli* [3] (E. Guerrieri) $\varrho = 2{,}38$;
4) *Padova* [4] (E. Padova) $\varrho = 2{,}34$.

Anzi il prof. E. Bianchi [5], osservando d'inverno e dalla parte di tramontana, dove il cielo di Roma è trasparentissimo, ottenne $\varrho = 1{,}02$. Io sono quindi condotto ad avanzare l'ipotesi che la trasparenza dell'atmosfera

[1] Cfr. A. Bemporad, *Ricerche sulla trasparenza atmosferica come risultato accessorio delle osservazioni di variabili*, Rivista di Astron. e Scienze affini, 1912, pag. 580.

[2] Cfr. A. Bemporad, *L'estinzione a Capodimonte*, Riv. citata, 1913, pag. 388.

[3] Cfr. E. Guerrieri, *Saggio di determinazione dell'estinzione atmosferica a Capodimonte*, Pubbl. dell'Osserv. di Capodimonte.

[4] Cfr. E. Padova, *Determinazione della estinzione atmosferica a Padova*, Atti del R. Istituto Veneto, tomo LXXIII.

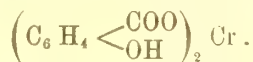
[5] Cfr. E. Bianchi, *Primo saggio sull'estinzione a Roma*, Mem. Spettroscopisti italiani, 1915.

di Roma non sia proporzionale a quella di Potsdam. Nelle regioni zenitali, studiate specialmente dal Bianchi, i due valori sarebbero presso a poco uguali, soprattutto nell'inverno e dal lato Nord; più in basso invece (forse a causa del pulviscolo urbano) l'estinzione a Roma è circa doppia della corrispondente di Potsdam, come mostrano la mie osservazioni. È questa una irregolarità notevolissima che sarebbe bene approfondire con nuovi studî.

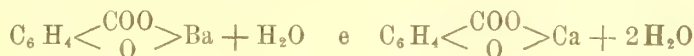
Ma intanto, prima di chiudere la presente, mi è grato inviare un fervido ringraziamento al chm̃o prof. A. Di Legge, direttore dell'Osservatorio, il quale ha posto a mia disposizione gli strumenti necessari per l'esecuzione del presente lavoro.

## Chimica. — *Sali organici del cromo bivalente.* Nota di G. Scagliarini [1], presentata dal Socio G. Ciamician [2].

G. Calcagni [3] trattando l'allume di cromo con salicilato sodico o potassico, oppure l'idrato cromico con acido salicilico, ottiene un sale di colore grigio-verde a cui attribuisce la formula seguente:

$$\left(C_6H_4<^{COO}_{OH}\right)_2 Cr .$$

L'autore ritiene che in tale composto il cromo si trovi allo stato bivalente nonostante sia partito da un composto cromico, basandosi sul fatto che nella reazione si separa acido salicilico e perchè ad ogni atomo di cromo corrispondono due molecole di acido salicilico.

Tuttavia, a mio vedere, deve trattarsi di un sale del cromo trivalente nel quale anche gli ossidrili fenici prendono parte alla salificazione. Questo fatto non rappresenta certamente una novità, poichè oltre i sali dei metalli alcalini se ne conoscono molti altri nei quali è salificato anche l'ossidrile fenico; ad esempio fra i salicilati dei metalli alcalino-terrosi quelli di bario e di calcio delle formule rispettive:

$$C_6H_4<^{COO}_{O}>Ba + H_2O \quad e \quad C_6H_4<^{COO}_{O}>Ca + 2H_2O$$

ed i sali di rame e di mercurio delle formule:

$$C_6H_4<^{COO}_{O}>Cu + H_2O \quad e \quad C_6H_4<^{COO}_{O}>Hg \; (^4).$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 10 agosto 1918.

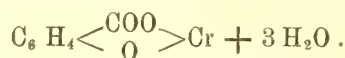
(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale della R. Univ. di Bologna.

(3) Questi Rendiconti (5), 22, II, pp. 157-162.

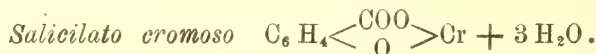
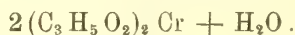
(4) Schmidt, Pharm. Ch., II, 1, pp. 1072-1073.

Inoltre nella formazione del supposto salicilato cromoso descritto dall'autore su ricordato non intervengono agenti riduttori tanto energici da portare il cromo da trivalente a bivalente, senza poi considerare che i sali cromosi di acidi organici fino ad ora conosciuti allo stato solido sono di colore rosso anzichè grigio-verdi.

Difatti il salicilato cromoso da me preparato è colorato in rosso ed è simile per aspetto agli altri sali cromosi. Si ottiene riducendo prima l'allume di cromo con zinco ed acido cloridrico e poscia versando il prodotto della riduzione in una soluzione di salicilato sodico; esso corrisponde alla formula:

$$C_6H_4<{}^{COO}_{O}>Cr + 3H_2O .$$

Analogamente ho preparato il propionato, il butirrato ed il valerianato cromoso colorati in rosso, dei quali però soltanto il primo fu sottoposto ad analisi essendo il più puro fra i tre sali. Esso ha la formula:

$$2(C_3H_5O_2)_2Cr + H_2O .$$

*Salicilato cromoso* $C_6H_4<{}^{COO}_{O}>Cr + 3H_2O$.

Si ottiene trattando una soluzione concentrata a caldo di allume di cromo con zinco ed acido cloridrico concentrato (circa un terzo della soluzione di allume) e poscia, quando il liquido ha assunto una decisa colorazione azzurra si versa in una soluzione acquosa satura a freddo di salicilato sodico precedentemente bollita per scacciare l'aria in essa contenuta. Si va separando in tal modo un precipitato costituito da piccoli cristalli rossi, i quali si conservano abbastanza bene finchè rimangono immersi nelle proprie acque madri, ma al contatto dell'aria si ossidano rapidamente assumendo una tinta grigio-verdastra.

Per cui ne è assai difficile la filtrazione e relativo essiccamento senza che parzialmente si alterino.

Per evitare per quanto è possibile tale inconveniente immaginai la seguente disposizione di apparecchio: uno dei soliti imbuti, applicato ad una bottiglia a vuoto, veniva ricoperto con una tazza capovolta stuccata all'orlo superiore dell'imbuto in maniera da non lasciare passare aria. Detta tazza presentava nel centro un'apertura chiusa da un tappo a due fori: in uno passava una squadra di vetro in comunicazione con una bombola ad azoto; nell'altro, assai più grande, un largo tubo pure di vetro congiunto, per mezzo di un pezzo di gomma provvisto di pinza, ad un imbuto che permetteva di introdurre a piacere il salicilato cromoso. In tale modo si poteva filtrare il salicilato cromoso senza che esso sensibilmente si modificasse. Il composto

poi lavato rapidamente con poca acqua bollita e fredda, giacchè è molto solubile, venne messo a seccare fuori del contatto dell'aria. Nonostante queste precauzioni, quando il sale venne sottoposto ad analisi nelle porzioni più esterne, era in parte alterato.

| Calcolato per $C_6H_4<^{COO}_{O}>Cr + 3H_2O$ | | Trovato | | |
|---|---|---|---|---|
| Cr | 21.52 | 21.45 | 21.42 | 21.46 |
| C | 34.71 | | 35.26 | |
| H | 4.13 | 4.68 | 4.40 | |

Non si potè determinare l'acqua di cristallizzazione giacchè il composto si altera col riscaldamento.

*Propionato cromoso* $2(C_3H_5O_2)_2Cr + H_2O$.

Si riduce il sale cromico a cromoso come si fece pel sale precedente e poscia si versa il prodotto della riduzione in una soluzione concentrata di propionato sodico in acqua bollita. Si ottiene rapidamente un precipitato microcristallino di colore rosso che venne filtrato usando tutte le precauzioni che si ebbero pel salicilato. Sottoposto ad analisi dette i risultati seguenti:

| Calcolato per $2(C_3H_5O_2)_2Cr + H_2O$ | | Trovato | | |
|---|---|---|---|---|
| Cr | 25.12 | 25.30 | 25.13 | 25.10 |
| C | 34.78 | 33.73 | 34.20 | |
| H | 5.43 | 5.30 | 5.18 | |

## Matematica applicata. — *Della volgarizzazione ed applicazione della fisica-matematica in medicina* [1]. Nota II del professore S. SALAGHI, presentata dal Socio S. PINCHERLE [2].

A riscontro del metodo di analisi geometrica delle armonie esposto nella Nota precedente, giova considerare come avviene l'impronta sensoriale delle armonie stesse nell'organo dell'udito.

Come questo sia composto fu già descritto sommariamente in un'altra Nota [3]. Adesso ne trascrivo in calce i particolari più importanti, e vi aggiungo alcune nozioni di fisiologia [4].

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Terapia fisica della R. Università di Bologna.

(2) Pervenuta all'Accademia il 14 agosto 1918.

(3) Questi Rendiconti, vol. XXV, serie 5ª, 1° sem., fasc. 11°, 1916.

(4) La chiocciola è costituita da un tubo osseo ritorto a forma di spirale, entro a

Dato l'ordine di propagazione dei suoni nel tramite cocleare, quale è descritto qui sotto in calce, è lecito di pensare che anche nella chiocciola umana intervengano rapporti spaziali di *simmetria* o di *sproporzione* nei livelli in cui si localizzano i suoni, analoghi a quelli osservati nelle costruzioni grafiche.

Sono appunto quei rapporti ai quali, dicemmo, corrispondono effettivamente in pratica, dal lato acustico, e possono essere ben valutati, gli effetti di consonanza o di dissonanza di vario grado: cosa verificata in tutti gli accordi autonomi fino ad ora usati.

Anche qui pertanto vi sarebbe *coincidenza* tra simmetria spaziale o di posizione e consonanza, tra sproporzione e dissonanza.

Da altri era stato vagamente accennato questo concetto di simmetria. Wundt, per es., citato da Donizelli [1], per ispiegare la consonanza e la costanza d'intervallo dei singoli accordi a qualunque altezza della gamma, avrebbe invocato una particolare facoltà dell'udito a confrontare tra loro i segmenti della linea tonale, e a disporli *simmetricamente*.

Noi qui abbiamo in certo modo fornito la prova obiettiva del fenomeno.

L'analisi geometrica delle armonie, intrapresa nella Nota precedente, ha fatto riconoscere in un accordo alcune particolarità che meritano di essere menzionate.

È l'accordo composto della quarta ($\frac{4}{3}$), quinta ($\frac{3}{2}$) e ottava (2), le quali rispetto alla frequenza delle vibrazioni dànno i rapporti più semplici e consonanti col primo grado della scala. Questi suoni facevano già parte della scala pitagorica. Erano conosciuti nella antichità sotto il nome di proporzioni

---

cui giace disteso, disposto a mo' di tastiera, l'organo periferico del senso. Due sono le spire che descrive il tubo, più v'è una frazione di spira. Il campo uditivo composto di circa dieci ottave, che vanno da 16 vibrazioni compl. fino a 20,000 al secondo, sta tutto entro quei confini.

Quanto al modo di distribuirsi dei suoni lungo il percorso del tubo cocleare, dalla base verso all'apice, si sa dalla fisiologia che i primi a localizzarvisi alla base sono gli acutissimi, poi a mano a mano seguono gli altri a livelli sempre crescenti, fino ai più gravi che trovano sede nell'ultimo tratto verso all'apice. La localizzazione procede dunque in verso contrario alla frequenza delle vibrazioni.

Nel caso di un accordo musicale, i suoni che lo compongono giungono pertanto a far sentire lo stimolo vibratorio a diverse altezze o livelli del tubo cocleare all'inverso della loro intonazione verso gli aiuti. Le altezze dei suoni quindi si disegnano *metricamente* lungo il percorso cocleare in modo analogo alle ordinate delle nostre costruzioni grafiche. Solo che lo fanno in ordine inverso ed in proporzioni ridotte. I suoni vi procedono dagli acuti ai gravi, laddove nelle costruzioni grafiche procedono dai gravi agli acuti.

[1] C. Donizelli, *Sulle funzioni della coclea. La spirale di Cartesio e la coclea organo aritmetico*. Bullettino delle scienze mediche, 1911, n. 4, pag. 249.

pitagoriche di *sesquitertia*, *sesquialtera* e *dupla*. Questo è già qualche cosa di singolare.

Dalle presenti ricerche analitiche è risultato che, anche associate insieme a formare accordo, le proporzioni pitagoriche conferiscono all'armonia qualità speciali, che la segnalano tra le altre armonie.

Questa armonia, detta di 11ª, o anche ritardo di quarta, ($\frac{5}{4}$), viene a travarsi proprio nel mezzo della graduatoria generale tanto con la sua ordinata media (3), quanto con la ascissa (1.68) o durata dei suoni [1]. Ha il numero distintivo non solo esatto (che sarebbe già un contrassegno di armoniosità), ma altresì intero: privilegio cui partecipa unicamente l'accordo perfetto maggiore [2].

## Zoologia. — *Sviluppo larvale di Chauliodus Sloani* Bl. [3]. Nota di Luigi Sanzo, presentata dal Socio B. Grassi [4].

Di *Chauliodus Sloani* feci, nel 1914, conoscere due stadi larvali; l'uno di mm. 33,60 e l'altro di mm. 41,63. In seguito ho potuto raccogliere un ricco materiale di sviluppo, ed in ottime condizioni; molti stadi ancora allo stato vivente; per il che mi riesce ora possibile ricostruire per questa specie le caratteristiche principali di sviluppo larvale.

Come nello sviluppo di *Stomias boa* anche qui possiamo distinguere:

I. Un periodo d'accrescimento larvale (stadi larvali).

II. Un periodo di riduzione larvale (stadi semilarvali).

III. Un periodo d'iniziale accrescimento normale (stadi giovanili).

### I. — Stadi larvali.

*Larva di mm. 12* (fig. 1). — È molto slanciata; la sua massima altezza misura 1 mm. sulla pinna primordiale caudale, e meno ancora in avanti sul resto del corpo; capo inclinato ad angolo ottuso sull'asse del tronco; muso appuntito con denticini alle due mascelle; occhio ovale rivolto

(1) Le ordinate medie, come si disse a suo luogo, nell'insieme degli accordi variano da 2 a 4, le ascisse da 2 (1.68) a 0.

(2) Effettivamente questo accordo va segnalato per la sua armoniosità. Quantunque dissonante torna piacevole all'orecchio qualora, s'intende, sia presentato colle debite norme. Varii esempi ne sono dati nella Memoria che ho scritto per i musicisti. Grazie a questa sua prerogativa, fino a poco tempo addietro era preferibilmente usato nelle cadenze, delle quali conferiva ad accrescere il carattere solenne.
italiano.

(3) Dall'Istituto di Biologia marina in Messina, del R. Comitato Talassografico

(4) Pervenuta all'Accademia il 14 agosto 1918.

leggermente in avanti; apertura anale del tutto posteriore, raggiungendo l'origine della pinna primordiale caudale, che è contraddistinta da due profonde insenature. una dorsale e l'altra ventrale della pinna primordiale. Il lembo dorsale della primordiale è, relativamente alla larva di *Stomias boa* e *Bathophylus nigerrimus*, assai meno sviluppato in altezza; poco o nulla sensibile al 3° anteriore del tronco va lievemente guadagnando in altezza fino a poco dietro il livello della valvola fra l'intestino medio e quello posteriore. Da qui degrada rapidamente verso il tronco per ripigliare nella primordiale caudale. Ventralmente un lembo preanale si sviluppa quasi simmetricamente al lembo dorsale.

All'estremo posteriore della corda un ispessimento ipocordale preannunzia vicina la formazione degli ipurali. Sono presenti le pettorali, piccolissime, membranose e lievemente peduncolate.

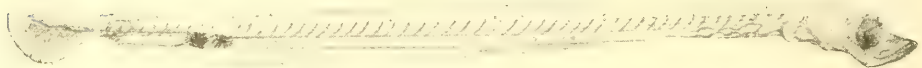



Fig. 1.

L'intestino corre diritto all'indietro, aprendosi ai 7/8, quasi, della lunghezza totale del corpo. In avanti alla valvola tra intestino medio e posteriore. corrispondono successivamente due cromatofori ramificati. Assenza di altro pigmento.

Conto 52 segmenti.

*Larva di mm. 14.* — La primordiale dorsale è alquanto più ridotta nella sua porzione anteriore, mentre posteriormente, immediatamente avanti l'insenatura che la distacca dalla caudale, è divenuta più alta preannunziando alla formazione dell'adiposa.

Sono formati i pezzi ipurali, l'estremo caudale non accenna ancora a rialzarsi. Fra l'ano e la caudale la plica cutanea offre un lieve rialzo ispessito alla base. Esso costituisce l'iniziale abbozzo della pinna anale, il quale progredisce lentissimamente durante l'accrescimento larvale. In stadi oltre 40 mm. sono formati solo i portaraggi della pinna. Assenza completa di pigmento.

Conto 57 segmenti.

*Larva di mm. 15,60.* — La noto-corda accenna a rialzarsi; dai pezzi ipurali si delineano dei raggi. Assenza completa di pigmento.

*Larva di mm. 20,80.* — La caudale è definitivamente formata; vi si contano 19 grandi raggi. Il lembo dorsale della pinna in avanti del rialzo, che rappresenta l'adiposa in abbozzo, è ridotta ad una listarella; e così anche il lembo ventrale in avanti del rialzo preanale. Le pettorali ancora

piccolissime e membranose; nessun abbozzo della pinna dorsale e della ventrale. Assenza di pigmento.

*Larva di mm. 26,50.* — In corrispondenza del 12-13 segmento compare sul profilo dorsale un lieve rialzo cutaneo, alquanto inspessito. Con esso s' inizia l'abbozzo della pinna dorsale. Contemporaneamente sono comparsi, 9 segmenti più indietro, piccolissimi abbozzi delle ventrali.

Le pettorali ancora piccolissime e membranose.

L'occhio tuttavia ovale, guarda ancora un po' in avanti.

Assenza di pigmento.

*Larva di mm. 30,20.* — Il rialzo d'abbozzo alla pinna dorsale si è leggermente accresciuto; è scomparso, da questo abbozzo fino al largo impianto della futura adiposa, la pinna primordiale. Si ripetono gli altri caratteri esterni della larva precedente.

*Larva di mm. 33,60.* — È abbozzato una piccolissima pinna dorsale con sei raggi di cui l'anteriore assai più sviluppato degli altri ai quali è connesso dalla membrana interradiale. Il numero dei raggi è quello definitivo e la forma accenna anche a quella dell'adulto.

Le ventrali, anch'esse piccolissime, mostrano gli abbozzi di 5 raggi.

Le pettorali ancora membranose si sono alquanto allungate in alto ed indietro superando il profilo dorsale del tronco.

Il margine posteriore della caudale, contenutosi, nella serie precedente, in una lievissima insenatura, è divenuto alquanto rientrante da determinare due ben distinti lobi.

*Larva di mm. 41,63* (fig. 2). — È la larva più sviluppata in lunghezza, che io abbia nel mio materale, e nella quale sono presenti due serie parallele di abbozzi di organi luminosi lungo e vicino al profilo ventrale del corpo. Non è improbabile che questo stadio sia preceduto da altri di maggior lunghezza e nei quali sia presente, come nello sviluppo di *Stomias boa*, una sola serie di abbozzi di fotofori. In questo caso la larva in esame rappresenterebbe uno stadio in riduzione. Gli organi luminosi in parola sono senza pigmento e visibili in trasparenza con l'aiuto di una lente a piccolo ingrandimento.

Quelli della serie superiore sono più piccoli di quelli della serie inferiore. Se ne contano:

Nella serie inferiore

17 sulla membrana branchiostegale,
 7 dall' istmo alla sinfisi pettorale,
22 dalla sinfisi delle pettorali alle ventrali,
32 dalle ventrali all'origine della pinna anale,
 4 dalla pinna anale all'estremo posteriore del tronco;

nella serie superiore

20 soprapettorali,
24 sopraventrali.

Dal cingolo toracico indietro si hanno adunque 58 fotofori e 44 nella serie superiore: dati che corrispondono a quelli riscontrabili nell'adulto. Ma se, anzichè il numero complessivo di ciascuna delle due fila di organi, si esamina partitamente quello delle serie omonime nelle due file, la coincidenza viene a mancare per la serie ventrale ed anale. La serie ventrale offre 32 abbozzi di fronte a 25-26 dell'adulto; per contro quella anale presenta 6 fotofori in meno che nell'adulto, dove se ne contano 10-11. Il giuoco di questa discordanza di dati tra uno stadio larvale e l'adulto è sostenuto dalla migrazione dell'ano e della pinna anale, già avvenuta in stadi larvali in riduzione, quale quello di mm. 37 più sotto descritto.

L'occhio è divenuto meno ellittico, guarda ancora leggermente in avanti.

Le pettorali ancora piccole e membranose.

Le ventrali sono relativamente più sviluppate, contano 7 raggi che è il numero definitivo.

Il primo raggio della dorsale è relativamente più sviluppato connesso ancora mediante la membrana interradiale al rimanente della pinna. L'adiposa ha una larga base di impianto.

Nella pinna anale si notano gli abbozzi ad 11 raggi. La pinna si mostra incuneata tra l'apertura anale, che ha alquanto migrato in avanti, e gl'ipurali della caudale.

Assenza di pigmento.

### Stadi larvali in riduzione.

Mentre numeroso è il numero degli stadi larvali in accrescimento potuti pescare, scarsissimo è quello degli stadi in riduzione. Coi fenomeni riduttivi e susseguente aumento di peso specifico, l'animale non si pesca più in superficie. La riduzione in grandezza è in questa specie molto rilevante. Io ho nel mio materiale uno stadio semilarvale di mm. 37 (fig. 3) ed inoltre uno stadio giovanile di mm. 34,80 (fig. 4) i cui caratteri assai in distacco dalla semilarva di 37 mm. fanno ammettere che essa non si trovi sulla linea di discesa della riduzione larvale, o al termine di essa; ma in quello d'ascesa dell'accrescimento giovanile.

Ed invero Lo Bianco ([1]) riferisce che furono pescati nel golfo di Napoli dal « Maia » e dal « Puritan » giovani *Chauliodus Sloani* dai 25 ai 33 mm., *con quasi tutti i caratteri dell'adulto.*

Il Brauer ([2]) dà, poi, come misura di 16 esemplari di questa specie la lunghezza di cm. 2 fino a 18.

([1]) Lo Bianco S., *Notizie biologiche riguardanti specialmente il periodo di maturità sessuale degli animali del golfo di Napoli,* in Mitth., a d. Zool. Station zu Neapel, Bd. 19, pag. 707.

([2]) Brauer A., *Die Tiefsee-Fische-Sistematischer Teil,* Deutsche Tiefsee-Expedition, 1898-1899. Bd. XV, pag. 42.

Fig. 2.

Fig. 4.

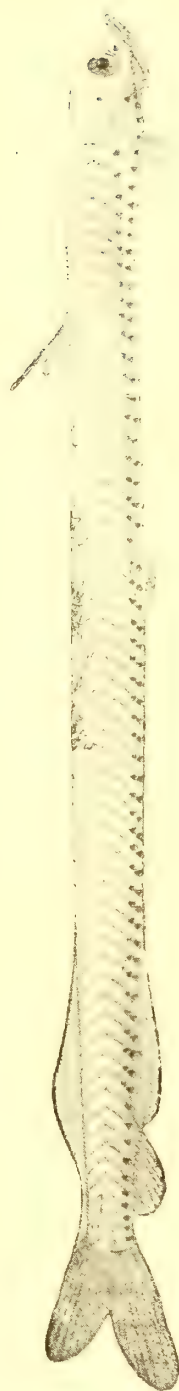



Fig. 3.

*Larva di mm. 37.* — Ancora trasparente e senza pigmento. Le due serie ventrali per lato sono già pigmentati e risplendenti.

Sono inoltre comparsi:

Un fotoforo preorbitario quasi a livello del profilo inferiore dell'occhio;

due fotofori opercolari molto distanziati, il superiore molto più piccolo dell'inferiore.

Il capo è diritto sull'asse del tronco; l'occhio è più arrotondito e guarda lateralmente.

A livello del cinto toracico l'altezza del corpo da minore che si era mantenuta, in rapporto alle altre sezioni del corpo, escluso il tratto preorbitario, è diventata quasi la più alta.

Le pettorali presentono ora dei raggi in numero di 10. La pinna non è più peduncolata. Lo scheletro basale è più infossato nei tessuti, e la linea d'inserzione si presenta vicinissima al profilo ventrale del corpo lievissimamente rialzata sull'orizzontale.

Il primo raggio della dorsale s'è disimpegnato dal resto della pinna.

L'anale presenta undici raggi, la caudale ha il lobo inferiore relativamente più sviluppato che nelle larve in accrescimento.

L'apertura anale che nella larva precedente corrispondeva al quart'ultimo fotoforo della serie che va dall'istmo all'estremo caudale del tronco, ora s'è spostato alquanto in avanti di altri cinque fotofori.

Assenza di pigmento.

### Stadio giovanile di mm. 34.80.

Ancora molto trasparente; una pigmentazione finissima in nero s'è diffusa lungo la regione latero-dorsale del tronco, e con rilevante intensità corrispondentemente alla regione addominale; risparmiato è invece, a questo stadio, la porzione di regione latero-ventrale interposta fra il profilo dorsale dell'addome e la linea laterale e, caudalmente, fra la linea laterale e la base della pinna anale.

Identica pigmentazione s'è estesa alla regione retrorbitaria del capo con tendenza ad estendersi sulla guancia.

Anche il pigmento del tronco accenna con dei lievi getti dalla linea laterale ad estendersi alla porzione non ancora invasa.

Il capo s'è sviluppato in altezza, l'occhio è ora perfettamente rotondo, la dentatura è quasi quella definitiva. Il largo tratto tra il cingolo toracico e l'apparato opercolare è scomparso e gli archi branchiali si sono rinserrati l'uno all'altro sotto la parte posteriore del cranio.

L'altezza del tronco va ora diminuendo da avanti indietro.

La dorsale ha migrato ancora più in avanti guadagnando altri tre seg-

menti. Il primo raggio s'è fortemente sviluppato in lunghezza relativamente agli altri cinque.

L'adiposa mostra una fine striatura.

L'anale è distanziata da un certo tratto dall'apertura anale, la quale ha migrato in avanti di altri due fotofori, raggiungendo così la sua posizione definitiva. Avanti l'ano il resto di pinna primordiale s'è trasformata in una plica cutanea più spessa e più alta, degradante da dietro in avanti.

Le ventrali si sono fortemente allungate raggiungendo la metà del tratto tra il loro impianto e l'ano.

Le pettorali contano 11 raggi.

È comparso un fotoforo sottorbitario, e sopra delle due serie ventrali nell'ambito della regione addominale, gli abbozzi dei piccoli organi luminosi dell'adulto.

La comparsa di questi piccoli organi luminosi è posteriore a quella delle due serie ventrali. Dall'esame di stadi giovanili più inoltrati risulta che il processo si compie anche per essi nel senso ventro-dorsale.

E. M.

## Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali storiche e filologiche.*

Vol. V. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti. Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XXVII. (1892-1918). Fasc. 3°-4°, Sem. 2°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XXVII. (1892-1918). Fasc. 1°-2°.
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XII. Fasc. 11.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-6.

---

## CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

P. Maglione & C. Strini (successori di E. Loescher & C.) — *Roma.*

# INDICE

## Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

*pervenute all'Accademia durante le ferie del 1918.*



E. Mancini *Segretario d'ufficio responsabile*

**Pubblicazione bimensile.** **N. 5-6.**

# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

# RENDICONTI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

**Volume XXVII.° — Fascicoli 5°-6°**

2° Semestre.

***Comunicazioni pervenute all'Accademia durante le ferie del* 1918.**

(Ogni Nota o Memoria porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

## ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

### PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

---

### I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata

2 Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 9 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a pagine 4 $\frac{1}{2}$.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 30 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

### II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 50 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 30 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

### Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

---

## MEMORIE E NOTE
## DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

*pervenute all'Accademia durante le ferie del 1918.*

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo)

---

### Geometria. — *Studî relativi all'elemento lineare proiettivo di una ipersuperficie.* Nota del Corrisp. GUIDO FUBINI [1].

1. Siano $x, y, z, \ldots, \tau, t, w$ le $n+2$ coordinate *omogenee* di un punto di uno spazio $S_{n+1}$ ad $n+1$ dimensioni, in cui sia data una ipersuperficie $V_n$ definita assumendo le $x, y, \ldots, w$ come funzioni di $n$ parametri $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Sia $g = \Sigma a_{rs}\, du_r\, du_s$ una *qualsiasi* forma quadratica covariante col discriminante $A \neq 0$. Porremo [2]

$$(1)\quad \begin{cases} F_2 = \dfrac{1}{\sqrt{A}}(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, d^2x) \;;\; \Phi_3 = \dfrac{1}{\sqrt{A}}(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, d^3x) \\ \Lambda_3 = 2\Phi_3 - 3\, dF_2 \;;\; F_3 = \Lambda_3 + \dfrac{3}{n+2} F_2\, d \log \dfrac{\nabla}{A}\,. \end{cases}$$

La $F_3$ si può definire in tal modo, soltanto se il discriminante $\nabla$ di $F_2$ è diverso da zero (per gli altri casi cfr. loc. cit.). Le forme precedenti

(1) Pervenuta all'Accademia il 4 settembre 1918.

(2) Cfr. le Note dell'A.: *Fondamenti per la geometria* ecc., pubblicate in questo volume di questi Rendiconti. I risultati sono stati perfezionati e generalizzati alle ipersuperficie in una Memoria in corso di stampa negli Annali di Matematica. Conservando le notazioni di questi lavori, indico con $x_r$, $x_{rs}$ ecc. derivate *covarianti* rispetto alla forma $g$; chiamo punto $x$ il punto di coordinate $(x, y, \ldots, w)$. Con $(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, d^2x)$ indico il determinante di ordine $n+2$, di cui gli elementi scritti tra ( ) formano la prima riga, e le altre righe se ne deducono sostituendo alla $x$ ordinatamente le $y, z$, ecc. Con notazioni analoghe indico determinanti analoghi.

sono intrinseche (di significato indipendente dalla scelta delle $u_i$); data $V_n$, *esse sono determinate a meno di uno stesso fattore* (nel caso generale si possono anche [loc. cit.] definire due forme $\varphi_2$, $\varphi_3$ ad esse proporzionali completamente determinate dalla $V_n$). La coppia delle forme $F_2$, $F_3$ *compone l'elemento lineare proiettivo di* $V_n$. *Il primo dei problemi*, cui è dedicata questa Nota, è di riconoscere *quando tale elemento lineare si riduce ad una sola forma*, cioè *quando la* $F_2$ *oppure la* $F_3$ *è identicamente nulla.* Noi anzi studieremo un problema più generale, *che ha senso anche nel caso* $\nabla = 0$, ricercando *quando è nulla* $F_2$, oppure *quando* $\mathcal{A}_3$ *è divisibile per* $F_2$ (*ciò che avviene infatti se* $F_3 = 0$).

2. Scriviamo $F_2$, $\mathcal{A}_3$ in forma specialmente comoda supponendo $x = 1$, $y = u_1$, $z = u_2$, ..., $t = u_n$, e la $V_n$ definita da un'equazione

$$w = w(u_1, u_2, \ldots, u_n).$$

Le varietà $u_i =$ cost. sono le intersezioni di $V_n$ con un iperpiano $y - u_1 x = 0$, oppure $z - u_2 x = 0$, oppure ecc. Posto $g = \Sigma du_i^2$, si trova

$$F_2 = \begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_2 & & u_n & w \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & w_1 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & w_2 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & w_n \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & \Sigma w_{rs}\, du_r\, du_s \end{vmatrix} = \Sigma w_{rs}\, du_r\, du_s .$$

Analogamente si trova $\Phi_3 = \Sigma w_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t + 3 \Sigma w_{rs}\, du_r\, d^2 u_s$, da cui

$$\mathcal{A}_3 = - \Sigma w_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t .$$

*La* $F_2$ *è identicamente nulla*, se le $w_{rs}$ sono nulle, cioè se $w$ è un polinomio omogeneo di primo grado nelle $1 = x$, $u_1 = y$, ..., $u_n = t$, cioè *se* $V_n$ *è un iperpiano* (com'era evidente *a priori*, perchè $F_2 = 0$ definisce le direzioni assintotiche).

3. Premettiamo ora un'osservazione: *Lungo una retta, che giaccia su* $V_n$, *sono nulle entrambe le* $F_2$, $\mathcal{A}_3$. Infatti, senza ledere la generalità, tale retta si può pensare definita dalle $u_1 = u_2 = \cdots = u_{n-1} = w = 0$. Perciò $w$ e quindi anche $w_n$, $w_{nn}$, $w_{nnn}$ sono nulli per $u_1 = u_2 = \cdots = u_{n-1} = 0$; se ne deduce tosto che per $u_i = du_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ anche $F_2$ e $\mathcal{A}_3$ sono nulli. *Il teorema reciproco falso per* $n > 2$ (come proveremo più avanti con un esempio) *è vero per* $n = 2$; *una linea di* $V_n$, *se* $n = 2$, *che annulli* $F_2$ *e* $\mathcal{A}_3$ *è retta* (con una lieve ulteriore condizione che enunciamo più sotto). Una varietà $V'$ di $V_n$ lungo cui $F_2 = \mathcal{A}_3 = 0$

soddisfa alla $F_2 = 0$ cioè alla $\Sigma dw_i \, du_i = 0$ ed alla $dF = 0$, che, in virtù della $\mathcal{A}_3 = 0$, si può scrivere $\Sigma dw_i \, d^2 u_i = 0$

$$\Sigma dw_i \, du_i = \Sigma dw_i \, d^2 u_i = 0 .$$

Se $n = 2$, queste due equazioni nelle $dw_i$ dànno due casi possibili:

A) $du_1 \, d^2 u_2 - du_2 \, d^2 u_1 = 0$, cioè $\frac{d}{du_1}\left(\frac{du_2}{du_1}\right) = 0$, ossia $\frac{du_2}{du_1} = C = \text{cost.}$ Quindi $\frac{dw}{du_1} = w_1 + C w_2$ ; $\frac{d^2 w}{du_1^2} = w_{11} + 2 C w_{12} + C^2 w_{22} = 0$, in virtù dell'equazione $F_2 = 0$, cui soddisfa la $C = \frac{du_2}{du_1}$. Quindi sia $u_2$ che $w$ sono funzioni lineari di $u_1$, e la curva considerata è *retta*.

B) È invece $dw_1 = dw_2 = 0$, cioè $w_{11} \, du_1 + w_{12} \, du_2 = w_{21} \, du_1 + w_{22} \, du_2 = 0$. Se $w_{11} w_{22} - w_{12}^2 \neq 0$, ne segue $du_1 = du_2 = 0$, cioè $u_1 = \text{cost.}$, $u_2 = \text{cost.}$ Si tratterebbe ancora di una retta posta su $V_n$; ma questo caso di una retta $u_i = \text{cost.}$ posta su $V_n$ è escluso dall'ipotesi che $V_n$ si possa definire dando $w$ in funzione di $u_1, u_2$. Dunque sulla linea considerata è $w_{11} w_{22} - w_{12}^2 = 0$. La linea considerata è pertanto singolare, perchè è una linea di *punti parabolici* di $V_n$. Lungo essa è soddisfatta la $\frac{F_2}{du_1^2} = w_{11} + 2 w_{12} \frac{du_2}{du_1} + w_{22} \left(\frac{du_2}{du_1}\right)^2 = 0$; anzi la $\frac{du_2}{du_1}$ è radice doppia di tale equazione: ciò che enunceremo dicendo che $F_2$ si annulla del *secondo* ordine. Noi *supporremo* che anche $\mathcal{A}_3$ si annulli almeno del *secondo* ordine; cioè che $\frac{du_2}{du_1}$ sia radice almeno doppia anche di $\mathcal{A}_3 = 0$. In tal caso lungo la nostra linea è

$$\frac{d^2 u_2}{du_1^2} = \frac{d}{du_1}\left(-\frac{w_{11}}{w_{12}}\right) = -\frac{1}{w_{12}}\left[w_{111} + 2 w_{112}\left(-\frac{w_{11}}{w_{12}}\right) + w_{122}\left(-\frac{w_{11}}{w_{12}}\right)^2\right].$$

La quantità tra [ ] è nulla purchè $-\frac{w_{11}}{w_{12}}$ è radice doppia anche di $\mathcal{A}_3 = 0$; e pertanto $\frac{d^2 u_2}{du_1^2} = 0$, cioè $\frac{du_2}{du_1} = C = \text{cost.}$, e la dim. continua come nel caso A.

4. Supponiamo infine $\mathcal{A}_3$ divisibile per $F_2$ ed $n$ qualsiasi. Seghiamo $V_n$ con lo spazio lineare $S_3$ a tre dimensioni definito dalle

$$(1) \qquad u_i = \varepsilon_i v_1 + \eta_i v_2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$(\varepsilon_i, \eta_i = \text{cost.}; \; v_1, v_2 \text{ parametri}).$$

La superficie $V_2$ intersezione avrà come forme $F'_2$, $\mathcal{A}'_3$ quelle che si ottengono dalle $F_2$, $\mathcal{A}_3$ con la sostituzione (1); e quindi $\mathcal{A}'_3$ sarà divisibile

per $F'_2$; le linee di $V_2$ che annullano $F_2$ (assintotiche) annulleranno anche *almeno dello stesso ordine* la forma $\mathcal{A}_3$, e quindi saranno rette. Se per ogni punto di $V_2$ escono due assintotiche, $V_2$ sarà doppiamente rigata, e quindi sarà una quadrica; se invece esce un'assintotica sola, la $V_2$ sarà una sviluppabile. Nel primo caso $V_n$, essendo da un $S_3$ generico tagliata in una quadrica, sarà pure *una quadrica*. Nel secondo caso la $F_2$ [diventando con la sostituzione (1) e per tutti i valori delle $\varepsilon, \eta$ una forma $F'_2$ a discriminante nullo] sarà il quadrato di una forma lineare $F_1 = \Sigma \sigma_i du_i$. Consideriamo un punto O di coordinate $u_i$, e un punto consecutivo O' di coordinate $u_i + du_i$ tali che $F_1 = 0$. La direzione OO' sarà assintotica; un $S_3$ che la contenga taglia $V_n$ in una sviluppabile di cui OO' è generatrice; pertanto la retta OO' è *tutta* contenuta in $V_n$. Poichè $F_1$ è lineare, le rette OO' generano un $S_{n-1}$, posto sia su $V_n$ che nell'iperpiano $S_n$ tangente in O. E la $V_n$ si potrà pensare generata da $\infty^1$ di tali $S_{n-1}$; se con $t = v_1$, $w = \varphi(v_1)$ indichiamo la curva L in cui la $V_n$ taglia il piano $(x = 1)$ $y = z = \cdots = \tau = 0$, da ogni punto di L esce (almeno) un $S_{n-1}$; e $V_n$ si potrà pensare definita da equazioni parametriche del tipo

$$x = 1 \ ; \ y = \sum_2^n v_i \psi_{i1}(v_1) \ ; \ z = \sum_2^n v_i \psi_{i2}(v_1) \ ; \ \dots \ ; \ \tau = \sum_2^n v_i \psi_{i,n-1}(v_1)$$

$$t = v_1 + \sum_2^n v_i \psi_{in}(v_1) \quad ; \quad w = \varphi(v_1) + \sum_2^n v_i \psi_{i,n+1}(v_1)$$

ove le $\psi_{ik}$ sono funzioni di $v_1$ (gli indici non indicano più derivate).

Se la $V_n$ non è essa stessa iperpiana, dalle equazioni per $y, \dots, \tau$ possiamo ricavare le $v_2, \dots, v_n$ come funzioni lineari omogenee delle $y, \dots, \tau$. Sostituendo nelle equazioni per $t$ e $w$, troviamo:

$$t = u_1 + \sum_2^n u_i \psi_i(u_1) \qquad w = \varphi(u_1) + \sum_2^n u_i \chi_i(u_1)$$

$$(u_1 = v_1) \qquad y = u_2 \, , \, z = u_3 \, , \, \dots \, , \, \tau = u_n$$

come equazioni parametriche di $V_n$, essendo $\varphi, \psi_i, \chi_i$ funzioni di $u_1$.

Posto $g = \Sigma du_i^2$, la $F_2$ con questi parametri $u$ diventa $\pm (t'_{u1} d^2 w - - w'_{u1} d^2 t)$; esprimendo che $F_2$ è un quadrato (cioè una forma del tipo $A_{11} du_1^2$), si trova: $\chi'_r = \varphi' \psi'_r$ $(r = 2, 3, \dots, n)$. Queste condizioni equivalgono, com'è facile riconoscere, all'una od all'altra delle seguenti proposizioni (tra loro equivalenti):

A) Due $S_{n-1}$ consecutivi (cioè due $S_{n-1}$ corrispondenti ai valori $u_1$, oppure $u_1 + du_1$ di $u_1$) si tagliano in un $S_{n-2}$. (Si noti che, se due tali $S_{n-1}$ coincidessero sempre, la $V_n$ si ridurrebbe ad un $S_{n-1}$: ciò che è impossibile).

B) Due $S_{n-1}$ consecutivi appartengono ad un $S_n$, che tocca $V_n$ in *tutti* i punti del $S_{n-1}$ considerato. (È facile riconoscere che l'equazione di

un $S_n$ tangente dipende dal *solo* parametro $u_1$). Perciò $V_n$ è l'inviluppo di $\infty^1$ iperpiani, o, come potremmo dire, è una *sviluppabile* di $S_n$. Quindi: *Le sole ipersuperficie per cui l'elemento lineare si riduce ad una sola forma, o per cui* $\varDelta_3$ *è divisibile per* $F_2$, *sono gli iperpiani, le sviluppabili, le quadriche.*

OSSERVAZIONE. — Ne risulta subito che per $n > 2$ su $V_n$ può esistere *una linea non retta che annulli* $F_2, \varDelta_3$: p. es. su una quadrica una linea non retta che in ogni suo punto sia tangente ad una generatrice di $V_n$.

5. Abbiamo qui dato un esempio, in cui dalle forme $F_2, F_3$ si deduce la $V_n$ relativa; il metodo generale è però quello di studiare *le equazioni differenziali*, che permettono di definire una ipersuperficie di forme date. Nel loc. cit. io con metodo *euristico* ho trovato tali equazioni se $n = 2$, oppure 3. Possiamo perciò prevedere il tipo generale di tali equazioni, e, per provarle nel caso più generale, basterà *verificarle*. Ciò che ora noi faremo. Determinate per una $V_n$ le forme $F_2, F_3$, cambiamo la forma $g$, assumendo $g = F_2$; e moltiplichiamo poi le coordinate *omogenee* $x, y, \dots, w$ con un tale fattore, da controbilanciare il cambiamento della $g$, e da lasciar immutate $g = F_2$ ed $F_3$ (loc. cit.). Posto

$$F_2 = \Sigma a_{rs}\, du_r\, du_s\ ,\quad F_3 = 2\,\Sigma \varDelta_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t\,,$$

indicati poi con indici le derivate *covarianti* rispetto $F_2$ e con $A_{rs}$ il complemento algebrico di $a_{rs}$ in $A = \nabla$ diviso per $A$, si ha:

$$F_2 = \frac{1}{\sqrt{A}}\,(x\,,x_1\,,\dots,x_n\,,\Sigma x_{rs}\,du_r\,du_s)\ ;$$

$$F_3 = \frac{2}{\sqrt{A}}\,(x\,,x_1\,,\dots,x_n\,,\Sigma x_{rst}\,du_r\,du_s\,du_t) = \Sigma' B_{ir}$$

ove

$$B_{ir} = \frac{2}{\sqrt{A}}\,(x\,,x_1\,,\dots,x_{i-1}\,,p_i\,,x_{i+1}\,,\dots,x_{r-1}\,,p_r\,,x_{r+1}\,,\dots,x_n\,dx) \tag{1}$$

ove la $\Sigma'$ è estesa a tutte le coppie $i, r$ di indici con $i < r$ e $p_r = \sum_t x_{rt}\,du_t$.

Poichè $x_{rst} - x_{rts}$ è funzione *lineare* delle $x_r$, la $\dfrac{1}{\sqrt{A}}\,(x, x_1, \dots, x_n, x_{rst})$ *è simmetrica* in $r, s, t$, *e vale* $\varDelta_{rst}$. Di più è (loc. cit.)

$$\sum_{r,s} A_{rs}\,\varDelta_{rst} = 0 \qquad (\text{per } t = 1\,,2\,,\dots,n)\,. \tag{2}$$

Poniamo

$$X = \frac{1}{n}\sum A_{rs}\,x_{rs}\,,\quad \text{e analoghe per } Y\,,Z \text{ ecc.} \tag{3}$$

Sarà

$$\frac{1}{\sqrt{A}}\,(x\,,x_1\,,\dots,x_n\,,X) = \frac{1}{n}\,\Sigma A_{rs}\,a_{rs} = 1\,.$$

Dunque in particolare le X , Y ecc. *non* sono combinazioni lineari delle $x, x_1, \ldots, x_n$, delle $y, y_1, \ldots, y_n$ ecc. Le equazioni

$$x_{rs} = \sum_t \mathrm{B}_{rst} x_t + c_{rs} x + \mu_{rs} \mathrm{X} \quad \text{e analoghe in } y, z, \ldots$$

determinano univocamente le $\mathrm{B}_{rst}, c_{rs}, \mu_{rs}$. Anzi, siccome

$$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{A}}}(x, x_1, \ldots, x_n, x_{rs} - a_{rs}\mathrm{X}) = 0, \quad \text{segue } \mu_{rs} = a_{rs}.$$

Potremo dunque, cambiando lievemente le notazioni, scrivere:

$$x_{rs} = \sum_{l,m} b_{rsl} \mathrm{A}_{lm} x_m + a_{rs} \mathrm{X} + c_{rs} x \quad (\text{e analoghe in } y, z, \ldots). \tag{4}$$

Dalla (3), derivando *covariantemente*, ricordando che $x_{rst} - \varDelta_{rst}\mathrm{X}$ è combinazione lineare delle $x, x_t$, perchè $(x, x_1, \ldots, x_n, x_{rst} - \varDelta_{rst}\mathrm{X}) = 0$, troviamo:

$$\mathrm{X}_t = \frac{1}{n}\sum_{r,s} \mathrm{A}_{rs} x_{rst} = \frac{1}{n}\sum_{r,s} \mathrm{A}_{rs} \varDelta_{rst} \mathrm{X} + \cdots,$$

ove, *come nelle formole seguenti, con ... intendiamo dei termini, combinazioni lineari delle* $x, x_i$. Per (2) dunque anche $\mathrm{X}_t$ è una tale combinazione lineare. E quindi, derivando covariantemente (4) e omettendo i termini in $x, x_i$, troviamo [1] in virtù delle stesse (4):

$$x_{rst} = \sum_{l,m} b_{rsl} \mathrm{A}_{lm} a_{mt} \mathrm{X} + \cdots = b_{rst} \mathrm{X} + \cdots$$

Poichè, come dicemmo, $x_{rst} - x_{rts}$ è combinazione lineare delle $x_i$, dovrà essere $b_{rst} = b_{rts}$; poichè evidentemente anche $b_{rst} = b_{srt}$, il sistema delle $b_{rst}$ sarà *covariante simmetrico*.

Dalla (1), ricordando (4), si trae:

$$\mathrm{B}_{ir} = 2\Big[-\sum_{s,t} b_{ist} \mathrm{A}_{ti} du_s \mathrm{F}_2 + \sum_{s,t} b_{ist} \mathrm{A}_{tr} du_s \sum_\sigma a_{r\sigma} du_\sigma du_i - \\ - \Sigma b_{ist} \mathrm{A}_{tr} du_s \mathrm{F}_2 + \Sigma b_{rst} \mathrm{A}_{ti} du_s \Sigma a_{i\sigma} du_\sigma du_r\Big].$$

Trascurando gli ultimi due addendi, per costruire $\mathrm{F}_3 = \Sigma' \mathrm{B}_{ir}$ si deve estendere la $\Sigma$ non solo alle coppie $i, r$ con $i < r$, ma anche a quelle con $i > r$, e, se si vuole, anche a quelle con $i = r$, perchè per $i = r$ i primi due addendi si elidono. Così facendo e ricordando che da (4), (1) segue $\sum_{r,s} \mathrm{A}_{rs} b_{rsl} = 0$, troviamo che:

$$\mathrm{F}_3 = 2\Sigma b_{ist} du_i du_s du_t$$

cioè $b_{ist} = \varDelta_{ist}$.

[1] Si devono qui ricordare i metodi di *calcolo assoluto* di Christoffel e di Ricci, e ricordare che dalle (4) segue che le $b_{rst}$, le $c_{rs}$ formano come le $a_{rs}$ dei sistemi *covarianti*.

Date le forme $F_2$, $F_3$ *le equazioni* (4) *restano determinate a meno dei coefficienti* $c_{rs}$ *della* $x$. *Le* $c_{rs}$ *legate dalla* $\sum_{r,s} A_{rs} c_{rs} = 0$ *sono i coefficienti della terza forma fondamentale della ipersuperficie* $\Sigma c_{rs} du_r du_s$ (che si può [loc. cit.] determinare completamente come $F_2$, $F_3$).

Osservazione. — Si noti che, posto $g = \sigma F_2$, $\overline{x} = \varrho x$, $\overline{y} = \varrho y$ ecc. il nuovo valore $\overline{F}_2$ di $F_2$ è $\frac{\varrho^{n+2}}{\sqrt{\sigma^n}} F_2$, che coincide con $g$ se $\sigma = \varrho^2$; cioè, mutando $F$ in $\varrho^2 F_2$, ed $x$ in $\varrho x$ e analoghe, tutte le formole precedenti rimangono invariate con nuovi valori per le $X$ e le $c_{rs}$ [1].

6. Dai precedenti risultati si deduce una nuova dimostrazione puramente *proiettiva* del teorema fondamentale: *Condizione necessaria affinchè due ipersuperficie* $V_n$, $\overline{V}_n$ *in corrispondenza biunivoca* (una luogo del punto $x, y, \ldots$, l'altra del punto $\overline{x}, \overline{y}, \ldots$, essendo le $x, y, \ldots, \overline{x}, \overline{y}, \ldots$ funzioni degli stessi parametri $u_r$) *siano proiettivamente applicabili in due punti omologhi* $A$, $\overline{A}$ *è che ivi si corrispondano le direzioni assintotiche* (le forme $F_2$, $\overline{F}_2$ per $V$ e $\overline{V}$ siano in $A$, $\overline{A}$ proporzionali). *Se questa condizione è soddisfatta dappertutto* (per tutti i valori delle $u_r$), *la condizione non solo necessaria ma anche sufficiente per l'applicabilità in* $A$, $\overline{A}$ *è che ivi le* $V$, $\overline{V}$ *abbiano uguali elementi lineari* (le forme $F_3$, $\overline{F}_3$ siano nello stesso rapporto delle $F_2$, $\overline{F}_2$).

Per l'applicabilità in $A$, $\overline{A}$ si deve [2] poter trasformare $\overline{V}_n$ con una tale collineazione e scegliere le costanti $\varrho, m, n, l$ in guisa che in $A$, $\overline{A}$ sia $\overline{x} = \varrho x$ ; $\overline{x}_i = \varrho(x_i + m_i x)$ ; $\overline{x}_{rs} = \varrho(x_{rs} + n_r x_s + n_s x_s + l_{rs} x)$ (ove le $x_{rs}$ sono derivate *ordinarie*). Ne segue subito che in $A$, $\overline{A}$ le forme $F_2$, $\overline{F}_2$ differiscono per il solo fattore $\varrho^n$. Se per tutti i valori delle $u$ le $F_2$, $\overline{F}_2$ sono proporzionali, noi possiamo trasformare proiettivamente $\overline{V}_n$ in guisa che

[1] Se non usiamo coordinate *normali* (loc. cit.), ciò che toglierebbe ogni indeterminazione, il fattore $\varrho$ resta arbitrario; i simboli $\overline{\left\{ {rs \atop t} \right\}}$ ed $\left\{ {rs \atop t} \right\}$ di Christoffel di 2ª specie per $\overline{F}_2$, $F_2$ sono legati dalle

$$\overline{\left( {rs \atop t} \right)} = \left( {rs \atop t} \right) + \varepsilon_{rt} (\log \varrho)_s + \varepsilon_{st} (\log \varrho)_r - a_{rs} \sum_l A_{lt} (\log \varrho)_l$$

(dove $\varepsilon_{rr} = 1$ ed $\varepsilon_{rs} = 0$ per $r \neq s$). Le nuove derivate covarianti di $\overline{x} = \varrho x$ rispetto a $\overline{F}_2 = \varrho^2 F_2$ valgono $\varrho x_{rs} + a_{rs} \Sigma A_{hk} \varrho_h x_k + \frac{x}{\varrho} (a_{rs} \Delta_2 \varrho - 2\varrho_r \varrho_s + \varrho \varrho_{rs})$ ove $x_{rs}$ sono le derivate di $x$ rispetto $F_2$. Se ne deducono tosto i nuovi valori di $\overline{X} = \frac{1}{n} \Sigma \overline{A}_{rs} \overline{x}_{rs}$, delle $c_{rs}$, ecc.

[2] Cfr. la Mem. dell'A. nei Rend. del Circ. Mat. di Palermo, 1916 (§ 9).

sia identicamente $F_2 = \overline{F}_2$ e che in $A, \overline{A}$ sia $\overline{x} = x$, $\overline{x}_i = x_i$. Se nei punti $A, \overline{A}$ è in più $\overline{x}_{rs} = x_{rs} + n_r x_s + n_s x_r + l_{rs} x$ (formole che rimangono inalterate, se con $x_{rs}$ indico derivate covarianti rispetto ad $F_2$), si calcolino le forme $F_3, \overline{F}_3$ per mezzo delle (1). Si trova che la loro differenza vale $2\Sigma(\overline{B}_{ir} - B_{ir})$ cioè $-2(\Sigma n_r du_r) F_2$, che, dovendo (come $F_3$ ed $\overline{F}_3$) essere apolare con $F_2$, è *nulla*. Cioè $F_3 = \overline{F}_3$ come dovevasi provare (e inoltre si trova $n_i = 0$). Viceversa, se $V, \overline{V}$ hanno la stessa forma $F_2$, e nei punti $A, \overline{A}$ le forme $F_3, \overline{F}_3$ sono uguali, si può trasformare proiettivamente $\overline{V}$ in guisa che in tali punti sia $\overline{x} = x, \overline{x}_i = x_i$; dalla identità $(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{rs}) = (x, x_1, \ldots, x_n, \overline{x}_{rs})$ segue che si potranno determinare delle costanti $k$ in guisa che nei punti $A, \overline{A}$ sia $\overline{x}_{rs} = x_{rs} + \sum_t k_{rst} x_t + x k_{rs}$. Se ne deduce che:

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \Sigma A_{rs} \overline{x}_{rs} = X + kx + \Sigma k_t x_t \quad \text{(nel punto A)} \quad (k, k_t \text{ costanti}).$$

Sottraendo l'una dall'altra le equazioni differenziali per $x_{rs}, \overline{x}_{rs}$ se ne deduce infine: $\overline{x}_{rs} - x_{rs} = a_{rs} \sum_t k_t x_t + h_{rs} x$ ($h_{rs} = \text{cost.}$); (cosicchè la costante $k_{rst}$ vale $a_{rs} k_t$) ($h_{rs} = k_{rs}$).

Se con una ulteriore collineazione che lasci fisso il punto $\overline{x}$ (cioè il punto $\overline{A}$), e il punto $\overline{A}_t$ di coordinate $(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \ldots, \overline{w}_i)$ per $i = 1, 2, \ldots, n$, portiamo il punto di coordinate $(\overline{X}, \overline{Y}$, ecc.) sulla retta che da A proietta il punto (X, Y, ecc.) renderemo $k_t = 0$, e quindi $\overline{x}_{rs} - x_{rs} = h_{rs} x$ [1]. Le due ipersuperficie saranno dunque proiettivamente applicabili in A. c. d. d.

Osservazione. — Nella prima parte della precedente dimostrazione si è ammesso che le $V, \overline{V}$ abbiano *dappertutto* uguali forme $F_2$, perchè dalla identità di queste forme nei soli punti $A, \overline{A}$ e dalle $\overline{x}_{rs} = x_{rs} + n_r x_s + n_s x_r + l_{rs} x$ in derivate ordinarie non si poteva dedurre che queste ultime uguaglianze valevano nei punti $A, \overline{A}$ anche in coordinate covarianti. Nell'ultima parte della dimostrazione la stessa ipotesi serve per passare viceversa da derivate covarianti a derivate ordinarie.

In una prossima Nota proveremo che:

1°) Come la forma $F_2$ risulta dallo studio della intersezione di $V_n$ con l'iperpiano tangente, così si giunge alla $F_3$ studiando l'intersezione di $V_n$ con le quadriche tangenti.

2°) Una $V_n$ è per $n > 2$ proiettivamente indeformabile; fanno eccezione le $V_n$, il cui cono assintotico ha generatrici doppie; le quali sono tutte e sole le $V_n$ inviluppo di $\infty^r$ iperpiani con $r < n$. (Nella presente Nota si è studiato il caso $r = 1$).

[1] Questa uguaglianza per le derivate covarianti rispetto a $F_2$ porta a una formola analoga per le derivate ordinarie (perchè $\overline{x}_i = x_i$).

**Chimica fisica.** — *Sul punto di trasformazione fra modificazioni riversibili.* Nota del Socio C. VIOLA [1].

Ogni fenomeno naturale è capace, nelle condizioni migliori di utilizzazione possibile, di fornire una quantità determinata di lavoro; viceversa somministrando la stessa quantità di lavoro è possibile produrre lo stesso fenomeno inverso. Siffatto processo è riversibile.

Se il fenomeno naturale si effettua col passaggio di una quantità di calore Q dalla temperatura assoluta T alla temperatura assoluta $T - t$, col salto termico $t$, il massimo lavoro che esso può fornire, è dato da

$$a = \frac{Q}{T} t \tag{1}$$

essendo $a$ e Q espresse nella stessa unità.

Il fenomeno naturale che vogliamo considerare, consiste nella trasformazione dallo stato amorfo allo stato cristallino o viceversa, ovvero più generale da una modificazione cristallina ad un'altra modificazione cristallina. In questo caso Q il calore latente relativo alla trasformazione in esame, che avvenga alla temperatura assoluta T, vale a dire il calore che può liberamente cadere dal sistema di modificazioni cristalline o fasi in contatto, al serbatojo termico, col quale esso si trova in comunicazione. Dato a Q questo significato, è naturale che T rappresenta il punto di trasformazione, ove le fasi considerate possono coesistere in intimo contatto. Il problema acquista importanza, quando si domandi se Q e T siano costanti dipendenti dallo stato iniziale e dallo stato finale. In quanto al calore di trasformazione Q, il problema è risolvibile con un tratto di penna; poichè se Q non fosse sempre il medesimo per una data pressione, ma dipendesse dalla via percorsa per ottenere la fine del processo, si avrebbe produzione di energia dal nulla in quanto che si potrebbe far eseguire il processo dapprima in un senso e poi nel senso opposto, seguendo vie diverse.

Ma in quanto al punto di trasformazione T è lecito ammettere *a priori* che la trasformazione in un senso o nel senso opposto avvenga entro due limiti. La questione, non nuova, ha dato motivo di varie discussioni, diverse obbiezioni e molteplici controversie, a cui gli studiosi assoceranno sempre le autorità di Tammann e Lehmann.

[1] Pervenuta all'Accademia il 29 agosto 1918.

Il calore latente e il punto di trasformazione sono due dati, che si collegano con l'equilibrio stabile del sistema fra le varie modificazioni in contatto, retto dalla legge di Gibb sulle fasi. E giacchè l'equilibrio stabile del sistema entra come fattore principale nel nostro problema insieme con la legge di Gibb, si presenta naturalmente la necessità di fare distinzione fra modificazioni riversibili (enantiotrope) e modificazioni irriversibili (monotrope). Le prime posseggono dominî di stabilità e sono perciò contemplate dalla legge di Gibb, e trovandosi allo stato cristallino, seguono la legge di Curie, o, ciò che vale lo stesso, la legge di Haüy, essendo queste due ultime di eguale contenuto. Le modificazioni irriversibili all'incontro non hanno domini di stabilità, e non sono perciò elementi, che possano essere introdotte nella legge di Gibb; e non dànno luogo a cristallizzazioni normali, salvo rare eccezioni.

Ma nondimeno benchè le modificazioni irriversibili non abbiano dominî di stabilità, esse tuttavia possono coesistere insieme un tempo più o meno lungo. Si hanno numerosi esempi, che confermano queste anomalie. Così il diamante può coesistere con la grafite, la marcasite con la pirite, la pseudobrucite con la brucite, le due modificazioni del biossido titanico, anatasio e Brockite, varî silicati fra di loro e molti altri. Vi sono anzi modificazioni riversibili, che possono coesistere insieme fuori del loro rispettivo dominio di stabilità, in una breve o larga regione, senza punto alterarsi come p. es. il rutilo con Anatasio e la Brockite. Lehmann di fronte a questi fatti credette di salvare il principio teorico del punto di trasformazione, osservando che l'inerzia è causa di ritardo, l'attrito interno ostacola il processo, premesso pure che il contatto fra le singole modificazioni sia intimo, e che sia piccolissimo il salto termico $t$, per modo che cause di perturbazione siano escluse. Ma queste oziose osservazioni di Lehmann non sono una dimostrazione. Esse potrebbero avere un peso nel problema, ove si trattasse non di dimostrarlo, ma di creare un riparo per salvare la legge della costanza del punto di trasformazione. Mi pare ci sia qui una lacuna, che si potrebbe colmare; mi sono accinto a questo compito, che spero di avere risoluto, come il lettore potrà giudicare leggendo questa Nota.

Poniamo il problema in questi termini. Sono date due modificazioni I e II riversibili trovantesi in contatto in equilibrio stabile alla temperatura T e a pressione data. Si domanda se esse possono coesistere ad una temperatura diversa di T. La modificazione I subisca un aumento a spese della modificazione II con sottrazione di calore, che vogliamo sia Q, da immagazzinarsi nel serbatojo termico, col quale il sistema delle due modificazioni si trova in contatto. Posto ciò, che diremo processo diretto, l'aumento della modificazione I cristallizzata si effettua secondo la legge di Curie. L'aumento in volume sia $v$. Il nuovo cristallo che vi si forma di volume $v$, sia circuito da $n$ facce $1, 2, 3, \dots n$, aventi le rispettive aree $s_1, s_2, \dots s_n$,

e le tensioni superficiali corrispondenti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$; le loro distanze perpendicolari da un'origine O siano rispettivamente $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$. Avremo in primo luogo le relazioni di Curie:

$$\frac{p_1}{\alpha_1} = \frac{p_2}{\alpha_2} = \frac{p_3}{\alpha_3} = \cdots = \frac{p_n}{\alpha_n} = \mathrm{M} \text{ (costante)}, \tag{2}$$

il che equivale ad esprimere essere minima la tensione superficiale del cristallo, che diremo $E_m$:

$$E_m = \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \alpha_3 s_3 + \cdots + \alpha_n s_n \text{ (}^1\text{)}; \tag{3}$$

e poichè il volume dell'accrescimento totale del cristallo è

$$v = \frac{1}{3} \left\{ p_1 s_1 + p_2 s_2 + p_3 s_3 + \cdots + p_n s_n \right\},$$

avremo come condizione di equilibrio o di accrescimento riversibile:

$$v = \frac{\mathrm{M}}{3} \left\{ \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \alpha_3 s_3 + \cdots + \alpha_n s_n \right\} = \frac{\mathrm{M}}{3} E_m \tag{4}$$

ovvero:

$$E_m = \frac{3v}{\mathrm{M}}; \tag{5}$$

espressione equivalente alla legge di Curie.

D'altra parte il processo avviene con la caduta della quantità di calore Q dalla temperatura T avente il sistema in esame, alla temperatura $T - t$ avente il serbatojo, col quale il sistema è collegato. Questo numero di calorie Q è capace di fornire la massima quantità di lavoro $a$ dato dalla relazione

$$a = \frac{Q}{T} t. \tag{1}$$

Posto non esservi motivi di dispersione, questa quantità di energia si ritroverà integralmente nel sistema in forma di energia superficiale $E_m$, che abbiamo sopra dato. Possiamo dunque stabilire l'eguaglianza

$$a = E_m = \frac{3v}{\mathrm{M}} = \frac{Q}{T} t,$$

ossia

$$\frac{Q}{T} = \frac{3}{\mathrm{M}} \cdot \frac{v}{t}. \tag{6}$$

(1) C. Viola, *Sulle leggi di Gibb, Curie e Hauy relative ai cristalli,* R. Accademia dei Lincei, Rendiconti II, 1916; Id., *Sulle leggi di Curie e Hauy,* R. Accad. dei Lincei. Rend. II, 1918; Id., *Sur la loi de Curie,* C. R. de l'Académie des sciences, Paris, 1918; Id., *Sur les lois de Curie et de Haüy,* C. R. de l'Académie des sciences, Paris, 1918.

Si noti che M è una costante dipendente dal sistema cristallino, ossia dalla figura normale del cristallo, che, come sappiamo, è definita in base all'accrescimento del cristallo secondo la legge di Curie. Il volume $v$ del cristallo è noto, poichè sono noti o determinabili il peso e la densità; il salto termico $t$ può essere misurato in ogni istante. Il rapporto $\frac{v}{t}$ è dunque conosciuto, ed è una quantità costante in un dato tempo. Da qui risulta che anche il rapporto $\frac{Q}{T}$ è determinabile ed è unico e costante, premesso che l'esperienza sia stata eseguita a pressione data. Il calore Q impiegato in questo processo riferito all'unità di volume o di peso è il calore di trasformazione, che come abbiamo testè veduto [equazione (6)], è una costante e determinabile, data che ne sia la pressione esterna, sotto il cui regime la trasformazione si compie. Con ciò è dimostrato che essendo Q dipendente solo dallo stato iniziale e dallo stato finale del processo, la trasformazione deve prodursi ad una unica temperatura T, che è precisamente il punto di trasformazione.

Possiamo anche seguire un'altra via per arrivare allo stesso risultato. Supponiamo di dare alla temperatura T un brusco aumento $dT$, in guisa che il salto termico $t$ rimanga lo stesso. Allora però sotto il regime della temperatura $T + dT = T'$, bruscamente aumentata, la cristallizzazione non potrà seguire la legge di Curie, e perciò la tensione superficiale E, che ne risulterà sarà maggiore della minima $E_m$, sicchè si dovrà avere, in luogo della (5), la seguente:

$$E > \frac{3}{M} v. \tag{7}$$

D'altra parte la quantità di calore che passerà dal sistema al serbatojo, sarà ancora Q, essendo gli stessi gli stati iniziale e finale. Il lavoro massimo che Q sarà capace di fornire è pertanto

$$a' = \frac{Q}{T'} t. \tag{1$_a$}$$

Esclusa ogni dispersione di energia, avremo come dianzi

$$E = a', \tag{8}$$

e quindi

$$\frac{3v}{M} < \frac{Q}{T'} t,$$

ovvero

$$\frac{Q}{T'} > \frac{3}{M} \frac{v}{t}, \tag{9}$$

e dal confronto con la (6)

$$\text{(10)} \qquad \frac{Q}{T'} > \frac{Q}{T} \quad \text{ovvero} \quad T > T'.$$

Quest'ultimo risultato è impossibile poichè è stato supposto $T < T'$.

La stessa cosa risulterebbe se alla temperatura T fosse stata applicata una brusca diminuzione.

Il sistema in esame consistente nel contatto di due modificazioni cristalline può dunque tenersi in equilibrio unicamente alla temperatura T per data pressione, ed essa è il punto di trasformazione.

In conclusione. *Ovunque un processo si effettua in forma di riversibilità e la cristallizzazione avviene e deve avvenire secondo la legge di Curie, ossia ovunque fra due modificazioni in contatto si crea una tensione superficiale minima, ivi deve sempre esistere un punto di trasformazione; e viceversa ovunque esiste un punto di trasformazione fra due modificazioni, ivi la tensione superficiale è minima;*

*punto di trasformazione e tensione superficiale minima sono due momenti del processo collegati intimamente fra loro.*

Si presenta qui però la necessità di fare una breve osservazione. Finora si è considerato il processo che abbiamo chiamato diretto, vale a dire col passaggio di calore dal sistema al serbatojo e quindi con l'accrescimento della modificazione I a spese della modificazione II. La quantità di calore tolto al sistema è $Q$, quella versata al serbatojo è $Q - a$; il calore rimasto per istrada di grandezza massima

$$a = \frac{Q}{T} t$$

è andata ad aumentare la tensione superficiale, il cui minimo valore è $E_m$.

Invertiamo ora il processo, e vediamo che cosa può accadere; poniamo il sistema con un serbatojo termico avente la temperatura $T + t$, e allora il calore percorrerà la via inversa. Il calore tolto al serbatojo sia $Q - a$, quello immesso nel sistema è $Q$, la differenza $a$ di calore la cui espressione è

$$a = \frac{Q}{T} t$$

tolto per istrada dalle due modificazioni, con cui il serbatojo si trova in contatto, è identico alla diminuzione dell'energia superficiale, il cui minimo valore è $E_m$. La modificazione II aumenterà a spese della modificazione I. Il processo inverso si effettua come se la quantità di calore $Q$ si alzasse dalla temperatura $T$ alla temperatura $T + t$, per la qualcosa vi abbisogna del lavoro.

L'elemento che tanto nell'accrescimento quanto nella dissoluzione di un cristallo entra in giuoco è la costante capillare delle facce. Non vi è alcun mezzo per determinarla; si sa solo che essa è diversa per le diverse facce, è più piccola per le facce più sviluppate, più grande per le rudimentali. Ma se non abbiamo il mezzo di determinarla, possiamo nondimeno paragonarla a valori conosciuti. Riprendiamo a questo proposito l'equazione

$$\frac{Q}{T} = \frac{3}{M} \frac{v}{t} . \tag{6}$$

Se in un processo riversibile possono essere determinati sperimentalmente il calore di trasformazione Q e il punto di trasformazione T, essendo $v$ e $t$ pure misurabili, ricaveremo dalla (6) il mezzo di valutare la costante M:

$$\frac{p}{\alpha} = M = 3 \frac{T}{t} \cdot \frac{v}{Q} ,$$

essendo $p$ la distanza perpendicolare di una faccia del cristallo da un centro d'origine O, ossia $2p$ la distanza perpendicolare fra due facce parallele aventi la stessa costante capillare $\alpha$, energia necessaria per dare alla detta faccia l'unità di area. Il valore della costante capillare $\alpha$ può dunque essere rappresentato nel modo seguente:

$$\alpha = \frac{p}{3} \frac{t}{T} \cdot \frac{G}{v} . \tag{11}$$

Sarebbe da studiare lo stesso problema per le modificazioni irriversibili, per le soluzioni e le fusioni di cristalli misti. Ma come questa questione richiede un trattamento diverso, mi riservo di riprenderlo in un'altra Nota.

## Meccanica. — *Su di una particolare classe di coazioni elastiche che si incontra nello studio della resistenza delle artiglierie.* Nota di GUSTAVO COLONNETTI, presentata dal Socio GIAN ANTONIO MAGGI [1].

Un anno fa ho pubblicate in questi stessi Rendiconti [2] alcune considerazioni intese a porre in evidenza la opportunità di dare un assetto organico alla teoria di quegli stati di coazione elastica in assenza di forze esterne che non rientrano nella categoria, ormai nettamente definita e circoscritta, delle distorsioni.

Mi ripromettevo allora di iniziare uno studio sistematico dell'argomento; le occupazioni createmi dallo stato di guerra mi hanno impedito e mi im-

[1] Pervenuta all'Accademia il 9 settembre 1918.

[2] G. Colonnetti, *Su certi stati di coazione elastica che non dipendono da azioni esterne*. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXVI, serie 5ª, 2° sem. 1917.

pediscono tuttora di dar seguito a quel mio proposito, ma mi hanno per compenso offerta più di una occasione di maggiormente convincermi della importanza, anche pratica, della questione. Sulla quale chiedo pertanto alla Accademia il permesso di ritornare, sia pur soltanto incidentalmente, per trattare in questa Nota un problema che interessa assai da vicino la teoria della resistenza delle artiglierie, e per generalizzare poi, in una Nota seguente, uno dei risultati a cui qui perverrò.

Consideriamo un solido elastico, omogeneo ed isotropo, limitato da due superficie cilindriche coassiali di raggi $r_0$ ed $r_1$ e proponiamoci di caratterizzarne gli stati di coazione elastica simmetrici tanto rispetto ai piani passanti per l'asse come rispetto ai piani ad esso normali.

Prendiamo a tal fine in esame l'intorno di un punto generico del solido, orientando gli assi di riferimento secondo le tre direzioni principali: una, $z$, parallela all'asse del cilindro, un'altra, $r$, perpendicolare ad esso, la terza, $t$, normale alle precedenti.

L'energia potenziale elastica elementare si potrà allora esprimere sotto la forma, notissima,

$$\varphi = \mathrm{G}\left[\varepsilon_z^2 + \varepsilon_r^2 + \varepsilon_t^2 + \frac{1}{m-2}(\varepsilon_z + \varepsilon_r + \varepsilon_t)^2\right],$$

dove G ed $m$ sono costanti e misurano rispettivamente il modulo di elasticità trasversale ed il coefficiente di contrazione laterale del materiale, mentre $\varepsilon_z$, $\varepsilon_r$, $\varepsilon_t$ rappresentano le tre dilatazioni principali e sono, nelle ipotesi fatte, da considerarsi come delle funzioni (piccolissime) della sola distanza $r$ del punto generico considerato dall'asse.

Prescinderemo in ciò che segue da ogni deformazione assiale, supporremo cioè

$$\varepsilon_z = 0$$

non senza avvertire che da questa ipotesi restrittiva, giustificabile soltanto fin che si tratta di cilindri indefiniti, si può facilmente liberarsi, quando si passa al caso pratico dei cilindri di lunghezza finita, mediante un noto procedimento di sovrapposizione che è già stato utilmente applicato in casi consimili dal prof. Volterra (1).

L'energia potenziale elastica relativa ad un tronco di solido limitato da due sezioni rette, che per semplicità di scrittura riterremo situate a distanza eguale all'unità di lunghezza, risulterà così espressa da

$$\Phi = 2\pi \mathrm{G}\int_{r_0}^{r_1}\left[\varepsilon_r^2 + \varepsilon_t^2 + \frac{1}{m-2}(\varepsilon_r + \varepsilon_t)^2\right] r\,dr\,.$$

(1) V. Volterra, *Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes*. Annales de l'École Normale, 3, XXIV, septembre 1907.

Ciò posto introduciamo l'ipotesi che, nello stato preso in esame, il solido dato si trovi in equilibrio stabile in assenza di forze esterne. Dovrà la sua energia potenziale elastica essere minima per rispetto a tutte le variazioni di configurazione virtuali, cioè compatibili e piccolissime, che noi possiamo immaginare di imprimergli.

Ferme restando le condizioni di simmetria e le altre restrizioni sopra imposte, noi ci limiteremo a considerare quelle variazioni di configurazione che si ottengono trasformando ogni superficie cilindrica coassiale col solido dato ed avente il raggio generico $r$ (naturalmente compreso fra $r_0$ ed $r_1$) in un'altra superficie pure cilindrica, ancora coassiale con esso, ed avente il raggio $r+\varrho$ (dove $\varrho$ si suppone funzione continua, uniforme e piccolissima della variabile $r$).

È facile verificare che le dilatazioni principali $\varepsilon_r$, $\varepsilon_t$ dell'elemento generico debbono, dopo una tale variazione di configurazione, diventare rispettivamente

$$\varepsilon_r + \frac{d\varrho}{dr}\ , \quad \varepsilon_t + \frac{\varrho}{r}\,.$$

Ne segue l'espressione della variazione prima dell'energia potenziale elastica

$$\delta\Phi = 4\pi G \int_{r_0}^{r_1} \left[ \varepsilon_r \frac{d\varrho}{dr} + \varepsilon_t \frac{\varrho}{r} + \frac{1}{m-2}(\varepsilon_r + \varepsilon_t)\left(\frac{d\varrho}{dr} + \frac{\varrho}{r}\right)\right] r\, dr\,.$$

Per l'equilibrio dovrà dunque riuscir verificata la condizione:

$$\int_{r_0}^{r_1} \left[ \varepsilon_r \frac{d\varrho}{dr} + \varepsilon_t \frac{\varrho}{r} + \frac{1}{m-2}(\varepsilon_r + \varepsilon_t)\left(\frac{d\varrho}{dr} + \frac{\varrho}{r}\right)\right] r\, dr = 0$$

ossia

$$\int_{r_0}^{r_1} r \left[ \varepsilon_r + \frac{1}{m-2}(\varepsilon_r + \varepsilon_t)\right] \frac{d\varrho}{dr}\, dr + \\ + \int_{r_0}^{r_1} \varrho \left[ \varepsilon_t + \frac{1}{m-2}(\varepsilon_r + \varepsilon_t)\right] dr = 0\,.$$

Nell'ipotesi che la funzione

$$\varepsilon_r + \frac{1}{m-2}(\varepsilon_r + \varepsilon_r)$$

sia continua e dotata di derivata limitata in tutto l'intervallo $r_0\, r_1$ [1], si

[1] Quest'ipotesi non costituisce una limitazione in quanto le grandezze fisiche che la funzione in discorso e la sua derivata rappresentano debbono ad essa soddisfare necessariamente (Cfr. Somigliana, *Sulla teoria delle distorsioni elastiche*, Rend. R. Accad. dei Lincei, vol. XXIII, ser. 5ª, 1° sem. 1914).

può porre

$$r\left[\varepsilon_r+\frac{1}{m-2}(\varepsilon_r+\varepsilon_t)\right]\frac{d\varrho}{dr}=\frac{d}{dr}\left\{\varrho r\left[\varepsilon_r+\frac{1}{m-2}(\varepsilon_r+\varepsilon_t)\right]\right\}-$$

$$-\varrho\frac{d}{dr}\left\{r\left[\varepsilon_r+\frac{1}{m-2}(\varepsilon_r+\varepsilon_t)\right]\right\}=\frac{d}{dr}\left\{\varrho r\left[\varepsilon_r+\frac{1}{m-2}(\varepsilon_r+\varepsilon_t)\right]\right\}-$$

$$-\varrho r\frac{d}{dr}\left[\varepsilon_r+\frac{1}{m-2}(\varepsilon_r+\varepsilon_t)\right]-\varrho\left[\varepsilon_r+\frac{1}{m-2}(\varepsilon_r+\varepsilon_t)\right],$$

sicchè l'equazione di condizione diviene

$$\int_{r_0}^{r_1}\frac{d}{dr}\left\{\varrho r\left[\varepsilon_r+\frac{1}{m-2}(\varepsilon_r+\varepsilon_t)\right]\right\}dr-$$

$$-\int_{r_0}^{r_1}\varrho r\frac{d}{dr}\left[\varepsilon_r+\frac{1}{m-2}(\varepsilon_r+\varepsilon_t)\right]dr-\int_{r_0}^{r_1}\varrho(\varepsilon_r-\varepsilon_t)\,dr=0\,.$$

E finalmente, eseguendo l'integrazione indicata nel primo termine, e riducendo, si ha

$$\left|_{r_0}^{r_1}\varrho r\left[\varepsilon_r+\frac{1}{m-2}(\varepsilon_r+\varepsilon_t)\right]-\right.$$

$$-\int_{r_0}^{r_1}\varrho\left\{r\frac{d}{dr}\left[\varepsilon_r+\frac{1}{m-2}(\varepsilon_r+\varepsilon_t)\right]+(\varepsilon_r-\varepsilon_t)\right\}dr=0\,.$$

Questa condizione deve riuscire identicamente verificata qualunque siano i valori che si attribuiscono alla funzione $\varrho$; perciò occorre notoriamente che si abbia qualunque sia $r$

$$\text{[I]}\qquad \frac{d}{dr}\left[\varepsilon_r+\frac{1}{m-2}(\varepsilon_r+\varepsilon_t)\right]=\frac{\varepsilon_t-\varepsilon_r}{r}$$

ed inoltre

$$\text{[II]}\qquad \varepsilon_r+\frac{1}{m-2}(\varepsilon_r+\varepsilon_t)=0\,.\qquad \text{per}\begin{cases}r=r_0\\ r=r_1\end{cases}$$

È facile mettere in evidenza il significato meccanico di queste condizioni. Basta introdurre le tensioni principali, che indicheremo per ovvie ragioni di analogia rispettivamente con $\sigma_z$, $\sigma_r$, $\sigma_t$ e ricordare che esse sono legate alle dilatazioni dalle relazioni

$$\sigma_z=\frac{2G}{m-2}(\varepsilon_r+\varepsilon_t)$$

$$\sigma_r=2G\left[\varepsilon_r+\frac{1}{m-2}(\varepsilon_r+\varepsilon_t)\right]$$

$$\sigma_t=2G\left[\varepsilon_t+\frac{1}{m-2}(\varepsilon_r+\varepsilon_t)\right].$$

L'equazione indefinita (I) diviene allora immediatamente

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{\sigma_t - \sigma_r}{r}$$

o, ciò che fa lo stesso,

$$\text{[III]} \qquad \frac{d(r\sigma_r)}{dr} = \sigma_t .$$

Invece le equazioni ai limiti (II) si riducono, come era facilmente prevedibile, alla duplice condizione

$$\text{[IV]} \qquad \sigma_r = 0 \qquad \text{per} \begin{cases} r = r_0 \\ r = r_1 \end{cases} .$$

Il problema così impostato si può evidentemente risolvere in infiniti modi scegliendo la $\sigma_r$ ad arbitrio — con la sola riserva che essa sia continua, dotata di derivata limitata in tutto l'intervallo $r_0\, r_1$, e soddisfi agli estremi di esso alla (IV) — e deducendone poi secondo la (III) la $\sigma_t$.

Resta ben inteso che gli stati di deformazione che così si vengono a definire non soddisferanno *in generale* alle equazioni cosidette di congruenza, o di Saint-Venant, dalle quali noi abbiamo di proposito fatto astrazione.

Si può anzi, volendo, precisare: è infatti fuor di dubbio che il supporre ovunque soddisfatte dette equazioni non potrebbe che condurci ad una particolare distorsione di Volterra.

Altri casi particolari — distorsioni di Somigliana — si otterrebbero supponendo che le equazioni di congruenza fossero soddisfatte in tutto lo spazio occupato dal solido, eccezion fatta soltanto per certe ben determinate superficie che, in omaggio alle premesse ipotesi di simmetria, dovranno essere cilindriche e coassiali al solido stesso. È facile riconoscere che tra questi casi particolari sono compresi tutti quelli che abitualmente si realizzano nella costruzione delle artiglierie investendo a forza l'uno sull'altro più tubi così predisposti che il diametro esterno iniziale di ciascuno di essi sia leggermente maggiore del diametro interno iniziale di quello che lo dovrà abbracciare.

Ma i casi più tipici e generali si ottengono soltanto quando dalle equazioni di congruenza si prescinda completamente; si trovano allora, fra gli altri, tutti quegli stati, detti di *forzamento continuo*, che si producono spontaneamente quando si sottopone un cilindro cavo all'azione di pressioni interne così intense da determinarvi delle deformazioni permanenti; accade infatti che, così operando, gli strati interni, più deformati, mantengono poi in tensione gli strati esterni (anche dopo che la pressione ha cessato di agire), mentre alla lor volta, per reazione, vengono a trovarsi compressi.

Siffatti stati di coazione vennero recentemente preconizzati dagli ingegneri Jacob e Malaval dell'Artiglieria navale francese come quelli che, rea-

lizzando la più completa utilizzazione delle proprietà resistenti dei materiali, permetterebbero alle moderne artiglierie di sopportare, senza ulteriori deformazioni permanenti, pressioni di gran lunga più elevate di quelle tollerate in passato [1].

Io non posso nè debbo, per ragioni ovvie, entrar qui nella discussione dei problemi tecnici a cui alludo. Mi limito ad accennare ad una notevole proprietà comune a tutti questi stati di coazione; proprietà che in certi casi particolari era già stata rilevata da tempo, ma che ora riesce facile stabilire in modo assai più generale.

Prendiamo a tal fine in considerazione l'espressione della dilatazione cubica elementare

$$\Theta = \varepsilon_z + \varepsilon_r + \varepsilon_t .$$

Tenuto il debito conto delle ipotesi da noi fatte, nonchè dei risultati che ne abbiamo dedotti, essa può scriversi

$$\Theta = \frac{m-2}{2m\mathrm{G}}(\sigma_r + \sigma_t) = \frac{m-2}{2m\mathrm{G}}\left[\sigma_r + \frac{d(r\sigma_r)}{dr}\right].$$

Per conseguenza la dilatazione cubica totale, pel solito tronco di cilindro di lunghezza unitaria, sarà misurata da

$$2\pi\int_{r_0}^{r_1}\Theta\, r\, dr = \frac{m-2}{m\mathrm{G}}\pi\int_{r_0}^{r_1}\left[\sigma_r + \frac{d(r\sigma_r)}{dr}\right] r\, dr =$$

$$= \frac{m-2}{m\mathrm{G}}\pi\int_{r_0}^{r_1}\frac{d}{dr}(r^2\sigma_r)\, dr = \frac{m-2}{m\mathrm{G}}\pi\Big|_{r_0}^{r_1} r^2\sigma_r .$$

Ma, secondo la (IV), $\sigma_r$ si deve annullare tanto per $r = r_0$ come per $r = r_1$; la dilatazione cubica totale è adunque identicamente nulla.

In altre parole, il volume complessivo del tubo nello stato di coazione elastica che esso assume a riposo è identicamente eguale alla somma dei volumi che spetterebbero ai singoli elementi che lo compongono qualora questi, resi indipendenti gli uni dagli altri, potessero tutti assumere il loro stato naturale non deformato.

[1] Cfr. E. Bravetta, *La resistenza delle artiglierie*. Ed. Carlo Pasta, Torino, 1913.

Analisi. — *Sulle equazioni integrali.* Nota I di PIA NALLI, presentata dal Socio S. PINCHERLE [1].

1. In questa ed in altre Note riassumerò alcuni risultati da me ottenuti studiando due equazioni integrali, che comprendono come casi particolari quelle di Fredholm, di prima e seconda specie, a nucleo simmetrico.

Sia $K(s,t)$ una funzione reale definita nel dominio $a \leq s \leq b$, $a \leq t \leq b$, simmetrica e sommabile in detto dominio insieme col suo quadrato, sia poi $k(s)$ una funzione reale, misurabile, limitata, definita in $(a, b)$.

Mi occupo dello studio delle seguenti equazioni integrali:

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda k(s) \varphi(s) + \lambda \int_a^b K(s,t) \varphi(t)\, dt \tag{1}$$

$$0 = f(s) + k(s) \varphi(s) + \int_a^b K(s,t) \varphi(t)\, dt, \tag{2}$$

dove $\lambda$ è costante, e che per $k(s) = 0$ si riducono alle note equazioni di Fredholm di seconda e prima specie, a nucleo simmetrico.

2. Introduciamo alcune definizioni.

Data una funzione reale $g_0(s)$, definita in $(a, b)$, e sommabile in questo intervallo insieme col suo quadrato, chiameremo *iterate di* $g_0(s)$ *relativamente a* $K(s,t)$ *e* $k(s)$ le funzioni $g_1(s), g_2(s), \ldots$ definite dalle relazioni

$$g_n(s) = k(s)\, g_{n-1}(s) + \int_a^b K(s,t)\, g_{n-1}(t)\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Chiameremo $g_n(s)$ *iterata di ordine* $n$.

Se $m, n$ ed $r$ sono tre interi positivi ed $r \leqq n$ si ha, per le iterate di due funzioni $g_0(s)$ e $f_0(s)$,

$$\int_a^b g_n(s)\, f_m(s)\, ds = \int_a^b g_{n-r}(s)\, f_{m+r}(s)\, ds. \tag{4}$$

Facilmente si stabilisce la seguente relazione

$$g_n(s) = k^n(s)\, g(s) + \int_a^b K^{(n)}(s,t)\, g(t)\, dt,$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 6 settembre 1918.

essendo

$$(5)\quad \begin{cases} K^{(1)}(s,t) = K(s,t) \\ K^{(n)}(s,t) = k(s)\,K^{(n-1)}(s,t) + \int_a^b K(s,v)\,K^{(n-1)}(v,t)\,dv + \\ \qquad + k^{n-1}(t)\,K(s,t) \qquad (n=2,3,\ldots). \end{cases}$$

Se $\mu$ e $\nu$ sono due interi positivi si ha

$$(6)\quad K^{(\mu+\nu)}(s,t) = k^{\nu}(s)\,K^{(\mu)}(s,t) + k^{\mu}(t)\,K^{(\nu)}(s,t) + \\ + \int_a^b K^{(\nu)}(s,v)\,K^{(\mu)}(v,t)\,dv,$$

la quale dimostra che $K^{(n)}(s,t)$ *è funzione simmetrica di* $s$ *e* $t$.

Per $k(s)=0$ le $K^{(n)}(st)$ si riducono agli iterati del nucleo $K(s,t)$, nel senso di Fredholm. Noi chiameremo $K^{(n)}(s,t)$ $n^{esimo}$ *nucleo iterato di* $K(s,t)$ *per mezzo di* $k(s)$.

Dalla (6) si trae facilmente che *il nucleo iterato di ordine* $m$ *di* $K^{(n)}(s,t)$ *per mezzo di* $k^n(s)$ *coincide col nucleo iterato di ordine* $nm$ *di* $K(s,t)$ *per mezzo di* $k(s)$.

Formiamo le iterate di $K^{(r)}(s,t)$, dove $t$ si considera come costante, relative a $K^{(r)}(s,t)$ e $k^r(s)$, e denotiamo con $G_n^{(r)}(s,t)$ la iterata di ordine $n-1$ e con $G_1^{(r)}(s,t)$ la stessa $K^{(r)}(s,t)$, ossia poniamo

$$G_n^{(r)}(s,t) = k^r(s)\,G_{n-1}^{(r)}(s,t) + \int_a^b K^{(r)}(v,s)\,G_{n-1}^{(r)}(v,t)\,dv,$$
$$(n=2,3,\ldots),\quad (r=1,2,\ldots).$$

Si dimostra la seguente eguaglianza

$$(7)\quad G_n^{(r)}(s,t) = K^{(nr)}(s,t) - k^r(t)\,K^{((n-1)r)}(s,t),$$

quindi, per l'equazione di Fredholm le $G_n^{(r)}(s,t)$ si riducono ai nuclei iterati.

Dalla (7), per $r=1$, si trae

$$K^{(n)}(s,t) = \sum_{m=0}^{n-1} k^m(t)\,G_{n-m}^{(1)}(s,t)$$

e perciò

$$(8)\quad G_n^{(r)}(s,t) = \sum_{m=0}^{r-1} k^m(t)\,G_{nr-m}^{(1)}(s,t).$$

Per la (4) poi si ha

$$(9)\quad G_{\mu+\nu}^{(r)}(s,t) = k^r(s)\,G_{\mu+\nu-1}^{(r)}(s,t) + \int_a^b G_{\mu}^{(r)}(v,t)\,G_{\nu}^{(r)}(v,s)\,dv,$$

e per mezzo di questa si può dimostrare che, fissato $r$, se per qualche $n$ si ha $G_n^{(r)}(s, t) = 0$ quasi dapertutto, sarà allora quasi dapertutto $G_n^{(r)}(s, t) = 0$ per $n \geq 2$.

3. Introduciamo ora altre definizioni. Se una funzione $\varphi(s)$, reale o complessa, definita in $(a, b)$ e sommabile in questo intervallo insieme col quadrato del suo modulo, non nulla quasi dapertutto, soddisfa quasi dapertutto all'eguaglianza

$$(\mu - k(s))\,\varphi(s) = \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt,$$

$\mu$ essendo una conveniente costante, chiameremo $\varphi(s)$ una *funzione fondamentale* e $\mu$ la corrispondente *costante caratteristica* relative al nucleo $K(s, t)$ ed alla funzione $k(s)$.

Inoltre, se non è quasi dapertutto $(\mu - k(s))\,\varphi(s) = 0$ chiameremo $\varphi(s)$ *funzione fondamentale propria*, la chiameremo *impropria* nel caso contrario.

Se $k(s) = 0$ si ricade nelle funzioni fondamentali nel senso di Fredholm.

Una combinazione lineare a coefficienti costanti di un numero finito di funzioni fondamentali corrispondenti alla stessa costante caratteristica è funzione fondamentale corrispondente alla stessa costante.

*Se $\varphi_1(s)$ e $\varphi_2(s)$ sono funzioni fondamentali corrispondenti a costanti caratteristiche diverse si ha* $\int_a^b \varphi_1(s)\,\varphi_2(s)\,ds = 0$.

Risulta di qui che *le costanti caratteristiche sono reali e costituiscono un insieme numerabile* e che *la ricerca delle funzioni fondamentali può limitarsi a quelle delle funzioni fondamentali reali.*

4. Abbiamo i seguenti teoremi, estensioni di altri noti relativi alle funzioni fondamentali nel senso di Fredholm.

I. *Ogni funzione fondamentale relativa al nucleo* $K(s, t)$ *ed alla funzione* $k(s)$, *corrispondente alla costante caratteristica* $\mu$, *è anche funzione fondamentale relativamente al nucleo* $K^{(n)}(s, t)$ *ed alla funzione* $k^n(s)$, *corrispondente alla costante caratteristica* $\mu^n$.

II. Inversamente *se $n$ è dispari, ogni funzione fondamentale relativa a* $K^{(n)}(s, t)$ *e* $k^n(s)$ *corrispondente alla costante* $\mu$ *lo è anche relativamente a* $K(s, t)$ *e* $k(s)$ *e corrisponde alla costante* $\sqrt[n]{\mu}$, *la radice essendo presa nel senso aritmetico.*

*Se $n$ è pari e $\varphi(s)$ è una funzione fondamentale relativa a* $K^{(n)}(s, t)$ *e* $k^n(s)$ *corrispondente alla costante* $\mu$, *si ha* $\mu \geq 0$ *ed allora: o* $\varphi(s)$ *è funzione fondamentale relativamente a* $K(s, t)$ *e* $k(s)$ *corrispondente alla costante* $\sqrt[n]{\mu}$, *la radice reale essendo presa con segno conveniente, ovvero* $\varphi(s)$ *è la somma di due tali funzioni,* $\varphi_1(s)$ *e* $\varphi_2(s)$, *corrispondenti alle costanti caratteristiche* $\pm\sqrt[n]{\mu}$. *Si presenta il primo caso per* $\mu = 0$.

5. Cominceremo con l'occuparci di alcuni casi particolari.

Supponiamo che qualcuno dei nuclei iterati di $K(s,t)$ per mezzo di $k(s)$ sia nullo, e sia $K^{(r)}(s,t)$ il primo che si annulla [1].

Si dimostra che si ha $r=2$, quindi per $n$ pari $K^{(n)}(s,t)=0$ e per $n$ dispari $K^{(n)}(s,t)=k^{n-1}(t)K(s,t)$.

Si ha dunque

$$(k(s)+k(t))\,K(s,t)+\int_a^b K(s,v)\,K(v,t)\,dv=0\,. \tag{10}$$

Si trovano in questo caso notevoli proprietà della funzione $K(s,t)$ e si arriva fra l'altro alla seguente conclusione: *relativamente al nucleo* $K(s,t)$ *ed alla funzione* $k(s)$ *esistono le funzioni fondamentali proprie* $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, .. *formanti un sistema ortogonale e corrispondenti alle costanti caratteristiche* $\mu_1$. $\mu_2$, ... (non necessariamente distinte) *ed è*

$$(\mu_n^2-k^2(s))\,\varphi_n(s)=0$$

*e verso la funzione* $K(s,t)$ *converge in media la successione delle somme parziali della serie* $\sum_{n=1}^{\infty}(\mu_n-k(s))\,\varphi_n(s)\,\varphi_n(t)$, ciò che scriviamo nel seguente modo

$$K(s,t)\sim\sum_{n=}^{\infty}(\mu_n-k(s))\,\varphi_n(s)\,\varphi_n(t)\,. \tag{11}$$

Questa si può considerare come una generalizzazione della formula

$$K(s,t)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\,\psi_n(s)\,\psi_n(t) \tag{12}$$

che lega il nucleo simmetrico $K(s,t)$ alle funzioni $\psi_n(s)$ fondamentali nel senso di Fredholm ed alle corrispondenti costanti caratteristiche $\lambda_n$.

Tutte le volte che è valida la (11) si trovano facilmente (come mostreremo in altra Nota) le condizioni necessarie e sufficienti a cui deve soddisfare una funzione $f(s)$ perchè le (1) e (2) ammettano soluzioni, condizioni che per la (1) dipendono dal valore di $\lambda$, e soddisfatte queste condizioni si trova la forma generale delle soluzioni. Si generalizzano così alcuni risultati noti di Schmidt e Picard [2].

[1] È superfluo avvertire che supponiamo sempre che le eguaglianze fra funzioni valgano quasi dapertutto, fatta cioè eventualmente eccezione per insiemi di punti di misura nulla (misura lineare o superficiale a seconda dei casi).

[2] E. Schmidt, *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen*, I Teil [Mathematische Annalen, Bd 63 (1907), pp. 433-476]. E. Picard, *Sur un Théorème général relatif aux équations intégrales de première espèce* etc. [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, vol. 29 (1910), pp. 79-97].

Notiamo ancora che si arriva alla (11) nel caso particolare esaminato risolvendo l'equazione funzionale (10) nelle funzioni incognite $K(s, t)$ e $k(s)$.

6. Le condizioni del n. precedente mostrano come sarebbe interessante di poter mettere in ogni caso la funzione $K(s, t)$ sotto la forma (11).

A questo proposito sono interessanti le seguenti proposizioni:

*Se vale la* (11), *si avrà per qualunque* $r \geq 1$

$$K^{(r)}(s, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n^r - k^r(s)) \varphi_n(s) \varphi_n(t).$$

*Se per qualche r si ha*

$$K^{(r)}(s, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - k^r(s)) \psi_n(s) \psi_n(t),$$

*le* $\psi_n(s)$ *formando un sistema ortogonale, si potrà porre*

$$K^{(r)}(s, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n^r - k^r(s)) \varphi_n(s) \varphi(t),$$

*dove le* $\varphi_n(s)$ *formano ancora un sistema ortogonale e* $\varphi_n(s)$ *è una funzione fondamentale propria relativa a* $K(s, t)$ *e* $k(s)$, *corrispondente alla costante* $\mu_n$.

*Se è*

$$K^{(2)}(s, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n^2 - k^2(s)) \varphi_n(s) \varphi_n(t),$$

*le* $\varphi_n(s)$ *formando un sistema ortogonale, e* $\varphi_n(s)$ *essendo una funzione fondamentale propria relativa a* $K(s, t)$ *e* $k(s)$, *corrispondente alla costante* $\mu_n$, *si avrà*

$$K(s, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n - k(s)) \varphi_n(s) \varphi_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (\mu'_n - k(s)) \varphi'_n(s) \varphi'_n(t)$$

*le* $\varphi_n(s)$ *e* $\varphi'_n(s)$ *formando insieme un sistema ortogonale ed essendo* $(\mu'^2_n - k^2(s)) \varphi'_n(s) = 0$: in altri termini *se una relazione analoga alla* (11) *vale per una delle due funzioni* $K(s, t)$ *e* $K^{(2)}(s, t)$, *vale anche per l'altra.*

7. Un caso particolare interessante in cui la (11) diventa una generalizzazione della (12) è quello in cui $k(s)$ prende solamente un numero finito di valori, fatta eventualmente eccezione di valori presi in un insieme di punti $s$ di misura nulla.

Infatti, siano $n$ valori di $k(s)$ e supponiamo di avere dimostrata la (11) quando $k(s)$ prende $n - 1$ valori al più.

Se $v_1$ e $v_2$ sono due dei valori di $k(s)$ e si pone $h = \frac{v_1 + v_2}{2}$, se formiamo il secondo nucleo iterato di $K(s, t)$ per mezzo di $k(s) - h$, e lo

chiamiamo $P_2(s, t)$, siccome $(k(s) - h)^2$ prende al più $n - 1$ valori, per la $P_2(s, t)$ varrà una relazione analoga alla (11) e perciò varrà anche per $K(s, t)$, quando si sostituisca $k(s)$ con $k(s) - h$, ma ciò non altera la forma della (11).

Vale dunque la (11) per qualunque valore di $n$, se vale per $n = 1$.

Ora per $n = 1$ $k(s)$ è una costante $(k(s) = \mu)$ e la (12) si può scrivere

$$K(s, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (\mu + \lambda_n - k(s))\, \psi_n(s)\, \psi_n(t)$$

che ha precisamente la forma (11).

In seguito troveremo altri casi in cui vale la (11).

8. Un altro caso particolare è quello in cui si ha per qualche $r$ $G_2^{(r)}(s, t) = 0$.

Si dimostra che si possono dare due casi: o è $G_2^{(1)}(s, t) = 0$ ed allora si ha per qualunque $r$ ed $n \geq 2$ $G_n^{(r)}(s, t) = 0$, ovvero è $G_2^{(1)}(s, t) \neq 0$ e $G_2^{(2)}(s, t) = 0$ ed allora si ha per $r$ pari ed $n \geq 2$ $G_n^{(r)}(s, t) = 0$.

Nel primo caso si ha

$$K(s, t) \sim - \sum_{n=1}^{\infty} k(s)\, \varphi_n(s)\, \varphi_n(t)$$

dove le $\varphi_n(s)$ formano un sistema ortogonale e sono funzioni fondamentali proprie corrispondenti alla costante caratteristica zero. Si ha $k(s)\, \varphi_n(s) = \lambda_n\, \varphi_n(s)$, con $\lambda_n$ costante.

Nel secondo caso

$$K(s, t) \sim - \sum_{n=1}^{\infty} k(s)\, \varphi_n(s)\, \varphi_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (\mu'_n - k(s))\, \varphi'_n(s)\, \varphi'_n(t) ,$$

dove le $\varphi_n(s)$ e $\varphi'_n(s)$ formano insieme un sistema ortogonale, $\varphi_n(s)$ è una funzione fondamentale propria corrispondente alla costante zero, $\varphi'_n(s)$ è una funzione fondamentale propria corrispondente alla costante $\mu'_n$.

Si ha qui $(\mu'^2_n - k^2(s))\, \varphi'_n(s) = 0, k^2(s)\, \varphi_n(s) = \lambda_n^2\, \varphi_n(s)$ con $\lambda_n$ costante.

Si conclude dunque che se per qualche coppia $n, r$ risulta $G_n^{(r)}(s, t) = 0$ vale la (11).

Astronomia. — *Il problema dell'astrometria fotografica nel suo aspetto più generale.* Nota I di VITTORIO NOBILE, presentata dal Corrisp. V. CERULLI [1].

1. Ogni catalogo di posizioni stellari presuppone e definisce sempre, per quanto in modo indiretto ed implicito, con l'annesso sistema di fondamentali e di costanti, un triedro empirico di riferimento.

I movimenti relativi ad un simile sistema si possono considerare tanto più vicini a presentare il carattere « assoluto » quanto più prossimamente il detto triedro realizza i requisiti ideali di un triedro *inerziale*. Non è nostro scopo di analizzare qui per quali vie e fino a qual punto l'astronomia pratica riesca presentemente ad attuare questo processo di approssimazione continua, dal quale strettamente dipende la possibilità di pervenire a conclusioni stabili nello studio dei grandi problemi sulla costituzione dell'universo siderale e sui movimenti relativi degli aggruppamenti stellari. Si tratta di una questione complessa che tocca i fondamenti della dinamica e di cui, a dir vero, non pare oramai più lecito differire l'esame diretto se non si vuole che venga a mancare ogni senso e contenuto alle vaste e laboriose ricerche già intraprese intorno agli anzidetti problemi, ovvero tenersi paghi di risultati parziali e provvisorî raggiunti attraverso ipotesi arrischiate e procedimenti empirici. Vogliamo qui solo notare come, stante la impossibilità di collegare ad alcunchè di estraneo alla variabile configurazione stellare un triedro inerziale di riferimento, ogni procedimento tendente ad individuare un qualsivoglia triedro empirico debba necessariamente finir col dipendere, in modo essenziale, da quei soli parametri atti a definire *intrinsecamente* la configurazione medesima o parte di essa, cioè da quelli aventi carattere invariantivo rispetto ai diversi possibili sistemi di coordinate.

Considerando così le cose, appare, più che risoluta, assorbita e soppressa la questione di decidere se l'uso dei metodi visuali (osservazioni meridiane ed analoghe) presenti carattere di necessità di fronte ai problemi dell'astronomia stellare. Tale questione potrebbe solo sorgere qualora i particolari sistemi di coordinate, pel cui tramite quei metodi ottengono la rappresentazione della sfera celeste e dei cui elementi geometrici (polo terrestre, punto equinoziale, eclittica) consentono una diretta determinazione, presentassero *caratteristiche proprietà dinamiche*, nel senso che i corrispondenti triedri di riferimento fossero dotati di movimento noto rispetto a qualche triedro inerziale. Ciò non essendo, che invece l'operazione di riferire ad un triedro

[1] Pervenuta all'Accademia il 16 settembte 1918.

inerziale empirico un altro legato ai piani definiti dai movimenti della Terra è di gran lunga più soggetta a complicazioni e a conseguenti errori che non quella di riferire al primo un triedro collegato a date configurazioni stellari, segue che gli ordinarî sistemi in uso nella astronomia visuale non sono più necessarî, per lo studio dei movimenti stellari, di quanto sia per lo studio della geometria delle curve e delle superficie un particolare sistema di coordinate.

Non rimane così che una questione di convenienza pratica (¹) — quali sono appunto quelle che determinano nella trattazione dei problemi geometrici la scelta di un sistema di coordinate a preferenza di un altro — questione che, data la immensa superiorità del metodo fotografico su quello visuale nei riguardi della precisione, rapidità e sopratutto della simultaneità della documentazione, non può risolversi che a favore del primo. Il quale però non potrà più identificarsi con lo schema concepito e fissato nei congressi di Parigi, che rispecchia concezioni oramai sorpassate, ma dovrà trasformarsi in modo che la fotografia, lungi dal ridursi ad un espediente atto ad abbreviare e facilitare il compito del riferimento alle cosidette « fondamentali » possa assumere la sua funzione essenziale che è quella di fornire — indipendentemente da ogni possibile sistema di riferimento che l'elaboratore dei risultati creda di scegliere per lo studio del sistema « solidificato » — *la rappresentazione integrale ed intrinseca della sfera celeste apparente, cioè il complesso delle mutue distanze angolari.*

Il compito dell'astronomo *operatore* è con ciò esaurito.

2. Nel 1907 il Cerulli in un suo memorabile lavoro (²) affermava per primo nettamente la necessità di eliminare del tutto dalle operazioni di catalogazione stellare, e conseguentemente dalla intera astrometria, l'elemento visuale: necessità che non era allora — come forse neppure adesso — ben penetrata nello spirito degli astronomi, conservatori e tradizionalisti per eccellenza. Forse in considerazione della natura essenzialmente pratica delle obbiezioni sulle quali gli eventuali oppositori si sarebbero a preferenza indugiati, l'illustre autore giudicò opportuno di dare, in luogo di una dimo-

(¹) È quasi superfluo notare come la cosa cambi di aspetto quando si tratti dello studio dei movimenti della Terra, questioni nelle quali i piani fondamentali dei sistemi di coordinate dell'astronomia visuale (equatore ed eclittica), lungi dal rappresentare, come nell'astronomia stellare, un elemento accessorio e fonte di inutili complicazioni, hanno una funzione essenziale in quanto che la determinazione della loro posizione e movimenti costituisce l'*oggetto stesso* delle ricerche. In questo campo resterà probabilmente circoscritto il còmpito degli strumenti meridiani, l'impiego dei quali sarà anzi ancora necessario, finchè i progressi della tecnica non avranno resa possibile la fissazione fotografica della posizione del Sole rispetto alle stelle vicine.

(²) V. Cerulli, *Proposta di un catalogo stellare interamente fondato sulla fotografia* (Memorie della Società degli spettroscopisti italiani, vol. XXXVI, pp. 94 e 113).

strazione teorica della *possibilità* di una soluzione autonoma del problema della astrometria fotografica, una prova più tangibile della esistenza di simili soluzioni, col fornirne effettivamente due e sviluppare a fondo i calcoli relativi.

Le stesse considerazioni, nonchè il naturale desiderio di facilitare la rapida sostituzione del nuovo metodo ai vecchi, consigliando al Cerulli di dare ai proprî calcoli quella forma che permettesse la correzione immediata delle posizioni determinate visualmente, lo indussero ad adottare un sistema di coordinate sferiche coincidente con quello equatoriale (1900.0) definito dalle posizioni del catalogo di Newcomb. Quando lo scopo pratico non urga, il vincolarsi *a priori* ad un sistema polare di coordinate per la rappresentazione delle configurazioni stellari torna tuttavia svantaggioso, in quanto che viene per tal via ad imporsi con naturale suggestione, originata da evidenti cause geometriche e da ovvie analogie con gli antichi metodi, il concetto della catalogazione *per zone*. Il quale procedimento, oltre a non essere necessario e forse neppure conveniente coi nuovi metodi, toglie la chiara visione della essenza geometrica del problema nella sua generalità e occulta le soluzioni più semplici e dirette che esso comporta.

A parte la questione se qualcuna delle dette soluzioni possa essere immediatamente utilizzata in pratica, il segnalare la loro esistenza ci pare cosa opportuna perchè la facile analisi che conduce a stabilirle, pure senza nulla pregiudicare sulla scelta del più conveniente sistema di coordinate sferiche da adottarsi per uno studio d'insieme, permette un esame e un paragone critico preventivo dei diversi possibili metodi di catalogazione che si presentano alla scelta dell'astronomo. Di ciò ci occuperemo in un'altra Nota.

## Litologia. — *La liparite della Montagnola presso Civitavecchia.* Nota di GUSTAVO CUMIN [1], presentata dal Corrisp. F. MILLOSEVICH [2].

A cinque chilometri da Civitavecchia, sulla strada di Corneto, s'eleva a sinistra di essa, una collina, che sulle carte dell'Istituto Geografico Militare è chiamata « la Montagnola », mentre che tra gli abitanti dei dintorni è conosciuta sotto il nome di « Monte Rozzo » sotto il qual nome essa è pure nota nella letteratura geologica passata.

La collina che raggiunge una quota di 72 metri, si distingue dalle altre per la sua forma dirupata, dovuta alla maggior resistenza della roccia, rispetto

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Roma.

[2] Pervenuta all'Accademia il 20 agosto 1918.

alla « scaglia riccia » quaternaria ed alle marne pontiche che costituiscono le altre colline.

Varii autori si occuparono di questo piccolo affioramento lungo poco più di 150 metri e largo neanche un centinaio. Il primo fu il Ponzi [1] che citandolo lo scambiò con la « Torre di Orlando » dove però non affiorano roccie vulcaniche, senza aggiungervi altro, il Meli [2] dà una descrizione macroscopica della roccia classificandola come trachite miocenica, all'incontro il De Stefani [3] che la pone tra le nevaditi, la ritiene quaternaria. Varii appunti furono pubblicati in occasione della gita fatta dalla Società Geologica Italiana a Civitavecchia nel 1900, così il Mattirolo [4] ed il Neviani [5] citano la Montagnola di sfuggita, mentre il Franchi [6] esaminando alcune sezioni sottili della roccia la classifica come liparite microfelsitica d'età miocenica, nota inoltre la differenza di essa rispetto alle trachiandesiti della Tolfa descritte dal Riva [7].

Circa l'età della piccola manifestazione vulcanica, io propenderei, da quanto risulta dalle mie osservazioni, per quella quaternaria, non potendo però assolutamente escludere un'età più antica. Mi baso principalmente sulla mancanza di ciottoli nelle marne pontiche, che si dovrebbero trovare se si trattasse d'una manifestazione terziaria battuta dalle onde del mare in cui si deposero le marne stesse. Questo fatto pur non assumendo un valore decisivo, conferma sino ad un certo punto il mio giudizio.

Del resto il piccolo affioramento non permette di veder chiaramente il contatto tra la roccia effusiva ed i sedimenti, sia questo mascherato da detriti o da folta macchia di elci.

Macroscopicamente la roccia à un colore biancastro, nella massa fondamentale spiccano dei feno-cristalli di *sanidino* grossi pochi millimetri, granuli e cristalli di *quarzo* con quasi ugual frequenza e qualche rada laminetta di *biotite*. Qua e là la roccia à delle chiazze rossastre date dalla diffusione di materiale ferrugginoso, unico indizio d'un principio d'alterazione. Sul posto essa mostra in certi punti accenni ad una struttura fluidale ed uno sfaldamento in lastre irregolari.

(1) Ponzi G., *La Tuscia Romana e la Tolfa*. Mem. R. Acc. Linc., 1887. Roma.

(2) Meli R., *Sui dintorni di Civitavecchia*. Mem. R. Acc. Linc., serie III, vol. 5°.

(3) De Stefani C., *I vulcani spenti dell'Appennino settentrionale*. Boll. Soc. Geol. it., vol. X, pag. 490. Roma, 1890.

(4) Mattirolo E., *Gita della Soc. Geol. It. a Civitavecchia ed alla Tolfa*. Rassegna Mineraria, vol. XII, fasc. 11. Roma, 1900.

(5) Neviani A., *Relazione delle gite fatte a Civitavecchia ed alla Tolfa nei giorni 26 e 27 marzo 1900*. Boll. Soc. Geol. It., vol. XIX, pag. XXXII. Roma, 1900.

(6) Franchi S., *Analisi microscopica di alcuni esemplari di trachite*. Id., pag. XXXVII-XXXVIII.

(7) Riva C., *Osservazioni sulle trachiti andesitiche della Tolfa*. Atti Soc. Ital. di Sc. Nat., vol. XXXVII. Milano, 1898.

Al microscopio la roccia mostra una pasta fondamentale microcristallina, nella quale, qua e là sussistono delle plaghe microfelsitiche. Nel primo caso vi si osservano distintamente granuli di feldspato, quarzo e piccole laminette di biotite, nel secondo si vede un mosaico indeciso ed indeterminabile, dove appaiono pure degli aggregati feldspatici in forma di sferuliti, che a Nicols incrociati dànno la caratteristica croce nera. Su questo sfondo spiccano dei fenocristalli di *sanidino*, *quarzo*, *plagioclasi* e qualche lamina di *biotite*.

Il *sanidino* si presenta in sezioni rettangolari per lo più secondo (001) con le traccie di sfaldatura ben visibili, talvolta in granuli, sempre di aspetto fresco, percorsi da fratture nelle quali s'è insinuato il magma, dando dei prodotti di devitrificazione; di solito le fratture sono localizzate nei granuli arrotondati, le lamine invece sono a contorni netti. I cristalli sono allungati secondo la zona (001) : / (010), si presentano per lo più semplici, ma non mancano i gemminati secondo la legge di Carlsbad. Alcuni sono profondamente corrosi ed allora si osserva nella corrosione una ricristallizzazione della sostanza disciolta del cristallo, sì da causare una maggior abbondanza di microliti feldspatici. Talvolta si osserva intorno ai fenocristalli di sanidino un'aureola di microliti dello stesso materiale posti perpendicolarmente allo spigolo del cristallo.

Otticamente i fenocristalli si dimostrano come sanidini per l'estinzione di 0° su (001), mentre che essa varia tra i 2 ed i 4 gradi su (010). Le inclusioni sono rare, più frequente è lo *zircone* sia in granuli che in cristalli, più rari l'*apatite* in aghetti, e laminette di biotite.

Oltre che come fenocristalli il sanidino appare anche in forma di microliti ed in granuli che costituiscono la maggior parte della pasta dove questa à struttura microcristallina, dando luogo al caratteristico mosaico che vi si osserva.

I *feldspati calcosodici* sono rappresentati da pochissimi cristalli geminati secondo la legge dell'albite sola o combinata con quella di Carlsbad. Sulle lamelle dei geminati secondo l'albite si osserva una estinzione massima nella zona simmetrica di 12 a 16°, ciò che unitamente all'indice di rifrazione superiore a quello del quarzo fa ascrivere i cristalli all'*andesina*.

Nella pasta fondamentale si osservano pure alcuni microliti che rispetto alla direzione d'allungamento presentano un'estinzione variante dai 2 agli 8 gradi, sono riferibili, anche per l'indice di rifrazione, alla andesina.

In due generazioni appare il *quarzo* con cristalli ben individuati, ma di solito profondamente corrosi e fratturati specialmente ai margini, oppure in granuli informi, forma questa che appare specialmente nel secondo tempo.

I cristalli sono della solita forma prismatica e ipiramidata. Il quarzo presenta frequenti inclusi: granuli di zircone, aghetti di apatite, granuli di magnetite e specialmente del vetro con o senza bolle di gas. In una sezione

osservai intorno ad un granulo di quarzo un'aureola di microliti sanidiniche.

Nella massa microcristallina il quarzo appare sempre in granuli informi senza inclusioni ed a contorni indecisi.

La grandezza varia per i fenocristalli da 1 a 5 mm. e di 0.3-0.1 mm. per i granuli del secondo tempo.

La *biotite* anch'essa in due generazioni, in grosse lamine pleocroche fortemente corrose o quasi totalmente riassorbite, talvolta con una zona di materiale ferruginoso intorno. Il pleocroismo è tanto per i cristalli del primo che del secondo tempo.

$\mathfrak{a}$ = giallo bruno chiaro
$\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ = giallo bruno oscurissimo

Il contorno è irregolare o esagonale conforme la direzione della sezione. Le singole lamelle appaiono talvolta contorte, piegate, in qualche caso all'estremità della lamina staccate una dall'altra, talvolta sono larghe e corte, tal'altra invece sottili e lunghe. Eccetto qualche rara apatite non presentano inclusi.

Tra la massa fondamentale le laminette di biotite sono frequenti, ma piccolissime, raggiungendo appena 0.1 mm. mentre i fenocristalli raggiungono i 2 sino i 5 mm.

Inoltre la biotite appare, sebbene di rado, inclusa nei fenocristalli di segregazione posteriore.

Lo *zircone* appare in granuli, più raro ben individuato con le forme :(111) (100), sia incluso che tra la pasta fondamentale.

L'*apatite* rara in aghetti inclusa nei feldspati e nel quarzo. Infine la *magnetite* trovasi in granuli ed idiomorfa, inclusa nei cristalli di primo tempo o sparsa nella massa fondamentale.

Dall'osservazione microscopica la roccia appare, seguendo il Rosenbusch una *liparite microcristallina*.

L'analisi chimica à dato il seguente risultato:

| | |
|---|---|
| $SiO_2$ . . . | 76.41 |
| $TiO_2$ . . . | traccie |
| $Al_2O_3$ . . . | 13.94 |
| $FeO$ . . . | 1.01 |
| $MgO$ . . . | 0.25 |
| $CaO$ . . . | 0.66 |
| $Na_2O$ . . . | 0.56 |
| $K_2O$ . . . | 6.89 |
| $H_2O$ a 110° | 0.16 |
| Totale | 99.93 |

Peso specifico . . . 2.53

Confrontando la liparite della Montagnola con le roccie della Tolfa e del Sasso vediamo che essa si differenzia mineralogicamente per la mancanza di pirosseni e la poca frequenza dei feldspati calco-sodici abbondantemente rinvenuti dal Riva (1) e dal Washington (2). Di conseguenza essa varia anche chimicamente da essa, per il confronto riporto qui sotto le varie analisi sinora eseguite su queste roccie:

| | I (3) | II (4) | III (5) |
|---|---|---|---|
| $SiO_2$ | 67.61 | 65.19 | 62.71 |
| $Al_2O_3$ | 14.04 | 16.04 | 17.43 |
| $Fe_2O_3$ | 5.40 | 1.16 | 0.52 |
| $FeO$ | | 2.48 | 4.69 |
| $MgO$ | 0.65 | 0.99 | 1.41 |
| $CaO$ | 3.71 | 2.92 | 4.45 |
| $Na_2O$ | 5.50 | 2.26 | 2.82 |
| $K_2O$ | 2.41 | 6.11 | 4.36 |
| $H_2O$ a 110° | 2 28 | 1.85 | 1.60 |
| Totale | 101.60 | 99.00 | 99.99 |

Dal quadro esposto risulta esser sinora la liparite della Montagnola la roccia vulcanica più acida sinora riscontrata nel Lazio; è però probabile ch'essa si avvicini alla liparite del Monte Virginio studiata otticamente dal Bucca (6), vista la quasi identica costituzione mineralogica di entrambe.

(1) Riva, op. cit.

(2) Washington, *Italian Petrological Sketsches III.* Journ. of Geologie, vol. V, 1897. pag. 34.

(3) Vom Rath, *Mineralogisch-geognostische Fragmente aus Italien.* IV. *Das Bergland von Tolfa.* Zeitschrift. der Deutsch. Geol. Gesell. Bd. XVIII, 1866, pag. 585, roccia di Poggio della Capanna. Tolfa.

(4) Washington, op. cit. Roccia di Monte della Tolfa.

(5) Aichino in Sabatini, *I Vulcani Cimini*, pag. 507. Roma, 1912. « Peperino » di Pian d'Angelo. Tolfa.

(6) Bucca L., *Contribuzione allo studio petrografico dell'Agro Sabatino e Cerite.* Boll. Com. Geol. It., 1886, nn. 5 e 6. Roma, 1886

Agraria. — *Genealogia del frumento Carlotta Strampelli.* Nota del prof. N. Strampelli, presentata dal Socio Giuseppe Cuboni [1].

Gli incroci di frumenti da me eseguiti sino ad oggi ascendono al numero di 306, e ben 92 sono quelli che eseguii nei due primi anni del mio lavoro d'ibridazione (1904 e 1905) e, questi, tutti allo scopo esclusivo di ottenere varietà atte ai climi ed ai terreni dell'Italia centrale e settentrionale, resistenti alle ruggini e benchè di paglia alta (elastica però) resistenti anche all'allettamento per esser quindi suscettibili delle più alte produzioni di granella e di paglia ottime.

Da detti 92 incroci, per il fenomeno della disgiunzione dei caratteri nelle loro seconde e successive generazioni ottenni numerosissime forme (teoricamente secondo i calcoli delle possibili combinazioni dei caratteri antagonistici di ciascuna coppia di genitori, supposto che questi seguano le leggi di Mendel, le forme apparibili avrebbero dovuto essere ben 1,148,308). Di esse solo 3312 furono oggetto di studio e rese fisse furono anche sottoposte alle opportune cure colturali, per tali prove fu completato il giudizio sul loro valore e poterono essere eseguiti gli opportuni scarti, dopo dei quali mi trovai in possesso di parecchie diecine di pregievolissime nuove varietà. Fra queste prescelsi, quale unico tipo da moltiplicare nella classica pianura reatina, per sostituirvi il vecchio « Rieti » quella che presentava la maggiore adattabilità alle diverse condizioni di coltura e di ambiente, cioè quella cui imposi il nome di Carlotta Strampelli e che proviene dall'incrocio Rieti × Massy, (fig. 1 e 2) eseguito nel 1905.

Nella prima generazione (1906) di tale incrocio si ebbe naturalmente l'apparizione dei soli caratteri dominanti e tutti gli individui uniformi presentarono (fig. 3):

1°) Spiga allungata appuntita (Rieti);

2°) Spiga senza il crescendo di intensità nella parte superiore (Rieti);

3°) Spiga a sezione rettangolare, appiattita (Rieti);

4°) Glume tronche (Massy);

5°) Rostro breve (Massy);

6°) Glumelle esterne più brevi delle interne (Massy);

7°) Glumelle esterne mutiche (eccezione 3 e 4 subaristate verso l'apice della spiga (Massy);

[1] Pervenuta all'Accademia il 30 luglio 1918.

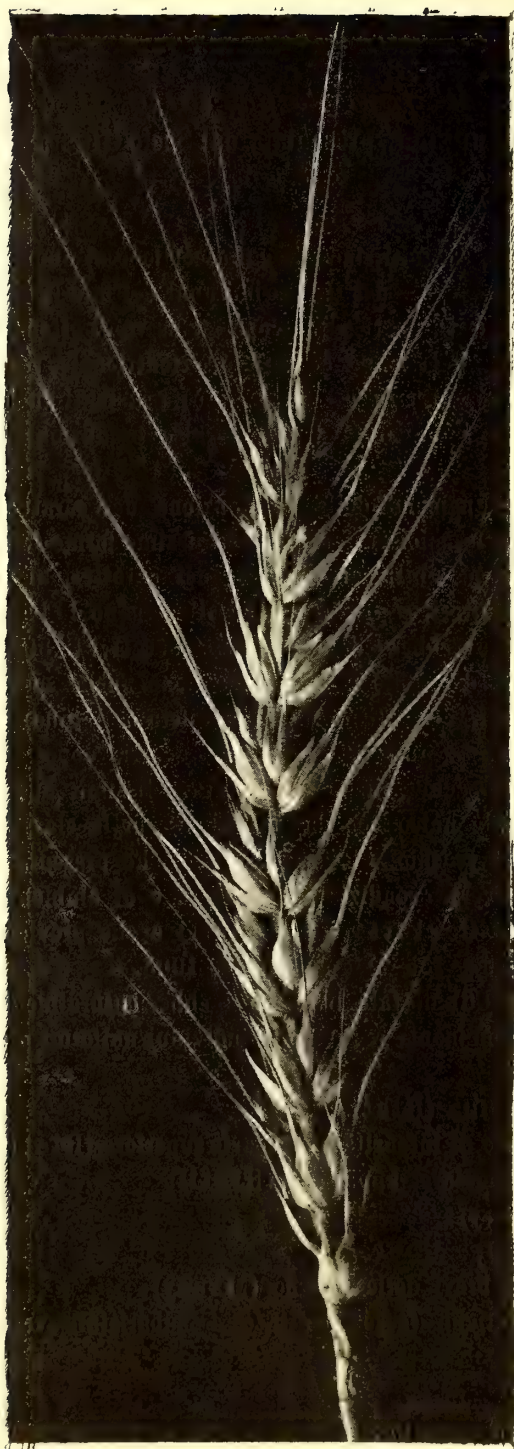



FIG. 1. — Frumento Rieti originario.

8°) Culmi poveri di fasci libero legnosi, mal disposti e di cattiva forma (Rieti);

9° Paglia, foglie e glume suscettibilissime a gli attacchi delle ruggini (Massy);

10°) Cariossidi piccole (Massy);

Nella seconda generazione (1907) apparvero moltissime forme (essendo 10 le coppie dei caratteri antagonistici tra il Rieti ed il Massy, teoricamente sarebbero dovute apparire 1024 forme); ne esaminai qualche centinaio e di queste solo tredici le ritenni meritevoli di esser sottoposte allo studio ed al lavoro di fissazione, prima, ed alle prove colturali, poi. Delle tredici forme prescelte, però, quella contraddistinta col numero 367, di classifica dei tipi dell'ibrido Rieti × Massy, attrasse maggiormente la mia attenzione, perchè riuniva ottimi caratteri e tutti *remissivi*, tanto da convincermi di avere incappato in un individuo omozigotico e di poter subito quindi raggiungerne la fissità.

Nella 3ª generazione però (anno 1908), nell'aiula di tale tipo (637) un cesto si distinse da tutti gli altri per avere la paglia più pu-

Fig. 2. — Frumento Massy.

Fig. 3. — Ibrido Rieti × Massy.
1ª Generazione.

FIG. 4. — Frumento Carlotta Strampelli.

lita di tutti gli altri cesti e per portare al medesimo livello tutte le spighe, che erano anche per sviluppo quasi perfettamente uguali fra di loro.

Le cariossidi di questo cesto, che contraddistinsi col numero 637 *b*, per distinguerlo dagli altri cui diedi il numero 637 *a*, furono seminate separatamente e tanto nel 1909 (4ª generazione), quanto nel 1910 (5ª generazione), non si ebbe alcuna disgiunzione ulteriore, si potè invece confermare la sua superiorità specialmente in riguardo alla resistenza alle ruggini. Dopo ciò passò alle prove culturali, per le quali tale superiorità fu ancora più evidente e si conseguirono costantemente produzioni superiori ai *41* quintali per ettaro.

Nel 1914 all'*Esposizione delle novità agrarie in Roma*, presentai questo tipo (637 *b*) sotto il nome di frumento Carlotta Strampelli (fig. 4).

Ora siamo al quarto anno di prove regionali eseguite da agricoltori (318 nel 1917), e da istituzioni agrarie delle varie provincie dell'Italia centrale e settentrionale. I risultati dei primi tre anni di tali prove regionali, consacrati nelle relative relazioni, concludono per la superiorità del nuovo frumento su tutte le varietà postegli a confronto e con una media generale di sovrapposizione conseguita per esso di quintali 5.50 per ettaro.

Le notizie che ci pervengono intorno alle colture dell'annata agraria in corso (ettari 5500 circa) suonano unanime entusiasmo. Il Ministero di Agricoltura e quello degli Approvigionamenti hanno già preso opportune disposizioni perchè tutto il Carlotta Strampelli, ora raccolto, venga impiegato per le semine del prossimo autunno. Per tali provvedimenti nelle semine 1918 si copriranno almeno 100,000 ettari i quali nel 1919 potranno produrre tanta semente bastante per oltre due milioni di ettari, i quali stando alla accennata media generale di sovrapproduzione, potrebbero dare nel 1920 ben undici milioni di quintali di più che se venissero seminati con le altre varietà sin qui coltivate.

Biologia. — *Considerazioni sulla costituzione fisica del citoplasma desunte da nuovi dati morfologici sulle cellule coltivate « in vitro »* (1). Nota di Giuseppe Levi, presentata dal Socio Battista Grassi (2).

Coll'insistere negli studî sulle cellule viventi coltivate in vitro, mi fu concesso di estendere e di completare con nuovi dati le osservazioni sulle quali ho precedentemente riferito (3); una documentazione estesa di tali fatti sarà data in una monografia di imminente pubblicazione.

Io ho dimostrato, in pieno accordo coi risultati apparsi poco prima dei miei di W. ed M. Lewis, che nelle colture le cellule mesenchimali, le quali dal tessuto emigrano nel coagulo, sono quasi sempre molto espanse in superficie, e ritenni che per questa condizione fosse possibile di compiere l'analisi dell'intima costituzione del citoplasma; i condriosomi risaltano sul tenue citoplasma omogeneo nel quale sono inclusi, perchè assai più refrangenti; inoltre essi sono sempre mobilissimi.

Come tutti sanno, ben diversa è l'imagine che si ha nelle cellule dei tessuti viventi; queste appaiono opache, refrangenti e granulose, ed i condriosomi non sono quasi mai nettamente individualizzati.

Io mi posi il problema, quali cause abbiano determinato un mutamento tanto profondo nella costituzione della cellula, quando emigra dal tessuto nel plasma. Sebbene la espansione in superficie faciliti, per ragioni evidenti, l'analisi ottica delle parti contenute nella cellula, per varî argomenti mi resi conto che questo fattore non è sufficiente; inoltre resta da spiegare la causa dell'espansione in superficie, la quale non può essere considerata come l'effetto di un adattamento strettamente meccanico.

Certamente non appena le cellule arrivano nel coagulo, la massa protoplasmatica complessiva si accresce, e questo dipende, almeno prevalentemente, da adsorpzione di una gran quantità d'acqua; l'accrescimento della cellula avviene nella forma più favorevole al metabolismo, cioè coll'estensione della superficie assorbente, la quale può manifestarsi coll'assottigliamento del corpo cellulare in una lamina tenuissima — ed è il caso più frequente — oppure coll'emissione di lunghi e sottili prolungamenti, la quale del resto va sempre associata ad un assottigliamento del corpo cellulare.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia umana della R. Università di Palermo.

(2) Pervenuta all'Accademia il 12 settembre 1918.

(3) Levi G., *La costituzione del protoplasma studiata nelle cellule viventi fuori dell'organismo,* 1916, Arch. di Fisiol., vol. 14.

Se invece l'imbibizione è assai limitata, la cellula assume nel coagulo una forma affusata.

L'imbibizione ci spiega l'estrema trasparenza che acquista il citoplasma, e ci spiega pure perchè i condriosomi, che erano immobili nelle cellule del tessuto, possano, trovandosi in un mezzo più fluido, spostarsi con tanta rapidità.

Ma l'espansione in superficie non potrebbe essere interpretata come l'effetto anzichè la causa dell'imbibizione? L'ipotesi che la prima, essendo connessa ad un abbassamento della tensione superficiale, renda la cellula più permeabile all'acqua, non può essere eliminata *a priori*.

Certameate nell'analisi di fenomeni tanto oscuri è difficile di precisare quale sia il fattore causale e quale la conseguenza; ma per le cellule in vitro l'estensione in superficie trova la spiegazione più ovvia, se si considera come il risultato di un adattamento, che ristabilisce il rapporto fra massa e superficie, turbato dall'aumento di volume della cellula.

Cerchiamo ora di definire in qual modo la struttura della cellula venga modificata dall'imbibizione.

Le cellule della zona di invasione sono costituite da un colloide omogeneo ed assai fluido e da parti colloidali in una fase più densa, i condriosomi: la mobilità grandissima degli organuli sospesi nel primo ci dà la certezza, che questo si trova nella fase liquida, mentre la forma ben definita, per quanto mutevole dei condriosomi, dimostra che essi son costituiti da parti gelificate, nelle quali però avvengono continuamente dei mutamenti nello stato di aggregazione.

Le cellule a forma lamellare della zona di invasione possono adunque essere definite come una sospensione idrofila, nella quale le parti nella fase più densa, i condriosomi, per il loro volume e perchè molto disseminati sono visibili con mezzi ottici ordinarî.

Nelle cellule del frammento di tessuto esplantato le parti nelle due fasi diverse non sono ben distinte con mezzi ottici ordinarî, perchè il costituente nella fase meno densa ha un'indice di refrazione più vicino a quello dei condriosomi, ed anche perchè questi sono tanto ravvicinati, che è impossibile di differenziarli otticamente dalla sostanza in cui sono contenuti.

Inoltre si tenga presente che nelle cellule del tessuto i condriosomi sono immobili, il che dimostra che la sostanza fondamentale nella fase meno densa che li contiene è gelatinizzata; queste cellule sarebbero adunque costituite da due gel di densità diversa.

L'imbibizione che avviene quando la cellula emigra dal tessuto nel plasma, interessa prevalentemente il colloide nella fase meno densa, di modo che questo subisce una peptizzazione, si rigonfia enormemente e diviene meno refrangente, molto meno il colloide più denso, il condrioma; e ciò si accorda pienamente coi fatti illustrati da Mayer e Schaeffer, che la presenza

di lipoidi in un gel limita il grado di imbibizione da parte di questo; e noi sappiamo che i condriosomi sono appunto costituiti da complessi lipoproteici.

L'imbibizione può interessare tutto il citoplasma, ma non di rado è limitata alla regione ove più attivo è il movimento protoplasmatico, all'ectoplasma, mentre l'endoplasma appare spesso denso ed opaco, i condriosomi vi sono addensati ed immobili; il che lascia supporre che in questa regione il colloide nella fase meno densa sia gelificato, mentre nell'ectoplasma, tenuto conto della mobilità dei condriosomi, è certamente nella fase liquida.

Le modificazioni nella struttura del citoplasma sono reversibili; se si mantiene per un periodo da 1 a 2 ore una coltura attiva alla temperatura di 15°-20°, i movimenti protoplasmatici si arrestano, e nello stesso tempo la struttura della cellula diviene simile a quella che era prima della migrazione nel plasma; se la temperatura si eleva di nuovo, si ripetono nelle cellule le trasformazioni strutturali, che indicano un grado elevato di imbibizione.

Queste esperienze dimostrano adunque la reversibilità di tali fenomeni intimamente connessi all'attività di locomozione della cellula.

Parimenti durante la mitosi, come fu da me dimostrato in passato [1], i caratteri fisici delle cellule viventi si trasformano per un addensamento del condrioma; è molto probabile che al mutamento nelle proprietà ottiche contribuisca una gelificazione, dipendente da brusca sottrazione d'acqua, del colloide nella fase meno densa.

Durante la telofase, per abbassamento della tensione superficiale, avviene in regioni limitate della superficie una parziale idratazione del colloide, ed in quel punto il citoplasma emette quelle caratteristiche gemme ameboidi di aspetto ialino, del significato delle quali mi occupai nel 1916. Per questa via avviene una rapida idratazione del colloide nella fase meno densa, in seguito alla quale la cellula ridiviene trasparente e riprende la forma lamellare, che aveva prima della mitosi; contemporaneamente i condriosomi divengono mobili, il che dimostra che è avvenuta una peptizzazione di quel colloide.

I condriosomi cambiano continuamente di forma e di posizione, tanto più rapidamente quanto più vivace è l'attività di locomozione della cellula. Inoltre la massa complessiva del condrioma può a vicenda crescere o diminuire. Questo dimostra, che i condriosomi possono sottrarre o rispettivamente cedere acqua ed altre sostanze dal colloide nella fase meno densa in cui sono sospesi.

Ciò riescirebbe inconciliabile col presupposto di una netta distinzione morfologica e chimica fra il colloide nella fase liquida ed i condriosomi; ma ciò non è certamente.

[1] Levi G., *Il ritmo e le modalità della mitosi nelle cellule viventi collivate in vitro*, 1916, Arch. ital. di Anat. e di Embr., vol. 15.

Già Fauré-Fremiet aveva ammessa l'esistenza nella parte fondamentale del citoplasma di sostanze lipoidi; queste essendo disciolte resterebbero invisibili al microscopio, ma potrebbero gelificare ed assumere la forma ben definita di granuli e di filamenti.

Così il fenomeno inverso si spiega con una peptizzazione dei condriosomi, in seguito alla quale essi perdono i caratteri di entità morfologiche.

Tutto ciò ci induce a modificare alquanto il punto di vista espresso in passato da qualche citologo, ed al quale io stesso mi ero avvicinato, che i condriosomi siano organuli immutabili. Essi neppure dal punto di vista strettamente morfologico costituiscono sempre individualità definite, ma quelle che potrebbero sembrare tali si uniscono o si dissociano assumendo forme diverse da quelle che avevano prima.

Per di più tutto lascia supporre un continuo scambio di sostanze fra i colloidi nelle due fasi diverse, che formano il substrato fisico dei due costituenti morfologici del citoplasma.

Varî fatti dimostrano adunque, per quanto per via indiretta, che nelle cellule coltivate in vitro avviene un'idratazione della parte fondamentale del citoplasma, e questa spiega i profondi mutamenti nella loro forma e costituzione, i quali debbono essere interpretati come un fenomeno di regolazione, determinato dall'ambiente tanto diverso in cui le cellule si trovano.

Ma la causa dell'imbibizione ci sfugge ancora, ed a spiegarla non possiamo invocare che delle ipotesi; dei dati più sicuri si potranno avere quando saranno più progredite le ricerche sperimentali sui fattori che determinano le variazioni nella forma delle cellule in vitro.

La proprietà che hanno varie cellule, ma soprattutto quelle dell'embrione in determinate fasi dello sviluppo, di legare al protoplasma una grande quantità d'acqua, fu attribuita a forze osmotiche; molti fatti, e specialmente quelli messi in luce da Backmann e da Ruffini, dimostrano l'importanza di questo fattore.

Però negli ultimi anni incominciò a predominare la tendenza di attribuire quella proprietà delle cellule più ad affinità dei costituenti colloidali, anzichè all'influenza dei cristalloidi contenuti nella sostanza organizzata.

Martin Fischer ha dimostrato, che minime quantità d'acido nelle cellule ne elevano l'affinità per l'acqua. D'altra parte le ricerche da me eseguite in questo senso dimostrano, che le variazioni nella pressione osmotica del mezzo non modificano in modo sensibile l'imbibizione delle cellule.

Seguendo le vedute di M. Fischer ritengo probabile, che nelle cellule in vitro per le particolari condizioni in cui esse si trovano, venga ostacolata l'eliminazione dei prodotti catabolici acidi e che la presenza di idrogemini liberi determini l'imbibizione del colloide nella fase meno densa.

La conseguenza diretta di questo fenomeno è l'effetto di superficie, il quale è tanto utile al metabolismo della cellula; così l'equilibrio fra ana-

bolismo e catabolismo si ristabilisce e la cellula può vivere relativamente a lungo.

Il problema della struttura del citoplasma è stato da me studiato in varî elementi, ma a preferenza nelle cellule migranti del mesenchima e nei mioblasti; nelle prime è semplificato dal fatto, che nella sostanza fondamentale omogenea per lo più non si vedono altri organi all'infuori dei condriosomi, e delle inclusioni che eventualmente si possono formare per turbamenti nel metabolismo, quali goccie di grasso o granulazioni proteiche.

Nei mioblasti il problema diviene più complesso per la presenza nel citoplasma di organuli deputati alla funzione specifica, delle miofibrille. La costituzione e la distribuzione di queste può rimanere simile a quelle che erano nel tessuto; ma spesso, per effetto dell'imbibizione delle cellule, possono prodursi nella loro struttura modificazioni di non lieve entità; ma su tale argomento mi propongo di riferire in altra occasione.

E. M.

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

---

## MEMORIE E NOTE
## DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

*pervenute all'Accademia durante le ferie del 1918.*

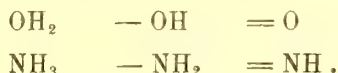
(**Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo**)

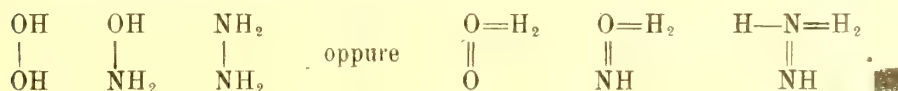
### Chimica didascalica. — *Comparazioni e ravvicinamenti. Acqua ed ammoniaca.* Nota del Socio G. Ciamician [1].

I.

A nessuno può sfuggire l'utilità delle comparazioni e dei ravvicinamenti nell'insegnamento della chimica, perchè essi servono o possono servire in certi casi a ritenere ed anche a meglio comprendere reazioni apparentemente di indole diversa o poco collegate. Credo però di non fare opera oziosa mettendo in rilievo in questa Nota alcune relazioni che passano fra i derivati dell'acido carbonico e quelli della serie cianica in base all'analogia dell'acqua con l'ammoniaca.

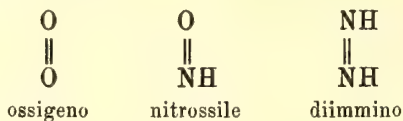
Come è noto l'acqua, l'ossidrile e l'ossigeno sono comparabili in tutta la chimica rispettivamente all'ammoniaca, al gruppo amminico ed all'immino:

$$\begin{array}{lll} OH_2 & -OH & =O \\ NH_3 & -NH_2 & =NH\,. \end{array}$$

E come ha insegnato il mio amico prof. Angeli [2], a queste relazioni fanno seguito quelle esistenti fra l'acqua ossigenata, l'idrossilammina e l'idrazina nelle loro due forme tautomere:

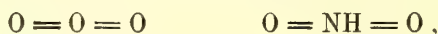
$$\begin{array}{ccc} OH & OH & NH_2 \\ | & | & | \\ OH & NH_2 & NH_2 \end{array} \quad \text{oppure} \quad \begin{array}{ccc} O{=}H_2 & O{=}H_2 & H{-}N{=}H_2 \\ \| & \| & \| \\ O & NH & NH \end{array}\,.$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 19 settembre 1918.

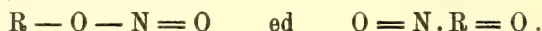
(2) Questi Rendiconti, 1910, II, pp. 29 e 94; 1915, I, pag. 1096.

Inoltre all'ossigeno molecolare corrisponde la diossiammoniaca o il nitrossile di Angeli, che non esiste se non in soluzione e si fissa sulle aldeidi, per cui si comprende che il diimmino sarà più instabile ancora

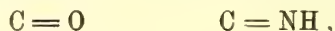
$$\underset{\text{ossigeno}}{\begin{matrix} O \\ \| \\ O \end{matrix}} \qquad \underset{\text{nitrossile}}{\begin{matrix} O \\ \| \\ NH \end{matrix}} \qquad \underset{\text{diimmino}}{\begin{matrix} NH \\ \| \\ NH \end{matrix}}$$

e si può scindere, come egli ha rilevato, in tre modi diversi: cioè in $N_2$ ed $H_2$, $N_2$ e $N_2H_4$ ed in $N_3H$ e $NH_3$.

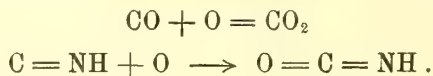
Si potrebbe per ultimo comparare l'ozono all'acido nitroso nella forma imminica,

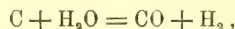
$$O = O = O \qquad O = NH = O\,,$$

per cui i nitriti dovrebbero poter esistere nelle due forme tautomere

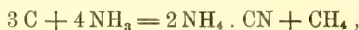
$$R - O - N = O \quad \text{ed} \quad O = N.R = O\,.$$

## II.

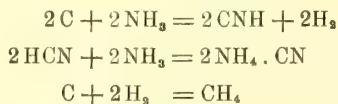
In base a queste analogie risulta evidente la relazione fra l'ossido di carbonio e l'acido cianidrico [1], col carbonio bivalente,

$$C = O \qquad C = NH\,,$$

e però si comprende meglio perchè i cianuri si ossidano facilmente per dare i cianati, giacchè l'acido cianico corrisponde all'anidride carbonica:

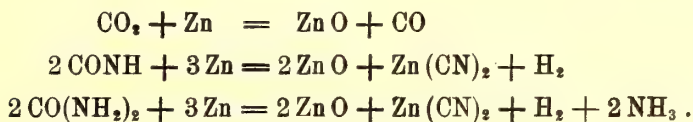
$$CO + O = CO_2$$
$$C = NH + O \longrightarrow O = C = NH\,.$$

[1] Si potrebbe ricercare se v'è una reazione comparabile alla produzione del gaz all'acqua,

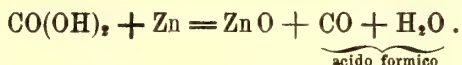
$$C + H_2O = CO + H_2\,,$$

ed in proposito si potrebbe citare la scomposizione dell'ammoniaca col carbone rovente (vedi Kuhlmann, Gmelin-Kraut, Handbuch der anorganischen Chemie, vol. I, parte 3ª, pag. 725)

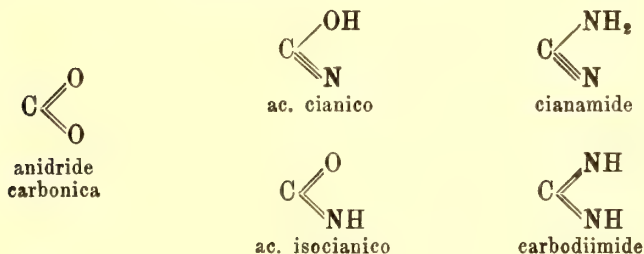
$$3\,C + 4\,NH_3 = 2\,NH_4\,.\,CN + CH_4\,,$$

per cui si forma cianuro ammonico e metano. Scindendo la reazione nel seguente modo:

$$2\,C + 2\,NH_3 = 2\,CNH + 2H_2$$
$$2\,HCN + 2\,NH_3 = 2\,NH_4\,.\,CN$$
$$C + 2\,H_2 \;= CH_4$$

l'analogia, nella prima equazione, sarebbe raggiunta.

Inversamente poi l'acido cianico viene ridotto dallo zinco e così pure l'urea [1] (vedi più avanti), analogamente alla nota riduzione dell'anidride carbonica collo zinco:

$$CO_2 + Zn = ZnO + CO$$
$$2\,CONH + 3\,Zn = 2\,ZnO + Zn(CN)_2 + H_2$$
$$2\,CO(NH_2)_2 + 3\,Zn = 2\,ZnO + Zn(CN)_2 + H_2 + 2\,NH_3 \,.$$

In queste due reazioni invece dell'acido cianidrico si ottiene naturalmente cianuro di zinco ed idrogeno e con l'urea inoltre ammoniaca. Quest'ultima reazione sarebbe comparabile alla riduzione dell'acido carbonico collo zinco;

$$CO(OH)_2 + Zn = ZnO + \underbrace{CO + H_2O}_{\text{acido formico}} \,.$$

All'anidride carbonica ed all'acido cianico corrisponde quale ultimo termine la cianamide e va inoltre ricordato che la cianamide, come tale, corrisponde al vero acido cianico, mentre l'acido isocianico è l'analogo della carbodiimide, la forma tautomera della cianamide:

| | | |
|---|---|---|
| | $C\langle^{OH}_{\equiv N}$<br>ac. cianico | $C\langle^{NH_2}_{\equiv N}$<br>cianamide |
| $C\langle^{O}_{O}$<br>anidride carbonica | | |
| | $C\langle^{O}_{NH}$<br>ac. isocianico | $C\langle^{NH}_{NH}$<br>carbodiimide |

III.

Partendo da queste relazioni e ricordando l'analogia fra l'acqua e l'ammoniaca, diventa strettamente comparabile all'idratazione dell'anidride carbonica tutta una serie di reazioni: la formazione del carbammato ammonico, la reazione di Wöhler e la sintesi della guanidina dalla cianamide e l'ammoniaca ed inoltre la formazione dell'urea e dell'isourea, quest'ultima in forma di eteri composti, dalla cianamide rispettivamente con acqua e con gli alcooli:

[1] Vedi Aufschläger, Monatshefte für Chemie, vol. 13, pag. 268.

anidride carbonica

$$C\langle^{O}_{O} + H_2O = CO\langle^{OH}_{OH}$$ acido carbonico

$$C\langle^{O}_{O} + NH_3 = CO\langle^{OH}_{NH_2}$$ acido carbammico

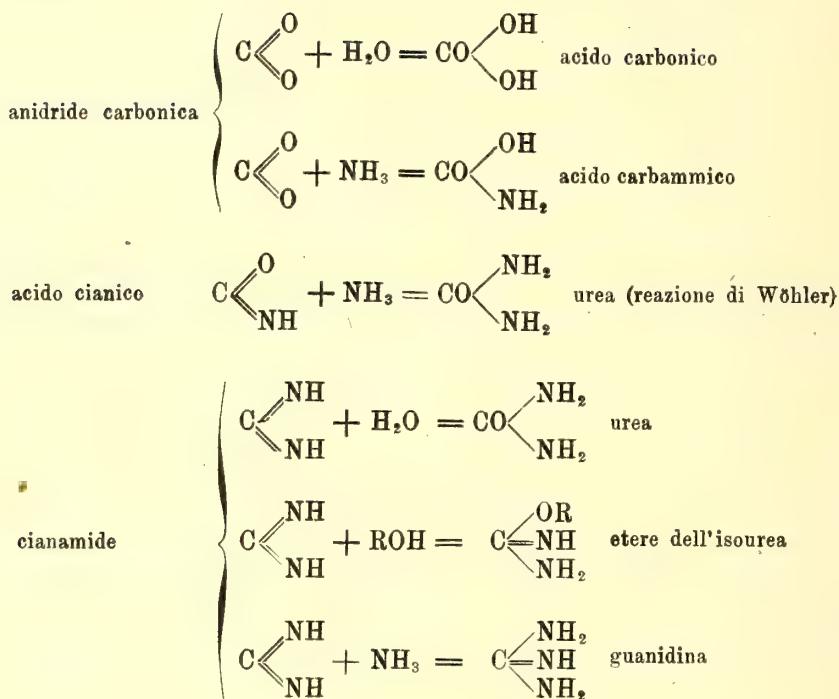
acido cianico

$$C\langle^{O}_{NH} + NH_3 = CO\langle^{NH_2}_{NH_2}$$ urea (reazione di Wöhler)

cianamide

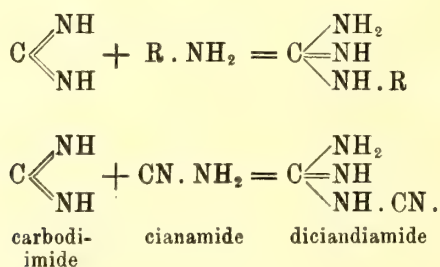
$$C\langle^{NH}_{NH} + H_2O = CO\langle^{NH_2}_{NH_2}$$ urea

$$C\langle^{NH}_{NH} + ROH = C\begin{cases} OR \\ NH \\ NH_2 \end{cases}$$ etere dell'isourea

$$C\langle^{NH}_{NH} + NH_3 = C\begin{cases} NH_2 \\ NH \\ NH_2 \end{cases}$$ guanidina

La polimerizzazione della cianamide in diciandiamide corrisponde alla sintesi della guanidina e delle guanidine sostituite, rispettivamente coll'ammoniaca e le ammine (sintesi della creatina e dell'arginina), immaginando che le due forme tautomere della cianamide reagiscono l'una sull'altra:

$$C\langle^{NH}_{NH} + R.NH_2 = C\begin{cases} NH_2 \\ NH \\ NH.R \end{cases}$$

$$C\langle^{NH}_{NH} + CN.NH_2 = C\begin{cases} NH_2 \\ NH \\ NH.CN. \end{cases}$$

carbodi-imide    cianamide    diciandiamide

A queste reazioni, paragonabili all' idratazione dell'anidride carbonica, sono da contrapporsi le inverse e così si comprende come l' urea dia per riscaldamento il biureto, che sarebbe il derivato corrispondente all'acido dicarbonico (oppure all'acido metadisilicico), e l'acido cianico, che a sua volta si trasforma in cianurico:

$$\begin{matrix} CO\begin{cases} OH \\ OH \end{cases} \\ CO\begin{cases} OH \\ OH \end{cases} \end{matrix} - H_2O = \begin{matrix} CO\begin{cases} OH \\ \end{cases} \\ \quad >O \\ CO\begin{cases} \\ OH \end{cases} \end{matrix}$$ acido dicarbonico che non esiste

e

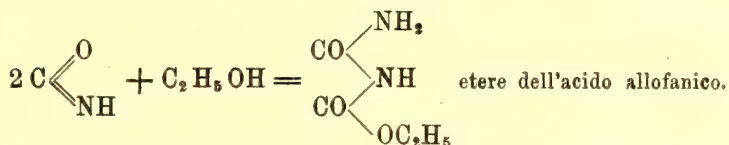
$$CO\begin{cases} OH \\ OH \end{cases} - H_2O = C\begin{cases} O \\ O \end{cases}$$ anidride carbonica

$$\begin{matrix} CO\begin{cases} NH_2 \\ NH_2 \end{cases} \\ CO\begin{cases} NH_2 \\ NH_2 \end{cases} \end{matrix} - NH_3 = \begin{matrix} CO\begin{cases} NH_2 \\ \end{cases} \\ \quad >NH \\ CO\begin{cases} \\ NH_2 \end{cases} \end{matrix}$$ biureto

e

$$CO\begin{cases} NH_2 \\ NH_2 \end{cases} - NH_3 = C\begin{cases} O \\ NH \end{cases}$$ acido cianico, che si converte subito in cianurico.

Il biureto è l'amide dell'acido allofanico e si comprende però facilmente che il suo etere etilico si ottenga dall'acido cianico ed alcool etilico: si tratta di null'altro che della formazione di un etere acido partendo dall'anidride e dall'alcool:

$$2\,C\begin{cases} O \\ NH \end{cases} + C_2H_5OH = \begin{matrix} CO\begin{cases} NH_2 \\ \end{cases} \\ \quad >NH \\ CO\begin{cases} \\ OC_2H_5 \end{cases} \end{matrix}$$ etere dell'acido allofanico.

Nella serie dell'ammoniaca, i composti corrispondenti agli idrati dell'acido carbonico sono assai più stabili, tanto che se ne conoscono cinque esistenti allo stato libero: oltre all'urea, al biureto ed alla guanidina, la diciandiamidina ed il biguanide, che si ottengono dall'anzidetta diciandiamide per azione dell'acqua o dell'ammoniaca, reazioni che sono comparabili alla saponificazione dei nitrili:

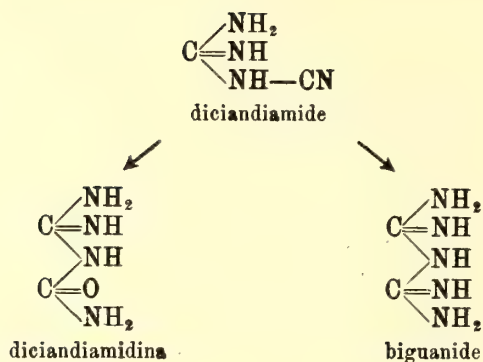
$$C\begin{cases}NH_2\\=NH\\NH-CN\end{cases}$$

diciandiamide

↙ ↘

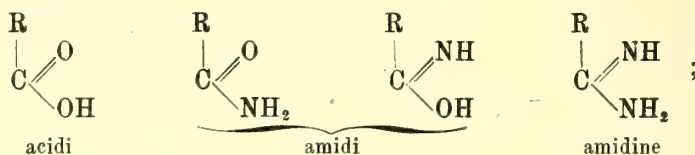
$$C\begin{cases}NH_2\\=NH\\NH\end{cases} \quad C\begin{cases}=O\\NH_2\end{cases}$$

diciandiamidina

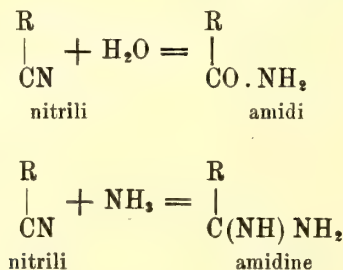
$$C\begin{cases}NH_2\\=NH\\NH\end{cases} \quad C\begin{cases}=NH\\NH_2\end{cases}$$

biguanide

Il biguanide può ottenersi inoltre, come il biureto dell'urea, dalla guanidina per eliminazione di ammoniaca col riscaldamento.

Per ultimo si potrebbe ricordare che agli acidi carbossilici corrispondono nella serie dell'ammoniaca, le amidi, nelle loro forme tautomere e dei rispettivi eteri, e le amidine:

$$\underset{\text{acidi}}{R-C\begin{cases}O\\OH\end{cases}} \qquad \underbrace{R-C\begin{cases}O\\NH_2\end{cases} \qquad R-C\begin{cases}NH\\OH\end{cases}}_{\text{amidi}} \qquad \underset{\text{amidine}}{R-C\begin{cases}NH\\NH_2\end{cases}} \;;$$

e però si comprende come dai nitrili, che per idratazione dànno le amidi, si possano coll'ammoniaca ottenere invece le amidine [1]:

$$\underset{\text{nitrili}}{R-CN} + H_2O = \underset{\text{amidi}}{R-CO.NH_2}$$

$$\underset{\text{nitrili}}{R-CN} + NH_3 = \underset{\text{amidine}}{R-C(NH)NH_2}$$

e inversamente come le amidi dànno per disidratazione i nitrili, la capronamidina, $(CH_3)_2 . CH . CH_2 . CH_2 C(NH) NH_2$, perde, per azione dell'anidride acetica, ammoniaca per trasformarsi in nitrile capronico [2].

In fine ringrazio il dott. Gustavo Tabellini per l'aiuto prestatomi nelle ricerche bibliografiche.

[1] Secondo una vecchia osservazione di Wichelhaus, Berichte, vol. 3, pag. 4.

[2] Pinner Berichte, vol. 17, I, pag. 176.

## Geometria. — *Il problema della deformazione proiettiva delle ipersuperficie. Le varietà a un qualsiasi numero di dimensioni.* Nota del Corrisp. GUIDO FUBINI [1].

Siano $F_2 = \Sigma a_{ij}\, du_i\, du_j$ ed $F_3 = \Sigma \Delta_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t$ le due forme [2] costituenti l'elemento lineare proiettivo di una ipersuperficie $V_n$ contenuta in uno spazio lineare $S_{n+1}$ ad $n+1$ dimensioni. Sia $A_{ij}$ il complemento algebrico di $a_{ij}$ nel discriminante $\Delta$ di $F_2$, diviso per $\Delta$, che supponiamo diverso da zero. Le $n+2$ coordinate omogenee $x, y, z, \dots, t$ di un punto di $V_n$ soddisferanno (indicando con $x_r$, $x_{rs}$ ecc. derivate covarianti secondo la forma $F_2$) alle equazioni:

$$x_{rs} = \sum_{h,k} \Delta_{rsh}\, A_{hk}\, x_k + a_{rs}\, X + c_{rs}\, x \quad \text{(e analoghe in } y, z, \dots) \tag{1}$$

$$X = \frac{1}{n} \Sigma A_{rs}\, x_{rs} = \frac{1}{n} \Delta_2 x \quad \text{e analoghe} \tag{2}$$

ove

$$\sum_{r,s} A_{rs}\, \Delta_{rst} = 0 \qquad (t = 1, 2, \dots, n). \tag{3}$$

Le $c_{rs}$ sono i coefficienti della terza forma fondamentale $f_2 = \Sigma c_{rs}\, du_r\, du_s$, e soddisfano alla

$$\sum_{r,s} A_{rs}\, c_{rs} = 0\,, \quad \text{ossia} \quad \sum_h C_{hh} = 0\,, \quad \text{ove} \quad C_{rs} = \sum_h c_{rh}\, A_{hs}\,. \tag{4}$$

Le $F_2, F_3$ sono determinate a meno di un fattore comune: scelte $F_2, F_3$, le $x, y, \dots$ sono completamente determinate: anzi nel caso generale (caso *normale*) si potrebbe togliere ogni indeterminazione alle $F_2, F_3$ (e quindi anche ad $f_2$).

Indicati con $(st, rh)$ i simboli di Riemann per $F_2$, il modo per noi migliore di scrivere le condizioni di integrabilità è di scrivere

$$\sum_\rho A_{r\rho}\,(x_{\rho st} - x_{\rho ts}) = -\sum_{h,k,\rho} (st, \rho h)\, A_{r\rho}\, A_{hk}\, x_k \tag{5}$$

(identicamente nelle $x, x_h, X$), equazioni che sono combinazioni lineari di

[1] Pervenuta all'Accademia il 28 settembre 1918.

[2] Cfr. la mia Nota: *Nuovi studi sull'elemento proiettivo* ecc. (2° sem. 1918 di questi Rendiconti), dove si troveranno altre citazioni.

formole ben note di calcolo differenziale assoluto di Christoffel e Ricci. Derivando covariantemente (1), si deduce facilmente da (5) che le $X_t$ sono combinazioni lineari delle $x, x_r$, come si può provare anche partendo da (2), (4). Quindi potremo porre, introducendo nuove incognite $\lambda_t, l_{th}$:

$$X_t = \lambda_t x + \sum_k L_{tk} x_k \quad \text{ove} \quad L_{tk} = \sum_h l_{th} A_{hk}. \tag{6}$$

Porremo anche $\eta_{rr} = 1$, $\eta_{rs} = 0$ per $r \neq s$ e

$$[st, rk] = \sum_{h,\rho} A_{kh} A_{r\rho} \times \tag{7}$$
$$\times [\Delta_{h\rho ts} - \Delta_{h\rho st} + (ts, \rho h) + \sum_{i,j} A_{ij} (\Delta_{\rho it} \Delta_{hjs} - \Delta_{\rho si} \Delta_{htj})] \text{ (1)}.$$

Uguagliando nei due membri di (5) i coefficienti di $x_k$ e di $x$, si trova:

$$[st, rk] = \eta_{sr} L_{tk} - \eta_{tr} L_{sk} + \eta_{tk} C_{sr} - \eta_{sk} C_{tr} \tag{8}$$

$$\sum_\rho A_{r\rho} [c_{\rho st} - c_{\rho ts} + \sum_h (\Delta_{s\rho h} C_{th} - \Delta_{t\rho h} C_{sh})] + \eta_{rs} l_t - \eta_{rt} l_s = 0. \tag{9}$$

Infine, scrivendo che da (6) si deduce $X_{ts} = X_{st}$, si trova in modo simile:

$$l_{st} = l_{ts} \tag{10}$$

$$\lambda_t \eta_{tk} - \lambda_s \eta_{sk} + \sum_h A_{hk} (l_{hts} - l_{hst}) + \sum_{\rho,h} (L_{t\rho} \Delta_{\rho hs} - L_{s\rho} \Delta_{\rho ht}) A_{hk} = 0 \tag{11}$$

$$\lambda_{ts} + \sum_h C_{sh} l_{th} = \lambda_{st} + \sum_h C_{th} \lambda_{sh}. \quad \text{(Si noti che } \sum_h C_{sh} l_{th} = \sum_h c_{sh} L_{th}\text{)}. \tag{12}$$

Le (3), (4), (8), (9), (10), (11), (12) sono *le condizioni di integrabilità o compatibilità* delle (1) [e (6)]; esse per $s = t$ si riducono a identità. Studiamole per $n > 2$ [2], quando lo spazio ambiente ha $n + 1 \geq 4$ dimensioni.

(1) È $[st, rk] = -[ts, rk]$; $[st, rk] + [st, kr] = \sum_{h,\rho} A_{r\rho} A_{kh} (\Delta_{h\rho ts} - \Delta_{h\rho st})$;

$[st, sk] - [ts, ks] = \sum_{h,\rho} A_{hk} A_{\rho s} \Delta_{h\rho ts}$, che si annulla se $t = k$ in virtù delle (3).

(2) Nel caso $n = 2$ non si possono dare 3 indici $s, k, t$ *differenti*, nè perciò determinare le $C_{tk}$ dalle (13). Nè le equazioni che dànno le $C_{ss} + L_{tt}$ insieme alla $\Sigma C_{ss}$ bastano a determinare le $C_{ss}$. Il caso $n = 2$ nelle mie Note cit. è trattato col metodo più semplice possibile. La potenza dei nostri metodi si vedrà confrontando p. es. con le condizioni di integrabilità negli studî di Wilczynski (a cui principalmente è dedicata la Mem. del tomo 10 delle Trans. of the Amer. Math. Society).

Un metodo di calcolo, *assai più complicato*, che nel caso $n = 2$ può servire a stabilire il contatto tra le equazioni classiche (che userò con le notazioni delle *Lezioni di Geometria differenziale* del prof. L. Bianchi) e quelle di Wilczynski è il seguente. Si

Dalle (8) supponendo successivamente $r \neq s, t$ e $k \neq s, t$, oppure $r = s$, ma $k \neq s, t$, oppure $k = s$, ma $r \neq s, t$, oppure $r = k = s \neq t$,

---

usino coordinate *proiettive* non omogenee $x, y, z$ ed $1 = t$. Una superficie si può definire dando equazioni del tipo:

$$\frac{x_{uu} - 2(\mu + M)\, x_u}{D} = \frac{x_{uv} - \nu x_u - \mu x_v}{D'} = \frac{x_{vv} - 2(\nu + N)\, x_v}{D''} \quad \text{(e analoghe in } y, z, t\text{)}.$$

Chiameremo $\xi$ il valore di questi rapporti; $\eta, \zeta, \tau = 0$ i valori analoghi ottenuti scrivendo $y, z, t$ al posto di $x$. Definiamo due quantità $h, k$ in guisa che:

$$D_v - D'_u + 2M\,D' = D(\nu - kD'' - hD') - D'(\mu - hD - kD')$$
$$D''_u - D'_v + 2N\,D' = -D'(\nu - kD'' - hD') + D''(\mu - hD - kD').$$

Poniamo

$$X = \xi - hx_u - kx_v \text{ e analoghe; } \left\{ {11 \atop 2} \right\} = kD, \left\{ {22 \atop 1} \right\} = hD'', \left\{ {11 \atop 1} \right\} = hD + 2(\mu + M),$$
$$\left\{ {12 \atop 2} \right\} = kD' + \mu \; ; \; \left\{ {22 \atop 2} \right\} = kD'' + 2(\nu + N) \; ; \; \left\{ {12 \atop 1} \right\} = hD' + \nu$$

$$\{11, 21\} = D'(2\mu h + 2Mh + h_u + \nu k) - D(h\nu + h_v) - $$
$$- (2\mu_v + 2M_v - \nu_u - \mu\nu) = -A_{21}(DD'' - D'^2)$$
$$\{21, 21\} = -D'(h\nu + h_v) + D''(\nu k + h_u + 2\mu' h) + 2N\nu + \nu^2 - \nu_v = A_{11}(DD'' - D'^2)$$
$$\{12, 12\} = -D'(k\mu + k_u) + D(\mu h + k_v + 2\nu k + 2Nk) +$$
$$+ (2M\mu + \mu^2 - \mu_u) = A_{22}(DD'' - D'^2)$$
$$\{22, 12\} = D'(2\nu k + 2Nk + k_v + \mu h) - D''(k\mu + k_u) -$$
$$- (2\nu_u + 2N_u - \mu_v - \mu\nu) = -A_{12}(DD'' - D'^2)$$

notazioni, che per ora potrebbero sembrare *curiose*. Le condizioni d'integrabilità delle equazioni in $x$ dànno:

$$(DD'' - D'^2)X_u = (\{11, 21\}D' - \{21, 21\}D)\,x_u + (\{22\ 12\}D - D'\{12, 12\})\,x_v$$
$$(DD'' - D'^2)X_v = (\{11, 21\}D'' - \{21, 21\}D')\,x_u + (\{22, 12\}D' - D''\{12, 12\})\,x_v$$
(e analoghe in $Y, Z$)

che, come condizioni di integrabilità, dànno in conclusione:

$$A_{12} = A_{21} \; ; \; D\left(\frac{\partial A_{11}}{\partial v} + 2A_{12}\left\{ {22 \atop 1} \right\} + 2A_{11}\left\{ {12 \atop 1} \right\}\right) +$$
$$+ D''\left(-\frac{\partial A_{12}}{\partial u} - A_{22}\left\{ {12 \atop 1} \right\} - A_{12}\left\{ {11 \atop 1} \right\} - A_{12}\left\{ {12 \atop 2} \right\} - A_{11}\left\{ {11 \atop 2} \right\}\right) +$$
$$+ D'\left(-\frac{\partial A_{11}}{\partial u} + \frac{\partial A_{12}}{\partial v} - 2A_{11}\left\{ {11 \atop 1} \right\} + A_{11}\left\{ {12 \atop 2} \right\} + A_{22}\left\{ {22 \atop 1} \right\} + A_{12}\left\{ {22 \atop 2} \right\} - A_{12}\left\{ {12 \atop 1} \right\} = 0$$

e l'analoga, ottenuta cambiando 1 con 2, $u$ con $v$.

Queste sono in fondo le equazioni più semplici, che si possano considerare equivalenti a quelle di Wilczinsky. Se si considerano $D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2$ come la seconda forma di Gauss, e le quantità tra $\{\ \}$ come i simboli a 3 e 4 indici relativi all'elemento lineare di Gauss, le equazioni, che ci hanno servito a determinare $h, k$ sono le ordinarie equazioni di Codazzi; e le altre equazioni sono conseguenza ben nota di equazioni classiche. Si noti (cfr. la mia Nota in corso di stampa negli Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino) che dare le $D, D', D''$, a meno di un fattore comune, e dare

oppure $r = s \neq k = t$, si trae:

$$(13) \begin{cases} [st, rk] = 0 \quad (r \neq s, t) \quad (k \neq s, t) \quad (\text{per } s = t \text{ si ha un'identità}) \\ L_{tk} = [st, sk]\,;\ C_{tk} = [ts, ks]\,;\ L_{tk} - C_{tk} = [kt, kk]\,;\ (s \neq t \neq k \neq s) \\ [st, st] = L_{tt} + C_{ss} \quad (s \neq t) \quad ; \quad \sum_h C_{hh} = 0\,. \end{cases}$$

Le ultime due equazioni dànno tutte le $C_{ss}, L_{tt}$; le precedenti dànno le $C_{st}, L_{st}$ per $s \neq t$: cioè risultano determinate sia le $c$, che le $l$.

Ne deduciamo intanto: *Se* $n > 2$ *ogni ipersuperficie* (a più che due dimensioni) *è indeformabile proiettivamente, almeno nella nostra attuale ipotesi* $\Delta \neq 0$ (*che cioè il cono delle direzioni assintotiche non possegga generatrici doppie*). Cioè le sole forme $F_2, F_3$ (elemento lineare), permettendo di determinare le $c_{rs}$, definiscono completamente la $V_n$. *Nè le forme* $F_2, F_3$ *si possono scegliere arbitrariamente. Le relazioni tra queste forme sono quelle che si deducono da* (13), *eliminando le* $C_{st}, L_{st}$ (¹), *quelle che si ottengono scrivendo che le* $\lambda$ *definite da* (11) *soddisfano a* (12), *e infine quelle che si ottengono scrivendo che le*

$$l_{tk} = \sum_h L_{th} A_{hk}\ ,\quad c_{tk} = \sum_h L_{th} A_{hk}$$

*formano due sistemi simmetrici* (non mutano, scambiando $t, k$). Anzi queste formole paiono le più adatte a studiare il problema: *Determinare le ipersuperficie con data forma* $F_2$, *cioè le ipersuperficie, per cui è assegnata l'equazione* $F_2 = 0$ *delle assintotiche* (²).

---

le $M, N$ equivale a dare l'elemento lineare proiettivo della superficie. (Moltiplicando $D, D', D''$ per uno stesso fattore, le equazioni per $x, y, z$ non mutano; cambiano però le $h, k$; l'indeterminazione di questo fattore è uno svantaggio, che sembra difficile eliminare in modo indipendente dalla scelta delle coordinate $u, v$).

(¹) Cioè $[st, sk] = [ht, hk]$ ; $[ts, ks] = [th, kh]$ ; $[st, ss] = [ht, hs] - [th, sh]$ ($s, t, h, k$, indici distinti); $[st, st] - [ht, ht] = [sk, sk] - [hk, hk]$ ($s \neq t, k$; $h \neq t, k$). Queste si possono semplificare ricordando le identità tra le $[rs, hk]$.

(²) In forma metrica il problema si enuncia: *Trovare l'elemento lineare di Gauss di una ipersuperficie, per cui è data, a meno di un fattore, la seconda forma fondamentale.* Le equazioni precedenti (per la ricerca di $F_3$) sono però forse più semplici di quelle cui condurrebbero le note formole di Gauss e di Codazzi, sia perchè si può prescindere dal fattore ignoto, sia perchè vi compariscono i simboli di Riemann per *la forma data* $F_2$, anzichè per *l'elemento lineare di Gauss incognito*, sia infine perchè l'introduzione di questo elemento lineare (che è un ente *non proiettivo* e quindi *estraneo al problema*) non può che portare complicazioni. Del resto per chi ricordi che $F_3$ è una certa combinazione della seconda forma di Gauss, e della sua derivata covariante rispetto all'elemento lineare di Gauss, è evidente che il presente metodo equivale in fondo a usare come incognite tali derivate covarianti dei coefficienti della seconda forma di Gauss.

Si noti che, *se le* (1) *formano un sistema integrabile completamente esse definiscono appunto una ipersuperficie, di cui* $F_2$ *ed* $F_3$ *sono l'elemento lineare* [1].

Osservazione 1ª. — Assunte come coordinate *proiettive non omogenee* le $\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \ldots, \frac{t}{x}$, indicate le prime con $u_1, u_2, \ldots, u_n$, l'ultima con $w$, indicate con $w_r, w_{rs}, \ldots$ derivate *ordinarie* (cioè non covarianti), le forme $F_2, F_3$ di $V_n$ sono proporzionali a $\Sigma w_{rs}\, du_r\, du_s$ ed a

$$-\Sigma w_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t + \frac{3}{n+2} \Sigma w_{rs}\, du_r\, du_s\, d \log \Delta,$$

ove $\Delta$ è il discriminante della prima. Se ne deduce *una nuova dimostrazione proiettiva che* $F_3$ *è apolare ad* $F_2$, *cioè che valgono le* (3). Se poi l'origine $u_i = w = 0$ è un punto O di $V_n$, in cui $w = 0$ è l'iperpiano tangente, e se $w^0_{rs}, w^0_{rst}$ sono i valori in O delle $w_{rs}, w_{rst}$, allora $hw^2 + 2(1 + p_1)w - \Sigma w^0_{rs} u_r u_s = 0$ è l'equazione di una quadrica osculatrice in O (la cui intersezione con $V_n$ ha un punto triplo in O). ($h =$ cost.; $p_1 =$ forma di primo grado nelle $u$). Il cono cubico tangente alla intersezione di $V_n$ con la quadrica è $\Sigma w^0_{rst} u_r u_s u_t + 3p_1 \Sigma w^0_{rs} u_r u_s = w = 0$. Quindi: *Come* $F_2 = 0$ *è l'equazione del cono tangente all'intersezione di* $V_n$ *con l'iperpiano tangente, così* $F_3 = 0$ *è l'equazione dell'unico cono apolare al cono* $F_2 = 0$, *che sia intersezione di* $V_n$ *con una quadrica osculatrice.*

Osservazione 2ª. — Definiamo le coordinate $\xi, \eta, \ldots$ di iperpiano tangente in guisa che $S\xi x = S\xi x_i = 0$, $S\xi X = 1$. (Con S indico una somma i cui addendi si ottengono dal primo sostituendo ad $x, \xi$ le $y, \eta$, le $z, \zeta$ ecc.). Sarà $a_{rs} = S\xi x_{rs} = - S\xi_r x_s = S x \xi_{rs}$. Poniamo $\Xi = \Sigma A_{rs} \xi_{rs} : n$,

[1] Si scelgano infatti i valori iniziali delle $x, x_r, X$ (e analoghe $y, y_r, \ldots$), che sono arbitrarî, in guisa che nel punto iniziale sia $D = (x, x_1, x_2, \ldots, x_n, X) = \sqrt{\Delta}$. Il determinante D del primo membro ha la prima riga formata dagli elementi scritti tra ( ); le altre righe se ne deducono sostituendo ordinatamente alle $x, X$ le $y, Y$, le $z, Z$, ecc. Ricordando che per (1) sia $dX$ che $x_{rs} - a_{rs}X$ sono combinazioni lineari delle $x, x_r$ e che (indicando con $\begin{Bmatrix} ir \\ q \end{Bmatrix}$ i simboli di Christoffel di 2ª specie per $F_2$) è

$$dx_i = \sum_r \left[ x_{ir} + \begin{Bmatrix} ir \\ q \end{Bmatrix} x_q \right] du_r,$$

si trova $d \log D = \Sigma \begin{Bmatrix} ir \\ i \end{Bmatrix} du_r = d \log \sqrt{\Delta}$. Perciò D e $\sqrt{\Delta}$, uguali nel punto iniziale, saranno identicamente uguali. E quindi da (1) si deduce appunto:

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}}(x, x_1, \ldots, x_n, x_{rs}) = a_{rs} \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{rst}) = \Delta_{rst}.$$

e analoghe (così sono definite le quantità duali di $X, Y, \ldots$). Con considerazioni duali delle precedenti si prova che $Sx\Xi = 1$ e che $Sx\Xi_i = 0$, e quindi anche $S\Xi x_i = 0$. Le $\xi, \eta, \ldots$ *sono i complementi dell'ultima colonna di* $(x, x_1, \ldots, x_n, X)$ *divisi per* $\sqrt{\Delta}$; similmente *le* $x, y, \ldots$ *sono i complementi dell'ultima colonna di* $(\xi, \xi_1, \ldots, \xi_n, \Xi)$ *divisi per* $\sqrt{\Delta}$ *e moltiplicati per un fattore* $\lambda$, *che ora determineremo.* Il prodotto dei due ultimi determinanti citati vale, per le precedenti identità $(-1)^{n+1}\Delta$; *cioè* $1/\lambda\, S\xi X\, Sx\Xi = (-1)^{n+1}$, *donde* $\lambda = (-1)^{n+1}$. Valgono poi le

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}}(\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \xi_{rs}) = (-1)^{n+1} a_{rs};$$

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}}(\xi, \xi_1, \ldots, \xi_n, \xi_{rst}) = (-1)^{n+1} Sx\xi_{rst} = (-1)^n \Delta_{rst};$$

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}}(\xi, \xi_1, \ldots, \xi_n, \Xi) = (-1)^{n+1};$$

e pertanto:

$$(1)_{bis} \qquad \xi_{rs} = -\Sigma \Delta_{rsh} A_{hk} \xi_k + a_{rs}\Xi + \gamma_{rs} \cdot \xi .$$

Queste equazioni sono dello stesso tipo di (1); si vede che, passando dalle $x$ alle $\xi$, basta cambiare il segno delle $\Delta_{rsh}$. Per le $\gamma_{rs}$ (il cui studio merita di essere approfondito), cioè per la forma $\Sigma\gamma_{rs}\, du_r\, du_s$ si possono ripetere le considerazioni svolte più sopra per le $c_{rs}$ e per la forma $\Sigma c_{rs}\, du_r\, du_s$.

---

Il caso $\Delta = 0$ (*cono assintotico con generatrici doppie*) *è eccezionale* già per la stessa definizione qui usata di $F_3$. Proveremo che in tal caso la $V_n$ *è inviluppo di* $\infty^r$ *iperpiani con* $r < n$; da ciò l'importanza dello studio di tale caso eccezionale, perchè *permette di estendere le nostre ricerche alle varietà* $V_r$ *con* $r < n$; *la varietà duale di una tale* $V_r$ *è appunto una* $V_n$ *del tipo precedente.* Scelte a linee $u_n$ un sistema di linee tangenti in ogni punto *alla*, oppure *ad una* generatrice doppia del cono assintotico, oltre alle $S\xi x = S\xi x_i = 0$ varranno le $S\xi_n x = S\xi_n x_i = 0$; e, poichè $V_n$ è luogo *proprio* di $\infty^n$ punti, le $\xi_n$ saranno perciò proporzionali alle $\xi$, ossia, dividendo per un fattore, le $\xi$ saranno indipendenti da $u_n$; gli iperpiani tangenti dipenderanno da $r \leq n-1$ parametri $u_1, u_2, \ldots, u_r$. (Nel loc. cit. è stato studiato il caso $r = 1$). Supposto dunque che gli iperpiani tangenti siano *proprio* $\infty^r$, siano $x^{(h)}, y^{(h)}, \ldots$ $(h = 0, 1, 2, \ldots, \varrho;\ \varrho = n - r)$ $\varrho + 1$ sistemi di soluzioni indipendenti (funzioni delle sole $u_1, u_2, \ldots, u_r$) delle equazioni $S\xi x = S\xi_i x = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Potremo supporre $x^{(0)} = 1, x^{(\alpha)} = 0$ per $\alpha > 0$. Poichè i punti di $V_n$ soddisfano a tali equa-

zioni, $V_n$ sarà luogo del punto $x = x^{(0)} + \sum_1^{\rho} v_h x^{(h)}$ (e analoghe in $y, z, \ldots$) ove le $v$ insieme alle $u$ formano appunto un sistema di $n$ variabili coordinate. La $V_n$ è formata da $\infty^r$ spazii $S_\rho$ lineari; le $V_r^{(\alpha)}$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, \rho)$ (luogo del punto $x^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}, \ldots$) sono varietà *generiche* ad $r$ dimensioni contenute in $V_n$ (che, se $\alpha > 0$, sono contenute anche nell'iperpiano *generico* $x = 0$). Un punto *generico* di una di queste varietà si può supporre *generico* anche per $V_n$; la quale avrà in esso pertanto un iperpiano tangente ben determinato. Le equazioni $S \xi x^{(h)} = 0$ $(h = 0, 1, \ldots, \rho)$ insieme alle $S \xi x_i^{(\alpha)} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ determinano quindi, *qualunque sia* $\alpha$ (da 0 a $\rho$), gli stessi valori per le $\xi, \eta \ldots$ Quindi, invece di dire che le $x^{(h)}$ sono soluzioni delle stesse equazioni $S \xi x = S \xi_i x = 0$, possiamo dire che le $x_i^{(\alpha)}$ sono combinazioni lineari delle $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(\rho)}, x_1^{(\beta)}, x_2^{(\beta)}, \ldots, x_r^{(\beta)}$ (e analoghe in $y, z, \ldots$) qualunque siano $\alpha, \beta$ (da 0 a $\rho$). (Cioè punti omologhi delle $V_\alpha$ sono posti in uno stesso iperpiano tangente alle $V_\alpha$). Tali equazioni si possono scrivere:

$$x_i^{(0)} = \sum_{j=1}^{r} \beta_{ij}^{(\alpha)} x_j^{(\alpha)} + \sum_{\rho=1}^{\rho} c_l^{(\alpha)} x^{(l)} \tag{14}$$

(e analoghe in $y, z, \ldots$) (per ogni $\alpha$ da 1 a $\rho$).

Si è posto $c_0^{(\alpha)} = 1$, perchè tale equazione è soddisfatta per $x^{(0)} = 1$, $x^{(\alpha)} = 0$ per $\alpha > 0$. Tali equazioni, dovendo essere risolubili rispetto alle $x_j^{(\alpha)}$, il determinante delle $\beta_{ij}^{(\alpha)}$ è diverso da zero.

Senza più oltre occuparci del caso generale, supponiamo, per esempio, $\rho = 1$, ponendo $y^{(1)} = \overline{y}, z^{(1)} = \overline{z}, \ldots$. (È $\overline{x} = x^{(1)} = 0$). Poichè moltiplicare $\overline{y}, \overline{z}, \ldots$ per un fattore, equivale a moltiplicare $v_1$ per un fattore, potremo considerare $\overline{y}, \overline{z}, \ldots$ come coordinate omogenee di un punto in uno spazio lineare $S_n$; il quale punto descriverà una ipersuperficie $W_{n-1}$, per la quale, conservando le precedenti notazioni, indicheremo l'elemento lineare con $\overline{\varphi}_2 = \Sigma a_{ts} du_t du_s$, e $\overline{\varphi}_3 = \Sigma \Delta_{ijh} du_i du_j du_h$ $(s, t, i, j, h = 1, 2, \ldots, n-1)$. Scriveremo (14) nella forma:

$$y_s^{(0)} = \sum_{i,h} b_{si} A_{ih} \overline{y}_h + \lambda_s \overline{y} \quad \text{e analoghe in } z, \ldots, t. \tag{15}$$

Posto $D_{sti} = b_{sti} + \lambda_s a_{ti} + \sum_{h,k} b_{sh} A_{hk} \Delta_{kti}$, si trova (derivando secondo $\varphi_2$) per (1):

$$y_{st}^{(0)} = \sum_{h,k} D_{sth} A_{hk} \overline{y}_k + b_{st} \overline{Y} + \left( \lambda_{st} + \sum_{k,h} b_{sh} A_{hk} c_{kt} \right) \overline{y}.$$

Le condizioni d'integrabilità sono pertanto:

$$\lambda_{st} + \Sigma b_{sh} A_{hk} c_{kt} = \lambda_{ts} + \Sigma b_{th} A_{hk} c_{ks} \quad ; \quad b_{ts} = b_{st} \quad ; \quad D_{sti} = D_{tsi}.$$

Le ultime due si enunciano anche dicendo *che* $b_{st}$ *e* $D_{sti}$ *sono sistemi simmetrici.*

Derivando, *trascurando i termini* in $y$, $y_s$ (e quindi anche $\overline{Y}_t$) otteniamo:

$$y_{st}^{(0)} = b_{st}\overline{Y} + \cdots \;;\; y_{sti}^{(0)} = (b_{sti} + D_{sti})\overline{Y} + \cdots \text{ (e analoghe in } z, \ldots).$$

Per studiare $V_n$ cominciamo dal costruire forme proporzionali a $(x, x_1, \ldots, x_n, d^i x)$ per $i = 1, 2$. Ricordando che $x = 1$, $y = y^{(0)} + v\overline{y}$, e analoghe; ricordando che per (15) le $y_s, z_s \ldots$ $(s = 1, 2, \ldots, n-1)$ sono combinazioni lineari di $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_{n-1}$, tali determinanti si riconoscono proporzionali a $\frac{1}{\sqrt{\Delta}}(\overline{y}, \overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_{n-1}, d^i y)$. Ora è

$$d^2 y = d^2 y^{(0)} + v\, d^2 \overline{y} + \cdots = Y \Sigma (b_{st} + v a_{st})\, du_s\, du_t + \cdots$$

$$d^3 y = d^3 y^{(0)} + v\, d^3 \overline{y} + 3\, dv\, d^2 \overline{y} + \cdots = Y \Sigma (D_{sti} + b_{sti} + v\Delta_{sti}) \times$$

$$\times\, du_s\, du_t\, du_i + 3 Y \overline{\varphi}_2\, dv + 3 Y \Sigma (b_{st} + v a_{st})\, du_s\, \delta^2 u_t + \cdots$$

dove sono trascurati i termini in $\overline{y}, \overline{y}_s$, e dove $\delta^2 u$ sono differenziali *controvarianti* (da me definiti al loc. cit.). Posto $\varphi_2^{(0)} = \Sigma b_{st}\, du_s\, du_t$ e $\Phi^{(0)} = \Sigma (\Delta_{sti} + b_{sti})\, du_s\, du_t\, du_i$, le forme cercate sono:

$$F_2 = \varphi_2^{(0)} + v\overline{\varphi}_2 \;;\; \Phi_3 = \Phi_3^{(0)} + v\overline{\varphi}_3 + 3\Sigma(b_{st} + v a_{st})\, du_s\, \delta^2 u_t + 3\varphi_2\, dv.$$

Indicato con $\delta\varphi_2^{(0)}$ la derivata covariante di $\varphi_2^{(0)}$ secondo $\varphi_2$, posto $\Delta_3^{(0)} = 2\Phi_3^{(0)} - 3\delta\varphi_2^{(0)} = \Sigma(2D_{sti} - b_{sti})\, du_s\, du_t\, du_i$, posto $\Delta_3 = 2\Phi - 3dF_2$, sarà $\Delta_3 = \Delta_3^{(0)} + 3\overline{\varphi}_2\, dv + 2v\overline{\varphi}_3$. (Le $\varphi_2^{(0)}$, $\varphi_3^{(0)}$ sono le forme analoghe per l'ipersuperficie descritta in un $S_{n-1}$ da un punto, per cui $y^{(0)}, z^{(0)} \ldots$ fossero coordinate omogenee).

*Le forme* $F_2, \Delta_3$ *si possono considerare come l'elemento lineare proiettivo di* $V_n$, *purchè*, secondo lo spirito dei nostri metodi, *si consideri come identico ad esso un altro elemento lineare del tipo* $\varrho F_2$, $\varrho\Delta_3 + F_2\, d\sigma$, *o come proiettivamente applicabili le ipersuperficie corrispondenti.* Due ipersuperficie $V_n$, $V'_n$ del tipo qui studiato, che abbiano come elemento lineare una le forme $F_2, \Delta_3$, l'altra le forme $F'_2, \Delta'_3$, saranno applicabili se $F'_2$ ed $F_2$ sono proporzionali, p. es. $F_2 = HF'_2$, e se $\Delta_3 - H\Delta'_3$ è divisibile per $F_2$. Se ne deduce che in particolare $\overline{\varphi}_2 = H\overline{\varphi}'_2$, e che $\overline{\varphi}_3 - H\overline{\varphi}'_3$ è divisibile per $\overline{\varphi}_2$, ossia, essendo $\overline{\varphi}_3$ e $\overline{\varphi}'_3$ apolari a $\overline{\varphi}_2$, dovrà essere $\overline{\varphi}_3 = H\overline{\varphi}'_3$. La varietà $W_{n-1}$ luogo del punto $\overline{y}, \overline{z}, \ldots$, l'altra $W'_{n-1}$ luogo del punto $\overline{y}', \overline{z}', \ldots$ saranno pertanto applicabili; e quindi, *escluso* il caso banale *che esse siano proiettivamente identiche, dovrà per i risultati stessi di questa Nota essere* $n - 1 = 2$, $n = 3$. *Lo studio delle nostre* $V_n$ *con* $\varrho = 1$ *è così ridotto a quello delle solite ipersuperficie* $W_{n-1}$ *in uno*

*spazio lineare ad n dimensioni; la ricerca delle coppie di tali ipersuperficie applicabili è ridotto allo studio di alcune coppie di superficie* $W_2$ *proiettivamente applicabili nello spazio* $S_3$ *a sole tre dimensioni.* Le ipersuperficie $V_3$ corrispondenti sono le stesse, che Schur (Math. Ann., tomo 28) ha già incontrato come eccezionali per il problema dell'applicabilità *in senso metrico.* E non sarebbe difficile completare dal nostro punto di vista le ricerche di Schur; anzi qui la ricerca *si semplifica* perchè per noi l'iperpiano $x = 0$ è un iperpiano generico; per Schur esso è invece l'iperpiano all'infinito, che può avere posizioni particolari rispetto a $V_3$, ed obbligare perciò all'esame di molti casi distinti. Anche per ragioni di spazio non sviluppo qui perciò i calcoli relativi, che saranno oggetto di una prossima tesi di laurea nella R. Università di Torino.

## Meccanica. — *Una proprietà caratteristica delle coazioni elastiche nei solidi elasticamente omogenei.* Nota di Gustavo Colonnetti, presentata dal Socio Gian Antonio Maggi [1].

Consideriamo un solido elastico omogeneo (vale a dire: le cui costanti elastiche siano indipendenti dalle coordinate) libero da vincoli, il quale nel suo *stato naturale* — cioè nello stato di equilibrio stabile che esso spontaneamente assume quando non è soggetto ad alcuna forza esterna — si presenti in uno di quegli stati di coazione elastica di cui mi sono occupato in due Note precedenti [2].

Ed immaginiamo attraverso ad un tale solido praticati tutti quei tagli che sono necessarii perchè i singoli elementi materiali che lo compongono — liberati dai vincoli che inizialmente essi si creavano mutuamente — possano tutti assumere il loro *stato non deformato.*

Nessuna restrizione vogliamo fare relativamente al numero ed alla disposizione di quei tagli, i quali, se in qualche caso particolare potranno limitarsi a rendere il sistema semplicemente connesso, nei casi più generali potranno invece moltiplicarsi all'infinito, fino a sconnettere anche, se fosse necessario, il solido dato nei singoli suoi elementi.

Nè vogliamo che resti in alcun modo limitato il grado di libertà che coi tagli stessi si viene a conferire alle parti del solido che essi separano; perciò riterremo sempre che, una volta praticato un taglio, i punti già affac-

[1] Pervenuta all'Accademia il 28 settembre 1918.

[2] G. Colonnetti, *Su certi stati di coazione elastica che non dipendono da azioni esterne,* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXVI, serie 5ª, 2° sem. 1917; *Su di una particolare classe di coazioni elastiche che si incontra nello studio della resistenza delle artiglierie,* id. id., vol. XXVII, serie 5ª, 2° sem. 1918.

ciati da una parte e dall'altra di esso possano presentare spostamenti relativi affatto qualunque, tanto nel senso di scostare le due faccie del taglio, quanto nel senso di dar luogo a sovrapposizioni di materia.

Ciò premesso non v'è dubbio che dallo *stato non deformato* a cui il sistema si è così ridotto si potrà sempre ritornare al primitivo *stato naturale* non soltanto ripristinando quei vincoli interni che col descritto sistema di tagli si erano soppressi, ma anche applicando alle due faccie di ciascun taglio due distribuzioni di forze, fra loro eguali e contrarie, equipollenti punto per punto alle azioni già sviluppate da quei vincoli.

Nei riguardi del solido tagliato — al quale si riferiscono tutte le considerazioni che seguono — queste forze debbono evidentemente considerarsi come delle forze esterne. Noi riterremo le loro tre componenti secondo gli assi (riferite all'unità di superficie)

$$P_x \quad , \quad P_y \quad , \quad P_z$$

funzioni delle coordinate, completamente definite in ogni punto delle singole superficie lungo le quali sono stati praticati i tagli, e riferite per ciascun taglio ad una sua faccia ben determinata, se pure arbitraria, intendendo che sull'altra faccia dello stesso taglio le analoghe componenti siano rispettivamente

$$-P_x \quad , \quad -P_y \quad , \quad -P_z \, .$$

Le componenti di spostamento

$$u \quad , \quad v \quad , \quad w$$

determinate nel solido tagliato da un tale sistema di forze, epperò per presupposto caratterizzanti il passaggio del sistema dallo *stato non deformato* allo *stato naturale*, saranno esse pure delle funzioni delle coordinate, che riterremo in ogni punto del solido tagliato soddisfacenti a tutte quelle restrizioni che sono abituali nella teoria classica dell'elasticità.

Ciò posto procederemo all'applicazione del principio di reciprocità di Betti scrivendo che il lavoro che le forze $P_x$ , $P_y$ , $P_z$ compirebbero qualora ai loro punti di applicazione venissero attribuiti certi spostamenti $u'$ , $v'$ , $w'$ determinati da un secondo sistema affatto arbitrario di forze esterne, deve essere eguale al lavoro che le forze di questo secondo sistema compirebbero nell'ipotesi che ai loro punti di applicazione si attribuissero gli spostamenti $u$ , $v$ , $w$ .

E, a somiglianza di ciò che lo stesso Betti fece già in un caso consimile (1), assumeremo il secondo sistema di forze in modo che le relative

(1) E. Betti, *Teoria dell'elasticità*, Il nuovo Cimento, serie 2a, tomo VII e VIII. Cfr. anche: E. Cesaro, *Introduzione alla teoria matematica dell'elasticità*, Torino, 1894; ovvero: G. Colonnetti, *Principii di statica dei solidi elastici*, Pisa, 1916.

componenti di deformazione — e quindi anche, per la supposta omogeneità del solido, le componenti speciali di tensione — siano costanti in tutto il solido, cioè indipendenti dalle coordinate.

È facile vedere dove conduca una tale ipotesi: le derivate parziali delle componenti speciali di tensione rispetto alle coordinate dovendo infatti riescir tutte nulle, le equazioni indefinite per l'equilibrio richiedono che siano nulle tutte le forze di massa.

Quanto alle forze superficiali, esse potranno essere diverse a seconda dei valori che si attribuiscono alle componenti speciali di tensione. Se per esempio si assumono le tre componenti normali eguali all'unità, supponendo in pari tempo nulle le tre componenti tangenziali, le equazioni ai limiti risultano identicamente verificate per

$$P'_x = -\cos(n, x) \quad , \quad P'_y = -\cos(n, y) \quad , \quad P'_z = -\cos(n, z)$$

$n$ essendo, come d'uso, la normale in un punto generico della superficie, rivolta verso l'interno del corpo.

Ciò equivale a dire che il solido tagliato è soggetto ad una forza uniformemente distribuita su tutta la sua superficie (faccie dei tagli comprese), diretta in ogni punto secondo la normale alla superficie stessa, rivolta verso l'esterno, e di intensità ovunque eguale all'unità.

Il significato del primo membro dell'equazione di Betti risulta ora immediato. Si ha infatti, ove si indichi con V lo spazio occupato dal solido tagliato, e con S il complesso delle superficie che lo limitano, cioè il complesso della superficie esterna che propriamente separa tale spazio da quello circostante e delle varie faccie dei tagli,

$$\int_S (P'_x u + P'_y v + P'_z w)\, dS =$$
$$= -\int_S \Big( u \cos(n, x) + v \cos(n, y) + w \cos(n, z) \Big)\, dS =$$
$$= \int_V \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) dV \, .$$

E questo integrale rappresenta notoriamente la dilatazione cubica totale che il sistema subisce nel cambiamento di configurazione caratterizzato dalle $u, v, w$, vale a dire nel passaggio dei singoli elementi materiali dal loro *stato non deformato* a quello che abbiamo convenuto di chiamare lo *stato naturale* del solido dato.

L'altro membro dell'equazione di Betti

$$\int_S (P_x u' + P_y v' + P_z w')\, dS$$

risulta invece identicamente nullo.

Per convincersene basta osservare che sulla superficie che abbiamo teste chiamata esterna sono da considerarsi come identicamente nulle le $P_x$, $P_y$, $P_z$; nessun dubbio quindi che sia nullo anche il corrispondente contributo all'integrale.

Lo stesso non accade su quell'altra parte di S che si trova nell'interno di V ed ha avuto origine dai tagli: ivi accade però, e lo abbiamo già rilevato a suo tempo, che per ogni elemento superficiale scelto su di una data faccia di un taglio, esiste sempre sull'altra faccia dello stesso taglio un elemento identico al primo e con esso coincidente, pel quale la forza differisce soltanto nel segno. Se si tien conto che, per due elementi siffatti, lo spostamento deve essere lo stesso — le $u'$, $v'$, $w'$ dovendo, com'è facile verificare, essere lineari nelle coordinate, epperò continue anche attraverso i tagli — si può concludere che ad ogni termine del tipo

$$(P_x u' + P_y v' + P_z w')dS$$

deve sempre corrisponderne un altro esattamente eguale a

$$-(P_x u' + P_y v' + P_z w')dS$$

L'integrale deve dunque in definitiva annullarsi come avevamo annunciato.

Il teorema che discende da queste semplicissime considerazioni si può enunciare così: nel passaggio del sistema dallo stato non deformato allo stato naturale il volume totale non muta; e comprende, come caso particolare, quello già enunciato e dimostrato per tutt'altra via nell'ultima parte della mia Nota precedente.

Introducendo il concetto di *densità* esso si può anche esprimere dicendo che: in un solido elastico omogeneo la densità media nello stato naturale è sempre eguale alla densità propria del materiale non deformato.

Analisi. — *Sulle equazioni integrali.* Nota II di Pia Nalli, presentata dal Socio Pincherle [1].

9. Supponiamo ora che nessuna delle $G_n^{(r)}(s, t)$ sia nulla. Mi propongo di far vedere come si possono determinare le costanti caratteristiche $\mu$ per ognuna delle quali esiste un numero $\delta > 0$ tale da avere quasi dapertutto

$$k^2(s) + \delta < \mu^2 . \tag{13}$$

In seguito faremo vedere come si possono determinare le costanti caratteristiche $\mu$ per ognuna delle quali esiste un numero $\delta > 0$ tale da avere quasi dapertutto

$$k^2(s) - \delta > \mu^2 .$$

Tutte queste sono costanti caratteristiche proprie. Determineremo anche le funzioni fondamentali corrispondenti a tali costanti.

Premettiamo la seguente osservazione. Se una funzione reale $F(s, t)$, sommabile col suo quadrato nel dominio $a \leq s \leq b$, $a \leq t \leq b$, soddisfa quasi dapertutto alla seguente equazione integrale

$$\mu \, F(s, t) = k(s) \, F(s, t) + \int_a^b F(v, s) \, F(v, t) \, dv ,$$

con $\mu$ costante, si può porre

$$F(s, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} [\mu - k(t)] \, \psi_n(s) \, \psi_n(t) ,$$

dove le $\psi_n(s)$ formano un sistema ortogonale in $(a,b)$ e formano pure un sistema ortogonale le funzioni $(\mu - k(s)) \, \psi_n(s)$ moltiplicate per opportune costanti.

Le $\psi_n(s)$ potrebbero anche essere in numero finito, e si presenta questo caso quando $|k(s) - \mu|$ si mantiene quasi dapertutto superiore ad una quantità positiva fissa.

10. Fissato $r$ e posto

$$U_n^{(r)} = \int_a^b \int_a^b (G_n^{(r)}(s, t))^2 \, ds \, dt$$

sarà, per la (4),

$$U_n^{(r)} = \int_a^b \int_a^b G_{n-1}^{(r)}(s, t) \, G_{n+1}^{(r)}(s, t) \, ds \, dt ,$$

quindi, per l'ineguaglianza di Schwarz,

$$(U_n^{(r)})^2 \leq U_{n-1}^{(r)} \, U_{n+1}^{(r)} .$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 24 settembre 1918.

Se poniamo $c_n^{(r)} = \frac{U_n^{(r)}}{U_{n-1}^{(r)}}$, la successione delle $c_n^{(r)}$ è crescente e limitata e tende dunque ad un limite $c^{(r)} > 0$.

Si dimostra che *se* $\mu$ *è una costante caratteristica propria relativa a* $K^{(r)}(s, t)$ *e* $k^r(s)$ *si ha* $\mu^2 \leq c^{(r)}$.

La successione $\frac{U_n^{(r)}}{(c^{(r)})^n}$ è decrescente e tende ad un limite $U^{(r)} \geq 0$.

Se poniamo $F_n^{(r)}(s, t) = \frac{G_{2n}^{(r)}(s, t)}{(c^{(r)})^n}$, la successione delle funzioni $F_n^{(r)}(s, t)$ converge in media verso una funzione $F^{(r)}(s, t)$, e si ha

$$\int_a^b \int_a^b (F^{(r)}(s, t))^2 \, ds \, dt = U^{(r)}.$$

La funzione $F^{(r)}(s, t)$ non è nulla quasi dapertutto quando, e solamente quando, è $U^{(r)} > 0$.

Dalla relazione

$$c^{(r)} F_n^{(r)}(s, t) = k^{2r}(s) F_{n-1}^{(r)}(s, t) + \int_a^b K^{(2r)}(v, s) F_{n-1}^{(r)}(v, t) \, dv$$

si conclude, per la convergenza in media di $F_n^{(r)}(s, t)$ verso $F^{(r)}(s, t)$,

$$c^{(r)} F^{(r)}(s, t) = k^{2r}(s) F^{(r)}(s, t) + \int_a^b K^{(2r)}(v, s) F^{(r)}(v, t) \, dv,$$

quindi se è $U^{(r)} > 0$ la $F^{(r)}(s, t)$, considerata come funzione della sola $s$, è funzione fondamentale relativa a $K^{(2r)}(s, t)$ e $k^{2r}(s)$. Ed allora si possono dare due casi: o si ha

$$(14) \qquad \sqrt{c^{(r)}} \, F^{(r)}(s, t) = k^r(s) F^{(r)}(s, t) + \int_a^b K^{(r)}(v, s) F^{(r)}(v, t) \, dv,$$

$\sqrt{c^{(r)}}$ essendo presa con segno conveniente (cioè $F^{(r)}(s, t)$, considerata come funzione della sola $s$, è funzione fondamentale relativa a $K^{(r)}(s, t)$ e $k^r(s)$); ovvero, ponendo

$$H_i^{(r)}(s, t) = \frac{1}{2} F^{(r)}(s, t) + \frac{(-1)^{i-1}}{2\sqrt{c^{(r)}}} \Big[ k^r(s) F^{(r)}(s, t) + \\ + \int_a^b K^{(r)}(v, s) F^{(r)}(v, t) \, dv \Big] \qquad (i = 1, 2),$$

$H_1(s, t)$ e $H_2(s, t)$, considerate come funzioni della sola $s$, sono fondamentali relativamente a $K^{(r)}(s, t)$ e $k^r(s)$, e corrispondono rispettivamente alle costanti $+\sqrt{c^{(r)}}$ e $-\sqrt{c^{(r)}}$.

Nel primo caso si trova che $F^{(r)}(s,t)$ soddisfa alla seguente equazione integrale

$$\sqrt{c^{(r)}}\, F^{(r)}(s,t) = k^r(s)\, F^{(r)}(s,t) + \sqrt{c^{(r)}} \int_a^b F^{(r)}(v,s)\, F^{(r)}(v,t)\, dv \,.$$

Di qui si trae (v. n. precedente)

$$\sqrt{c^{(r)}}\, F^{(r)}(s,t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sqrt{c^{(r)}} - k^r(t) \right] \psi_n(s)\, \psi_n(t)\,,$$

dove le $\psi_n(s)$ formano un sistema ortogonale e formano pure un sistema ortogonale le funzioni $\varphi_n(s) = \lambda_n\left(\sqrt{c^{(r)}} - k^r(s)\right) \psi_n(s)$, le $\lambda_n$ essendo convenienti costanti.

Ciascuna delle funzioni $\psi_n(s)$ è fondamentale relativamente a $K^{(r)}(s,t)$ e $k^r(s)$ e corrisponde alla costante $\sqrt{c^{(r)}}$. Inoltre, essendo $\int_a^b \varphi_n^2(s)\, ds = 1$, $\psi_n(s)$ è funzione fondamentale propria.

Se $\varphi(s)$ è una funzione fondamentale relativa a $K^{(r)}(s,t)$ e $k^r(s)$, corrispondente alla costante $\sqrt{c^{(r)}}$, si ha

$$\left(\sqrt{c^{(r)}} - k^r(s)\right) \varphi(s) = \sqrt{c^{(r)}} \int_a^b F^{(r)}(t,s)\, \varphi(t)\, dt\,,$$

ossia

$$\left(\sqrt{c^{(r)}} - k^r(s)\right) \varphi(s) \sim \left(\sqrt{c^{(r)}} - k^r(s)\right) \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(s) \int_a^b \psi_n(s)\, \varphi(s)\, ds\,. \tag{15}$$

Nel secondo caso si trova che $H_1^{(r)}(s,t)$ e $H_2^{(r)}(s,t)$ soddisfano alle seguenti equazioni

$$(-1)^{i-1} \sqrt{c^{(r)}}\, H_i^{(r)}(s,t) = k^r(s)\, H_i^{(r)}(s,t) + (-1)^{i-1} \sqrt{c^{(r)}} \int_a^b H_i^{(r)}(v,s)\, H_i^{(r)}(v,t)\, dv \qquad (i = 1, 2)\,,$$

e si trova così

$$(-1)^{i-1} \sqrt{c^{(r)}}\, H_i^{(r)}(s,t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (-1)^{i-1} \sqrt{c^{(r)}} - k^{(r)}(t) \right] \psi_n^{(i)}(s)\, \psi_n^{(i)}(t)\,,$$

dove le $\psi_n^{(i)}(s)$ formano un sistema ortogonale, come lo formano pure le funzioni $\left((-1)^{i-1} \sqrt{c^{(r)}} - k^r(s)\right) \psi_n^{(i)}(s)$ moltiplicate per convenienti costanti.

Le $\psi_n^{(i)}(s)$ sono funzioni fondamentali proprie relative a $K^{(r)}(s,t)$ e $k^r(s)$ e corrispondono alla costante $(-1)^{i-1} \sqrt{c^{(r)}}$.

Se $\varphi^{(i)}(s)$ è una funzione fondamentale corrispondente alla costante $(-1)^{i-1} \sqrt{c^{(r)}}$ si ha

$$\left((-1)^{i-1} \sqrt{c^{(r)}} - k^r(s)\right) \varphi^{(i)}(s) = (-1)^{i-1} \sqrt{c^{(r)}} \int_a^b H_i^{(r)}(t,s)\, \varphi^{(i)}(t)\, dt\,,$$

ossia

$$(16)\qquad \left((-1)^{i-1}\sqrt{c^{(r)}}-k^r(s)\right)\varphi^{(i)}(s)\sim\left((-1)^{i-1}\sqrt{c^{(r)}}-k^r(s)\right)\times$$
$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n^{(i)}(s)\int_a^b\psi_n^{(i)}(s)\,\varphi(s)\,ds\,.$$

Si ha poi

$$\int_a^b \mathrm{H}_1^{(r)}(v\,,s)\,\mathrm{H}_2^{(r)}(v\,,t)\,dv=0\,.$$

11. Si può dimostrare che se per qualche $r$ dispari si ha $\mathrm{U}^{(r)}>0$, sarà $\mathrm{U}^{(r)}>0$ per qualunque altro $r$ dispari e $c^{(r)}=(c^{(1)})^r$. Se per qualche $r$ pari si ha $\mathrm{U}^{(r)}>0$ sarà $\mathrm{U}^{(r)}>0$ per qualunque altro $r$ pari e $c^{(r)}=(c^{(2)})^{\frac{r}{2}}$.

Se è $\mathrm{U}^{(1)}>0$ si avrà per qualunque $r$ dispari

$$(17)\qquad \mathrm{F}^{(r)}(s\,,t)=\mathrm{F}^{(1)}(s\,,t)\sum_{m=0}^{r-1}\left(\frac{k(t)}{\sqrt{c^{(1)}}}\right)^m$$

se è soddisfatta la (14) con $r=1$.

Quando ciò non succede si ha

$$\mathrm{H}_i^{(r)}(s\,,t)=\mathrm{H}_i^{(1)}(s\,,t)\sum_{m=0}^{r-1}\left(\frac{k(t)}{(-1)^{i-1}\sqrt{c^{(1)}}}\right)^m\qquad (i=1\,,2)\,.$$

Sempre nell'ipotesi $\mathrm{U}^{(1)}>0$, se $r$ è pari ed è $c^{(r)}=(c^{(1)})^r$ varrà ancora la (17) se è soddisfatta la (14) con $r=1$, altrimenti per $r$ pari sarà

$$\mathrm{F}^{(r)}(s\,,t)=\mathrm{H}_1^{(1)}(s\,,t)\sum_{m=0}^{r-1}\left(\frac{k(t)}{\sqrt{c^{(1)}}}\right)^m+\mathrm{H}_2^{(1)}(s\,,t)\sum_{m=0}^{r-1}\left(-\frac{k(t)}{\sqrt{c^{(1)}}}\right)^m\,.$$

Se è $\mathrm{U}^{(2)}>0$, per qualunque $r$ pari è soddisfatta la (14) con $\sqrt{c^{(r)}}>0$ e sarà per $r$ pari

$$\mathrm{F}^{(r)}(s\,,t)=\mathrm{F}^{(2)}(s\,,t)\sum_{m=0}^{\frac{r}{2}-1}\left(\frac{k^2(t)}{\sqrt{c^{(2)}}}\right)^m\,.$$

Risulta di qui che è sufficiente limitarsi a considerare i casi in cui è $\mathrm{U}^{(1)}>0$ o $\mathrm{U}^{(2)}>0$.

Si hanno relativamente a ciò alcune notevoli proposizioni.

*Se è quasi dapertutto* $k^2(s)+\varepsilon<c^{(1)}$, *con* $\varepsilon>0$, *si ha* $\mathrm{U}^{(1)}>0$, $\mathrm{U}^{(2)}>0\,,\,c^{(2)}=(c^{(1)})^2$.

Riunendo questo con quanto si è trovato al n. precedente possiamo dire che: *condizione necessaria e sufficiente perchè esistano funzioni fondamentali relative a* $\mathrm{K}(s\,,t)$ *e* $k(s)$ *le cui corrispondenti costanti caratteristiche* $\mu$ *soddisfino alla* (13) *è che esista un numero positivo* $\varepsilon$ *tale che sia quasi dapertutto* $k^2(s)+\varepsilon<c^{(1)}$.

Quando è soddisfatta quest'ultima condizione $\left|\pm\sqrt{c^{(1)}}-k(s)\right|$ si mantiene quasi dapertutto superiore ad una quantità positiva fissa e le $\psi_n(s)$ o le $\psi_n^{(i)}(s)$, a seconda dei casi, sono in numero finito: le (15) e (16) ci dànno, secondo i casi,

$$\varphi(s)=\sum_{n=1}^{m}\psi_n(s)\int_a^b\psi_n(s)\,\varphi(s)\,ds\,,$$

$$\varphi^{(i)}(s)=\sum_{n=1}^{m_i}\psi_n^{(i)}(s)\int_a^b\psi_n^{(i)}(s)\,\varphi^{(i)}(s)\,ds\,.$$

*Si ha* $U^{(1)}>0$ *se per* $m$ *sufficientemente grande*

$$\frac{U_m^{(1)}}{\int_a^b\int_a^b k^2(s)\,(G_{m-1}(s\,,t))^2\,ds\,dt}$$

*si mantiene superiore ad una quantità fissa maggiore di* 1.

Questa condizione è soddisfatta se è soddisfatta quella del primo teorema. Essendo poi

$$c_2^{(1)}=\frac{\int_a^b\int_a^b[k(s)\,K(s\,,t)+K_2(s\,,t)]^2\,ds\,dt}{\int_a^b\int_a^b K^2(s\,,t)\,ds\,dt}\,,$$

dove poniamo $K_2(s\,,t)=\int_a^b K(s\,,v)\,K(t\,,v)\,dv$, ne viene che si può determinare $\varepsilon>0$ in modo che, quando è quasi dapertutto $|k(s)|\leq\varepsilon$, si abbia $c_2^{(1)}>\varepsilon^2$, quindi, essendo $c^{(1)}\geq c_2^{(1)}$ sarà $c^{(1)}>\varepsilon^2$, ed è soddisfatta la condizione del primo teorema.

Possiamo quindi dire che; *data la funzione* $K(s\,,t)$ (soddisfacente alle condizioni poste nella Nota I) *si può determinare un numero* $\varepsilon>0$ *in modo che, qualunque sia la funzione* $k(s)$ *soddisfacente quasi dapertutto alla condizione* $|k(s)|\leq\varepsilon$, *esiste almeno una funzione fondamentale propria relativa al nucleo* $K^{(n)}(s\,,t)$ *ed alla funzione* $k^n(s)$ $(n=1\,,2\,,\ldots)$. Per $k(s)=0$ si ritrova un noto teorema dato da Hilbert e Schmidt.

Siccome poi ogni funzione fondamentale relativa a $K(s\,,t)$ e $k(s)$ lo è anche relativamente a $K(s\,,t)$ e $k(s)+h$, con $h$ costante, e viceversa, si può dare una forma più generale al teorema precedente, sostituendo all'espressione: « *qualunque sia la funzione* $k(s)$ *soddisfacente quasi dapertutto alla condizione* $|k(s)|\leq\varepsilon$ » la seguente: « *qualunque sia la funzione* $k(s)$ *per la quale si possa determinare una costante* $h$ *in modo che sia quasi dapertutto* $|k(s)+h|\leq\varepsilon$ ».

## Astronomia. — *Il problema dell'astrometria fotografica nel suo aspetto più generale.* Nota II di Vittorio Nobile, presentata dal Corrisp. V. Cerulli [1].

La soluzione *autonoma* (cioè indipendente dalla cognizione di dati anteriori strumentali o di osservazione) del problema della astrometria fotografica è evidentemente ottenuta, qualunque sia la ripartizione delle aree fotografate sulla sfera celeste, purchè solo tali aree si compenetrino almeno due a due, quando si conoscano i centri delle singole lastre (intersezione dell'asse ottico col piano della lastra) e la distanza focale dell'obbiettivo: è quindi naturale porre l'anzidetto problema nei seguenti termini:

*Date alcune immagini fotografiche della sfera celeste, ottenute dal medesimo obbiettivo e tali che ciascuna di esse comprenda, con una o più altre contigue, delle regioni comuni, determinare, sulla base dei soli elementi forniti dall'esame delle immagini, i centri delle singole lastre e la distanza focale dell'obbiettivo e risalire così alla rappresentazione sferica delle configurazioni stellari.*

Poichè le diverse immagini fotografiche possono considerarsi come le projezioni delle diverse regioni del cielo dal centro ottico dell'obbiettivo sui diversi piani tangenti ad una sfera avente per raggio la distanza focale, è chiaro che le diverse lastre potranno poi immaginarsi disposte nello spazio in modo da costituire un poliedro circoscritto alla sfera medesima. Individuato tale poliedro, che supporremo convesso, nei suoi elementi metrici e quindi la sfera tangente, l'insieme dei raggi di questa sfera passanti per le immagini delle stelle offrirà la rappresentazione di una sfera omotetica inversa e quindi *non prospetticamente sovrapponibile* alla sfera celeste. Per realizzare la sovrapposizione prospettica della sfera « fotografica » alla celeste bisognerà applicare alla prima una *trasformazione in sè* costituita da una simmetria intorno al centro (ciò che potrà farsi analiticamente dopo esauriti i calcoli numerici), oppure — come risulta da ovvie considerazioni geometriche che per brevità omettiamo — invertire, durante le misure, le facce delle singole lastre disponendo lo strato sensibile verso l'esterno della sfera fotografica (opposto al centro).

Ciò posto è facile mostrare, e di ciò ci occuperemo in primo luogo, come la conoscenza della lunghezza degli spigoli situati nelle singole facce del poliedro innanzi definito sia in generale sufficiente, insieme all'altra con-

[1] Pervenuta all'Accademia il 16 settembre 1918.

dizione che il poliedro debba essere circoscrivibile ad una sfera, ad individuare il poliedro medesimo col centro della sfera iscritta e a fornire pertanto, con calcoli più o meno semplici, tutti gli elementi per la rappresentazione sferica delle configurazioni stellari.

Dette infatti $x_1, y_1, z_1$ ; $x_2, y_2, z_2$ ; ... $x_v, y_v, z_v$ le coordinate rispetto ad un qualunque sistema ortogonale dei $v$ vertici del poliedro, abbiamo, detto $s$ il numero degli spigoli, anzitutto il sistema di $s$ equazioni:

$$(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + (z_p - z_q)^2 = l^2_{p,q} . \tag{1}$$
$$(p \lesseqgtr q \; ; \; p, q = 1, 2, 3, \ldots v) .$$

Detto inoltre $f$ il numero delle facce e $n_i$ il numero dei vertici giacenti nella faccia $i^{esima}$, abbiamo $n_i - 3$ condizioni del tipo:

$$\begin{vmatrix} x_{1,i} & y_{1,i} & z_{1,i} & 1 \\ x_{2,i} & y_{2,i} & z_{2,i} & 1 \\ x_{3,i} & y_{3,i} & z_{3,i} & 1 \\ x_{r,i} & y_{r,i} & z_{r,i} & 1 \end{vmatrix} = 0 , \tag{2}$$

che possiamo chiamare di complanarità, in quanto che esprimono che uno qualunque $x_{r,i}, y_{r,i}, z_{r,i}$ dei vertici della faccia $i^{esima}$ giace nel piano determinato da tre altri dati.

A tali equazioni fra le coordinate dei vertici vanno aggiunte altre *sei* — arbitrarie purchè non contraddittorie colle (1) e (2) — atte a fissare la posizione del poliedro nello spazio. Possiamo, p. es., far coincidere un vertice coll'origine delle coordinate, porre un altro vertice contiguo al primo sull'asse delle $x$ e un terzo nel piano $xy$ di modo che sia:

$$x_1 = y_1 = z_1 = y_2 = z_2 = z_3 = 0 . \tag{3}$$

Dobbiamo infine introdurre la condizione che il poliedro sia circoscrivibile ad una sfera: ciò si traduce in altre equazioni in numero di $f - 1$ fra le $3v$ coordinate dei vertici e le 3 coordinate $\xi, \eta, \zeta$ del centro della sfera, equazioni le quali esprimono che la distanza fra $\xi, \eta, \zeta$ e il piano di una faccia è uguale a quella dello stesso punto dalle altre $f - 1$ facce.

Numerate le facce del poliedro secondo un ordine arbitrario e dette in generale $x_{i,j}, y_{i,j}, z_{i,j}$ le coordinate dell' $i^{esimo}$ vertice della faccia $j$, le equazioni dei piani delle facce 1 e $j$, saranno, rispettivamente

$$\begin{vmatrix} x_{1,1} & y_{1,1} & z_{1,1} & 1 \\ x_{2,1} & y_{2,1} & z_{2,1} & 1 \\ x_{3,1} & y_{3,1} & z_{3,1} & 1 \\ X & Y & Z & 1 \end{vmatrix} = 0 , \qquad \begin{vmatrix} x_{1,j} & y_{1,j} & z_{1,j} & 1 \\ x_{2,j} & y_{2,j} & z_{2,j} & 1 \\ x_{3,j} & y_{3,j} & z_{3,j} & 1 \\ X & Y & Z & 1 \end{vmatrix} = 0$$

o, più concisamente, $D_1(X, Y, Z) = 0$ , $D_j(X, Y, Z) = 0$ .

La condizione di circoscrivibilità del poliedro ad una sfera si esprime colle $f-1$ equazioni:

$$\sqrt{\lambda_j}\, D_1 = \pm \sqrt{\lambda_1}\, D_j\,, \qquad (j = 2\,, 3\,, \ldots f)$$

dove $\lambda_1\,, \lambda_j$ hanno il noto significato (somme dei quadrati dei coefficienti di $X\,, Y\,, Z$, rispettivamente in $D_1$ e $D_j$, coefficienti che, nel nostro caso, sono i complementi algebrici di $X\,, Y\,, Z$ nei due determinanti). Le quantità $\lambda_1\,, \lambda_j$ rappresentano perciò rispettivamente, secondo note formole di geometria analitica, $4\,S_1^2$ e $4\,S_j^2$ quando con $S_1$ ed $S_j$ si indichino le aree dei triangoli formati dai punti che individuano i due piani. L'equazione ultima, dopo l'elevazione a quadrato, necessaria per far sparire le irrazionalità nelle incognite, e dopo aver sostituito ad $X\,, Y\,, Z$ le coordinate del centro della sfera, diventa:

$$(4) \qquad S_j[D_1(\xi\,, \eta\,, \zeta)]^2 = S_1[D_j(\xi\,, \eta\,, \zeta)]^2\,.$$

Abbiamo pertanto fra le $3\,(v+1)$ incognite un numero N di equazioni uguale a

$$s + \sum_{i=1}^{i=f} (n_i - 3) + 6 + (f-1)\,,$$

donde, poichè è evidentemente per ogni poliedro $\sum_{i=1}^{i=f} n_i = 2s$ essendo ogni spigolo contato due volte nella somma,

$$N = 3\,(s-f) + 5 + f$$

e quindi, introducendo la relazione di Eulero, valida per ogni poliedro convesso,

$$v + f = s + 2\,,$$

abbiamo infine:

$$N = 3\,(v-2) + f + 5 = 3\,v + f - 1\,.$$

La differenza fra il numero delle equazioni e quello delle incognite è così

$$3\,v + f - 1 - 3\,(v+1) = f - 4$$

ed è necessariamente positiva o al minimo nulla (tetraedro) (1).

(1) Particolarmente interessante, almeno dal punto di vista teorico, è questo caso di minimo nel quale le equazioni di condizione si possono suddividere in due gruppi risolubili separatamente: il primo di *dodici*, cioè sei oltre le (3), sufficienti ad individuare in posizione e forma il poliedro ed altre $f-1$, cioè *tre*, per determinare le coordinate $\xi\,, \eta\,, \zeta$ del centro. Senza soffermarci in calcoli elementarissimi e senza occuparci qui delle difficoltà tecniche e strumentali — forse non insormontabili — inerenti alla applicazione pratica del metodo nel caso $f=4$, è bene rilevare esplicitamente come *bastino quattro lastre, purchè comprendenti nel loro insieme l'intera sfera celeste, per ottenere la soluzione autonoma del problema dell'astrometria fotografica.*

Le condizioni introdotte *sono quindi in generale sovrabbondanti*. Perchè le equazioni del nostro sistema, costituite dalle (1), (2), (3) e (4), siano compatibili bisogna che fra i coefficienti delle dette equazioni, ovvero, ciò che torna lo stesso, fra le costanti $l_{p,q}$, siano verificate $f - 4$ condizioni: questo certamente accade quando i valori delle $l_{p,q}$ siano quelli dedotti dalla misura delle lastre secondo il procedimento che passeremo in seguito ad indicare; poichè noi conosciamo *di fatto* la effettiva esistenza del poliedro di cui ci proponiamo di calcolare gli elementi metrici, poliedro che è quello costituito dai piani tangenti in punti di una sfera, distinti sebbene non ancora determinati.

Nel caso generale, quando cioè fra le $l_{p,q}$ non esistono altre particolari relazioni numeriche, sappiamo dalla teoria generale della eliminazione che la soluzione generale, quando esiste, *è unica*. È bene tuttavia chiarire il senso in cui bisogna qui intendere questa *unicità*. Le equazioni (1), (2), (3) e (4), che formano complessivamente il nostro sistema, rimangono tutte identicamente verificate, quando alle $x$, $\xi$ ovvero alle $y$, $\eta$ o alle $z$, $\zeta$ o anche a più gruppi di coordinate insieme si cambi il segno. In altri termini se il sistema ammette la soluzione

$$\begin{matrix} x_i = a_i \, , & y_i = b_i \, , & z_i = c_i \\ \xi = \alpha & \eta = \beta & \zeta = \gamma \end{matrix} \quad (i = 1, 2, 3, \dots v)$$

dovrà evidentemente anche ammettere tutte le $2^3 = 8$ soluzioni che si ottengono da

$$\begin{matrix} x_i = \pm a_i \, , & y_i = \pm b_i \, , & z_i = \pm c_i \\ \xi = \pm \alpha & \eta = \pm \beta & \zeta = \pm \gamma \end{matrix}$$

prendendo nei tre gruppi di coordinate tutte le possibili combinazioni di segni. Si hanno così otto poliedri che si trasformano l'uno nell'altro con una o più simmetrie ortogonali rispetto ai piani coordinati. Possono anche dedursi tutti da due fra essi, perchè l'operazione di cambiare il segno ad uno o più gruppi di coordinate equivale ad una trasformazione di coordinate nella quale non cambia nè l'origine nè la direzione degli assi, ma solo il verso.

Le figure corrispondenti sono perciò congruenti o sovrapponibili quando il seno del triedro delle direzioni positive dei nuovi assi (modulo della trasformazione) è eguale a $+1$, ovvero in simmetria ortogonale rispetto ad uno dei piani coordinati quando il detto modulo è eguale a $-1$. Si hanno così due gruppi di quattro poliedri ciascuno, essendo congruenti i poliedri di ciascun gruppo. Non abbiamo così, in sostanza, che *due* soluzioni diverse delle quali si può subito scegliere quella conveniente al problema notando che, fissato un certo ordine di percorrenza del perimetro di una data faccia relativo ad una certa successione dei vertici, il corrispondente movimento dovrà apparire compiersi nello stesso senso ad un osservatore situato al centro del poliedro trovato e ad un altro che guardi la data lastra dal lato innanzi definito (opposto allo strato sensibile).

Chimica. — *Sulle amalgame d'oro* Nota di N. PARRAVANO [1], presentata dal Socio E. PATERNÒ [2].

1. — È nota la grande facilità con cui l'oro si amalgama. Sulla natura dei solidi che si formano nulla però si conosce, malgrado l'argomento sia stato fatto varie volte oggetto di ricerca.

In natura si trovano amalgame con percentuali di oro oscillanti intorno al 40 %, il che corrisponde alla formula $Au_2Hg_3$ che richiede 39.66 % di Au [3].

Le amalgame ricche di mercurio sono, a temperatura ordinaria, semisolide, e varii autori hanno cercato di stabilire la composizione della parte solida, o separandola per filtrazione attraverso pelle di camoscio o sciogliendo in acido nitrico il mercurio in eccesso [4], oppure centrifugando le amalgame attraverso a una borsa di cuoio [5]. I solidi così ottenuti corrispondevano rispettivamente alle composizioni: $AuHg_2$, $Au_8Hg$, $AuHg_4$. Inoltre Guillet, nel suo trattato sulle leghe metalliche [6], riporta che da una soluzione di oro nel mercurio bollente si separa un solido di composizione $AuHg_4$, e che questo, sottoposto a una forte pressione, si scompone in mercurio e $Au_2Hg$.

A questi risultati, per i metodi di separazione adottati, non è possibile attribuire alcun valore dimostrativo della esistenza reale dei composti indicati.

Guertler [7], riprendendo recentemente in esame la questione dei composti di oro e di mercurio, ha attirato l'attenzione sul fatto, notato da varii sperimentatori, che, quando si scaldano i cristalli di amalgama solida, questi perdono mercurio, e i cristalli di oro che restano conservano l'aspetto di quelli dell'amalgama. Egli ha riavvicinato il fenomeno a quanto si verifica nel caso delle zeoliti, le quali possono perdere acqua senza che la forma esterna dei cristalli venga alterata, e, tenendo conto delle esperienze di de Souza [8] e di Merz e Weith [9] — secondo cui quando si scaldano le amalgame a temperature fra 300° e 450° l'evaporazione del mercurio si arresta quasi allorchè la sua concentrazione è scesa a valori fra 10 e 0,33 % (a 440°) —,

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica inorganica e chimico-fisica del Regio Istituto di Studî superiori di Firenze.

[2] Pervenuta all'Accademia il 1° ottobre 1918.

[3] Gmelin Kraut, Bd. 5, Abt. 2, pag. 1751 (1914).

[4] Henry, J. B. (1855), 419; Wilm. Z. anorg. Ch. *4*, 325 (1893).

[5] Guertler, *Metallographie*, 523.

[6] Pag. 992.

[7] Loc. cit., pag. 524.

[8] Berichte, *8* 1616 (1875); *9* 1050 (1876).

[9] Id., *14* 1438 (1881).

ha concluso che il mercurio si scioglie nell'oro dando origine ad una soluzione solida con al massimo circa il 10 % di Au, e che nelle amalgame contenenti da 90 a 0 di Au non si forma alcun altro individuo cristallino.

All'argomentazione del Guertler si può però obiettare anzitutto che, ad esempio, Acheson [1] ha trovato che la grafite che si origina per decomposizione del carborundum a temperatura elevata conserva la forma dei cristalli di carborundum da cui deriva, e inoltre che de Souza e Merz e Weith hanno stabilito le composizioni dei prodotti finali di evaporazione del mercurio, ma non hanno studiato il decorso della evaporazione, il che è ben diverso. Vedremo infatti che questo studio porta a ben altre conclusioni.

2. — È stato anzitutto stabilito il diagramma di fusione di queste amalgame, nei limiti (da 0 a 35 % Au) in cui è stato possibile farlo, data la volatilità del mercurio e dato il punto di fusione relativamente alto dell'oro. Queste esperienze hanno messo in luce l'esistenza nel diagramma di una curva di inizio di solidificazione che si abbassa in modo continuo sino al punto di solidificazione del mercurio, e di due orizzontali di equilibrio invariante: una a —38°, e l'altra a circa 100°. La comparsa della orizzontale a 100° indica che il solido a contatto con l'amalgama liquida al di sopra di 100° non è lo stesso che a temperature inferiori: o esso subisce una trasformazione, o, per reazione col liquido, dà origine ad un solido diverso il quale possiede un campo di separazione primaria dalle amalgame che contengono da 0 a circa 1 % di oro.

3. — Per stabilire la natura della reazione che si compie a 100° si è fatto ricorso a due metodi diversi.

1°) Si collochi in un recipiente una certa quantità di amalgama satura e una certa quantità di oro, e si faccia il vuoto. Nel recipiente si forma un'atmosfera di vapori di mercurio di tensione uguale a quella che l'amalgama liquida e l'amalgama solida in equilibrio hanno alla temperatura di esperienza. Questo vapore si condensa sull'oro e lo amalgama. Si ha così distillazione del mercurio sull'oro, e il processo ha fine quando la composizione dell'amalgama che si va a formare ha raggiunto la composizione del solido in equilibrio con l'amalgama liquida.

2°) Si faccia passare una corrente di idrogeno sopra un'amalgama: il gas trascina con sè una certa quantità di mercurio, e la quantità trascinata è funzione della velocità della corrente gasosa, della durata dell'esperienza e della tensione di mercurio dell'amalgama.

Mantenendo costanti, in una serie di esperienze, la forma dell'apparecchio, la velocità e la durata della corrente gasosa, le quantità di mercurio trascinate saranno funzione della tensione di mercurio dell'amalgama.

Ora, in un sistema a due componenti, se si hanno tre fasi coesistenti (amalgama solida, liquido, vapore), la tensione di mercurio ha un certo

[1] J. Franklin Institute, *147* 481 (1897).

valore — a temperatura costante — che resta lo stesso fino a che si trovano presenti liquido e solido. Se perciò, mantenendo costante la velocità della corrente gasosa, si continua ad asportare mercurio, e si misurano le perdite di peso in successivi intervalli eguali di tempo, queste debbono essere eguali, nei limiti degli errori di esperienza.

Continuando con la corrente gasosa a portar via mercurio, sempre a temperatura costante, si arriva ad un momento in cui, scomparsa la parte liquida, è la solida che viene a perdere mercurio. E allora, se il solido può perdere mercurio senza variar di natura, a ciascuna delle successive composizioni che verrà assumendo corrisponderà una data tensione di vapore; se invece, perdendo mercurio, si trasforma in un miscuglio di due solidi di composizione diversa, esso costituirà un nuovo sistema con tensione di vapore diversa e costante, a temperatura costante. In questo caso alla variazione di natura, e quindi di tensione di vapore, del sistema deve corrispondere nella esperienza di evaporazione una variazione brusca nelle quantità di mercurio trascinate in successivi intervalli eguali di tempo. Le composizioni delle amalgame in corrispondenza delle variazioni brusche sono quelle dei solidi esistenti come individui cristallini puri alla temperatura di esperienza.

4. — Col 1° metodo sono state operate distillazioni di mercurio su oro alle temperature di 80°, 150°, 200°, 250°. L'amalgama che si forma ha un contenuto di oro che a 80° oscilla di poco intorno al 40 %, mentre a tutte le altre temperature studiate essa contiene circa il 74 % di Au.

Con il 2° metodo sono state eseguite evaporazioni di mercurio alle temperature di 90-95°, e di 150°, 200°, 225°, 280°, 325°. I risultati concordano pienamente con quelli del 1° metodo: a 90°-95° la variazione brusca si ha ad una concentrazione di oro di circa il 40 %, e a tutte le altre temperature invece a composizioni che oscillano di poco intorno al 74 %.

La orizzontale che compare a 100° nel diagramma di fusione corrisponde perciò alla reazione fra solido, separatosi a temperature superiori, e liquido presente per dare origine a un nuovo solido stabile a temperature inferiori. Il solido stabile al di sotto di 100° è un composto $Au_2Hg_3$ per il quale si calcola un contenuto in oro del 39.66 %. Quanto al solido esistente a temperature superiori, se esso fosse un cristallo misto saturo è probabile che alle diverse temperature a cui si è sperimentato vi si sarebbero trovati contenuti diversi di oro. L'avere invece trovato al di sopra di 100° percentuali di oro che oscillano di poco intorno ad un valore medio di 74 % prova che il solido che si forma è sempre lo stesso, e cioè un composto definito. Ad un composto di oro e mercurio con circa il 74 % di oro corrisponde la formula $Au_3Hg$, per la quale si calcola 74.74 % di Au.

Riassumendo perciò si ha che le esperienze di distillazione del mercurio su oro e di evaporazione del mercurio in corrente di idrogeno portano alla conclusione che nelle amalgame di oro sono contenuti almeno due composti $Au_2Hg_3$ e $Au_3Hg$.

## Meteorologia. — *Sulla direzione delle correnti aeree in Sicilia.* Nota di FILIPPO EREDIA, presentata dal Socio E. MILLOSEVICH [1].

La frequenza dei venti in Sicilia è conosciuta, per le diverse città principali, a mezzo delle monografie pubblicate dai direttori degli osservatori ivi residenti; ma gli elementi di discussione sono riferiti a periodi diversi, cosicchè manca la possibilità di coordinarli per indicare le leggi a cui sono sottoposte, su tutta l'isola, le correnti aeree. Alcuni studiosi hanno dato cenni sul proposito, e così nella Memoria del Rung [2] si trovano indicate le direzioni dominanti, dedotte graficamente, come risultanti delle direzioni attribuite al vento sopra 100 casi durante un periodo di dieci anni e relative a Messina, Palermo e Siracusa.

In un precedente lavoro venne esaminata la frequenza della direzione dei venti pel periodo 1891-1900, ma le conclusioni, perchè riferite ad un solo decennio, potevano ritenersi approssimate, onde abbiamo creduto opportuno discutere gli elementi di un periodo più lungo e propriamente del ventennio 1891-1910. Sulle ragioni che ci consigliarono di cominciare il periodo in esame col 1891 rimandiamo a quanto venne pubblicato [3]; e con il procedimento usato nel riferito studio, abbiamo dedotto la frequenza media mensile delle singole stagioni. I valori segnati in corsivo stanno ad indicare la frequenza delle correnti aeree predominanti, e seguendoli risulta per Caltanissetta una costanza del predominio dei venti di tramontana; per Catania, eccetto l'inverno quando predominano venti di ponente, nelle rimanenti stagioni la frequenza massima spetta ai venti di greco e di levante; a Girgenti, in primavera e in estate predomina il ponente, in inverno il greco, mentre in autunno sono ugualmente predominanti il ponente e il greco; a Messina, in autunno predomina il mezzogiorno e nelle rimanenti stagioni la tramontana e il maestro; a Mineo, in inverno e in primavera il ponente pel rimanente il libeccio; a Palermo, in primavera e in estate il greco, pel resto il libeccio; a Riposto predomina lo scirocco; a Siracusa, in estate il

[1] Pervenuta all'Accademia il 3 ottobre 1918.

[2] Rung G., *Repartition de la pression atmosphèrique sur l'Europe observée de 1881 à 1895 et direction moyenne du vent sur les litoraux.* Copenhague, 1904.

[3] *I venti in Italia,* Rivista tecnica di Aeronautica e Bollettino della Società aeronautica italiana. Roma, 1909.

| | N | NE | E | SE | S | SW | W | NW | N | NE | E | SE | S | SW | W | NW |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Inverno. | | | | | | | | Estate. | | | | | | | |
| Caltanissetta. | *107* | 23 | 67 | 4 | 11 | 5 | 19 | 54 | *112* | 16 | 55 | 6 | 23 | 7 | 15 | 43 |
| Catania. . . . | 22 | 36 | 21 | 10 | 7 | 37 | *57* | 27 | 10 | 55 | *59* | 28 | 5 | 16 | 14 | 7 |
| Girgenti . . . | 39 | *60* | 27 | 18 | 23 | 16 | 42 | 54 | 20 | 31 | 20 | 10 | 35 | 47 | *62* | 24 |
| Messina. . . . | 45 | 7 | 2 | 12 | 48 | 38 | 36 | *74* | *105* | 43 | 1 | 7 | 24 | 14 | 16 | 72 |
| Mineo. . . . . | 18 | 7 | 32 | 39 | 25 | 64 | *91* | 24 | 17 | 11 | 32 | 31 | 57 | *87* | 48 | 17 |
| Palermo . . . | 19 | 20 | 15 | 12 | 59 | *74* | 43 | 20 | 17 | *80* | 51 | 7 | 8 | 12 | 17 | 25 |
| Riposto. . . . | 46 | 23 | 2 | *57* | 8 | 30 | 6 | 44 | 10 | 67 | 7 | *88* | 7 | 15 | 6 | 32 |
| Siracusa . . . | 19 | 51 | 19 | 15 | 10 | 64 | *86* | 23 | 34 | *66* | 22 | 31 | 17 | 55 | 33 | 19 |
| Trapani . . . | 32 | 41 | 7 | *86* | 14 | 16 | 35 | 58 | *95* | 42 | 2 | 28 | 12 | 27 | 14 | 64 |
| | Primavera. | | | | | | | | Autunno. | | | | | | | |
| Caltanissetta. | *99* | 14 | 68 | 5 | 19 | 7 | 27 | 52 | *95* | 17 | 75 | 7 | 16 | 10 | 19 | 49 |
| Catania. . . . | 13 | *61* | 46 | 20 | 7 | 27 | 35 | 15 | 16 | *39* | *36* | 14 | 5 | 23 | 34 | 14 |
| Girgenti . . . | 27 | 35 | 26 | 20 | 30 | 33 | *50* | 45 | 27 | *45* | 29 | 23 | 33 | 30 | *45* | 30 |
| Messina . . . | 62 | 21 | 3 | 11 | 54 | 26 | 28 | *70* | 52 | 17 | 2 | 10 | *67* | 35 | 21 | 56 |
| Mineo. . . . . | 17 | 11 | 39 | 41 | 32 | 65 | *74* | 21 | 17 | 9 | 43 | 43 | 38 | *3* | 61 | 16 |
| Palermo . . . | 18 | *48* | 28 | 12 | 29 | 33 | 34 | 29 | 15 | 41 | 23 | 12 | 45 | *56* | 28 | 20 |
| Riposto. . . . | 21 | 32 | 5 | *96* | 11 | 21 | 5 | 42 | 19 | 36 | 3 | *85* | 7 | 23 | 7 | 45 |
| Siracusa . . . | 24 | *56* | 39 | 40 | 14 | *56* | 55 | 20 | 18 | 52 | 22 | 29 | 15 | *64* | 62 | 19 |
| Trapani. . . . | 53 | 35 | 1 | *64* | 14 | 24 | 30 | *64* | 46 | 36 | 3 | *96* | 18 | 15 | 23 | 45 |

greco, in primavera il greco e il libeccio e pel rimanente il ponente e il libeccio; a Trapani, in estate la tramontana e pel resto lo scirocco.

| | N | NE | E | SE | S | SW | W | NW |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Caltanissetta . . . . . . . | *413* | 70 | 265 | 22 | 69 | 29 | 80 | 198 |
| Catania . . . . . . . . . | 61 | *191* | 162 | 72 | 24 | 103 | 140 | 63 |
| Girgenti. . . . . . . . . | 113 | 171 | 102 | 71 | 121 | 126 | *199* | 153 |
| Messina . . . . . . . . . | 264 | 88 | 8 | 40 | 193 | 113 | 101 | *272* |
| Mineo . . . . . . . . . . | 69 | 38 | 146 | 154 | 152 | *289* | 274 | 78 |
| Palermo. . . . . . . . . | 69 | *189* | 117 | 43 | 141 | 175 | 122 | 94 |
| Riposto . . . . . . . . . | 96 | 158 | 17 | *326* | 33 | 89 | 24 | 163 |
| Sisacusa . . . . . . . . . | 95 | 225 | 92 | 115 | 56 | *239* | 236 | 81 |
| Trapani . . . . . . . . . | 226 | 154 | 13 | *274* | 58 | 82 | 102 | 231 |

Trascriviamo qui appresso la frequenza per l'anno, e seguendone i valori deduciamo come risultano più frequenti i venti di tramontana per Caltanissetta, di greco per Catania e Palermo, di scirocco per Riposto e Trapani, di libeccio per Mineo e Siracusa e di ponente per Girgenti e di maestro per Messina. Vediamo in tal modo confermato quanto fu indicato nel su

citato lavoro. Sulla frequenza così considerata prevalgono le influenze locali e questi dati non consentono di esaminare, con la dovuta estensione, il comportamento generale delle correnti aeree dell'isola in rapporto agli elementi meteorologici. Dati più completi possono aversi seguendo la direzione del vento medio ossia la risultante geometrica delle singole direzioni osservate, facendo uso delle note formule di Lambert, aggiungendo l'angolo che la direzione del vento medio fa col meridiano, contato da nord verso ovest, e la grandezza della risultante. Trascriviamo nella sottostante tabella gli anzidetti valori calcolati per ciascuna località, avvertendo che allorquando i valori delle componenti del parallelo e del meridiano sono preceduti dal segno positivo, va inteso che si debbono considerare nelle direzioni W e N; mentre quando sono preceduti dal segno negativo, debbonsi considerare nelle direzioni E e S. La direzione del vento medio va considerata unitamente alla risultante e si comprende che allorquando quest'ultima ha valore minimo, la direzione del vento medio non ha alcun significato inquantochè vorrà dire che nessuna direzione ha spirato in modo tale da predominare sulle altre. E pertanto, noi consideriamo quest'ultimo caso allorquando il valore della risultante è uguale o inferiore al numero dieci.

Ben dice Angot [1] che il vento medio di una determinata stagione può considerarsi come il risultato di due effetti: l'uno dovuto al vento medio annuale, l'altro ad un vento variabile con la stagione. Il valore di quest'ultimo può dedursi dallo scostamento di ciascun valore stagionale da quello annuo; difatti se calcoliamo gli scostamenti delle componenti N e W di ciascuna stagione dai relativi valori annuali, la risultante del parallelogramma, avente per lati segmenti proporzionali a detti scostamenti, ci indicherà la direzione e la grandezza del vento dovuto alla stagione ossia la componente stagionale.

| | Componente nord | | | | Componente ovest | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Inverno | Primavera | Estate | Autunno | Inverno | Primavera | Estate | Autunno |
| Caltanissetta . . . . | 98,6 | 72,7 | 76,0 | 68,1 | 57,0 | 76,8 | 69,3 | 58,3 |
| Catania . . . . . . . | 66,6 | 66,4 | 75,2 | 70,6 | 139,3 | 52,0 | 3,2 | 77,3 |
| Girgenti . . . . . . | — 25,2 | — 87,7 | — 114,6 | — 88,2 | — 3,0 | 28,0 | 50,9 | — 1,0 |
| Messina . . . . . . . | — 198,5 | — 171,2 | — 69,9 | — 212,6 | — 178,5 | — 208,0 | — 237,8 | — 214,1 |
| Mineo . . . . . . . . | 256,3 | 246,9 | 210,6 | 229,0 | — 169,0 | — 198,7 | — 197,9 | — 213,5 |
| Palermo . . . . . . . | 47,2 | 44,0 | 95,8 | — 0,2 | 40,1 | — 24,3 | — 101,1 | — 6,9 |
| Riposto . . . . . . . | 22,4 | — 16,9 | 3,7 | — 3,6 | 163,1 | 45,5 | 78,9 | 122,8 |
| Siracusa . . . . . . . | 0,4 | — 9,2 | 11,2 | — 16,7 | — 48,0 | — 128,0 | — 135,2 | — 88,5 |
| Trapani . . . . . . . | — 131,2 | — 100,7 | — 28,4 | — 133,6 | 26,8 | 72,5 | 19,1 | — 31,5 |

[1] Angot A., *Étude sur le climat de la France. Regime des vents.* Annales du Bureau Central Metéorologique de France. Année 1907. Mémoires. Paris, 1911.

| | Inverno | | | | Primavera | | | | Estate | | | | Autunno | | | | Anno | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Componente N | Componente W | Direzione del vento medio | Risultante | Componente N | Componente W | Direzione del vento medio | Risultante | Componente N | Componente W | Direzione del vento medio | Risultante | Componente N | Componente W | Direzione del vento medio | Risultante | Componente N | Componente W | Direzione del vento medio | Risultante |
| Caltanissetta . . . | 144,1 | —32,5 | W 77° S | 160,7 | 118,2 | — 12,7 | W 83° N | 116,2 | 121,5 | —20,2 | E 80° N | 125,3 | 113,6 | —31,2 | W 75° N | 117,8 | 45,5 | — 89,5 | W 79° N | 463,7 |
| Catania . . . . . | 26,3 | 48,7 | N 61 W | 55,4 | 26,5 | — 38,6 | W 55 N | 46,8 | 17,7 | —87,4 | E 79 N | 89,2 | 22,3 | —13,3 | W 50 N | 26,2 | 92,9 | — 90,6 | W 48 N | 122,8 |
| Girgenti . . . . . | 72,6 | 9,3 | N 82 E | 73,1 | 10,1 | 40,3 | N 76 W | 41,5 | — 16,8 | 63,2 | W 75 S | 65,4 | 9,6 | 11,3 | N 50 W | 14,8 | 97,8 | 12,3 | N 52 W | 127,1 |
| Messina . . . . . | 18,9 | 99,8 | N 79 W | 101,6 | 46,2 | 70,3 | N 56 W | 83,2 | 147,5 | 40,5 | N 75 W | 153,0 | 4,8 | 64,2 | N 86 W | 64,3 | 217,4 | 278,3 | N 53 W | 353,1 |
| Mineo . . . . . . | — 57,9 | 88,7 | W 57 S | 106,0 | — 67,3 | 59,0 | W 49 S | 89,3 | — 103,6 | 59,8 | W 60 S | 119,6 | —85,3 | 44,2 | W 63 S | 98,1 | — 314,2 | 257,7 | W 51 S | 402,6 |
| Palermo . . . . . | — 72,5 | 71,8 | W 45 S | 102,1 | 18,7 | 7,4 | N 68 W | 20,1 | 70,5 | —69,4 | E 45 N | 98,9 | —25,1 | 24,8 | W 45 S | 35,2 | — 25,3 | 31,7 | W 51 S | 40,2 |
| Riposto . . . . . | 18,9 | 6,8 | N 70 W | 20,1 | — 20,4 | — 110,8 | S 80 E | 101,4 | 0,2 | —77,4 | E 88 N | 77,4 | — 7,1 | —33,5 | S 78 E | 33,8 | — 3,5 | — 156,3 | S 89 E | 156,4 |
| Siracusa . . . . . | 5,5 | 81,9 | N 86 W | 83,6 | — 4,1 | 1,9 | N 66 S | 4,5 | 16,3 | — 5,3 | E 72 N | 17,1 | —11,8 | 41,4 | W 77 S | 53,4 | 5,1 | 129,9 | N 88 W | 133,9 |
| Trapani . . . . . | 16,3 | 34,5 | N 64 W | 38,2 | 46,8 | 80,2 | N 60 W | 92,8 | 119,1 | 26,8 | N 77 W | 122,1 | 13,9 | —23,8 | E 60 N | 25,4 | 147,5 | 7,7 | N 87 W | 147,7 |

Diamo nella precedente tabella i valori di detti scostamenti e della cui composizione deduciamo come, per Palermo, la componente varia da NW in inverno a E in autunno passando per N; per Trapani e per Girgenti varia da SE a SW; per Siracusa da E a SE; per Catania da WSW a S; per Riposto da W a SW; per Messina da E a ENE; per Caltanissetta e Mineo da NW a NNW.

Le regioni interne, rappresentate in questo studio da Caltanissetta e da Mineo, non segnalano adunque alcuna rotazione della componente stagionale, il che non avviene per le altre località. Si comprende come la variazione stagionale debba in massima parte attribuirsi all' influenza dei venti etesii dovuti alla temperatura del Sahara elevata durante l'estate rispetto a quella del Mediterraneo, per cui si formano sul continente sahariano delle correnti ascendenti a cui tiene dietro un richiamo di aria dall' Europa continentale e dal Mediterraneo con direzioni tra NW e W. La prevalenza di questi venti viene a mancare nei mesi con temperatura elevata, perchè il Mediterraneo, conservando temperatura superiore a quella del continente, diviene sede di bassa pressione a cui corrispondono venti orientali. La mancata esistenza di componente stagionale nelle regioni interne e la variazione di direzione di detta componente nelle altre località, fanno pensare ad una circolazione atmosferica tale per cui la parte interna dell' isola deve sempre essere sede di bassa pressione rispetto a quanto si nota lungo le coste.

A sostenimento di detta interpretazione diamo i valori della pressione barometrica media mensile ridotta al livello del mare valevole per il periodo 1880-1910 e relativa alle su menzionate città sicule.

| | Pressione barometrica media pel periodo 1880-1910 | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Gennaio | Febbraio | Marzo | Aprile | Maggio | Giugno | Luglio | Agosto | Settembre | Ottobre | Novembre | Dicembre | Anno |
| Caltanissetta . | 763,7 | 762,0 | 761,1 | 760.8 | 760,6 | 760,9 | 760,8 | 761,1 | 762,1 | 762,3 | 762,9 | 762,4 | 761,8 |
| Catania . . . . | 63,6 | 61,7 | 61,4 | 60,9 | 61,6 | 61,8 | 61 3 | 62,1 | 62,9 | 62,5 | 63,1 | 62,3 | 62,1 |
| Girgenti . . . | 64,4 | 63,5 | 62,3 | 61,3 | 62,1 | 62,8 | 62,5 | 62,6 | 63,8 | 63,5 | 64,0 | 63,7 | 62,8 |
| Messina . . . | 63,9 | 62.6 | 61,4 | 60,6 | 61,6 | 62,1 | 61,9 | 62,1 | 63,1 | 63,0 | 63,1 | 62,4 | 62,3 |
| Mineo . . . . . | 62,6 | 61,3 | 60,5 | 59,7 | 60,3 | 60,7 | 60,4 | 61,1 | 61,9 | 62,4 | 62,7 | 62,8 | 61,3 |
| Palermo . . . | 63,5 | 62,4 | 61,3 | 60,2 | 61,5 | 62,2 | 62,0 | 62,2 | 62,8 | 62,6 | 63,0 | 62,5 | 62,5 |
| Riposto . . . . | 63,4 | 62,4 | 61,2 | 60,5 | 61,4 | 61,9 | 61,5 | 61,6 | 62,6 | 62,5 | 62,9 | 62,2 | 62,0 |
| Siracusa . . . | 63,5 | 62 5 | 61,3 | 60 1 | 61,1 | 61,6 | 61,1 | 61,1 | 62,7 | 62,4 | 62,8 | 63,5 | 61,9 |
| Trapani. . . . | 64,1 | 63,2 | 62,1 | 60,8 | 61,9 | 62,5 | 62,7 | 62,8 | 63,4 | 62,9 | 63,4 | 62,7 | 62,7 |

Riportando su una carta geografica le medie anzidette, risulta distintamente un'area di bassa pressione che risiede al centro dell' isola e che in inverno si sposta debolmente verso la pianura di Catania, forse richiamata dall'elevata temperatura del mare Jonio, mentre nell'estate occupa la parte centrale dell' isola.

E. M.

## Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche*
Vol. V. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI. Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I-XXVII. (1892-1918). Fasc. 5°-6°, Sem. 2°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-XXVII. (1892-1918). Fasc. 1°-2°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XII. Fasc. 12.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-7.

---

## CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. 10; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa e Napoli.*

P. MAGLIONE & C. STRINI (successori di E. Loescher & C.) — *Roma.*

# INDICE

## Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

*pervenute all'Accademia durante le ferie del 1918.*



---



---

E. Mancini *Segretario d'ufficio responsabile*.

Pubblicazione bimensile. N. 7-8.

# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

## RENDICONTI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

**Volume XXVII.° — Fascicoli 7°-8°**

2° SEMESTRE.

*Comunicazioni pervenute all'Accademia durante le ferie del* 1918.

(Ogni Nota o Memoria porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

# ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

## PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

---

### I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 9 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a pagine 4 1/2.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 30 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

### II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta a stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta, pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 50 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti; 30 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

### Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

---

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

*pervenute all'Accademia durante le ferie del 1918.*

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo)

**Algebra.** — *Sulle radici reali delle equazioni iterate di una equazione quadratica.* Nota del Socio S. PINCHERLE [1].

1. Con $\alpha(x)$ indico l'espressione $x^2 - a$, dove $a$ è un numero positivo al quale si darà il nome di *base*; con $\alpha_n(x)$ ne indico le iterate, per modo che è

$$\alpha_1(x) = \alpha(x)\,,\ \alpha_2(x) = \alpha^2(x) - a\,,\ \ldots\ \alpha_n(x) = \alpha^2_{n-1}(x) - a\,.$$

Quando la base si voglia porre in evidenza, si scriverà $\alpha_n(x\,;a)$ al posto di $\alpha_n(x)$.

Le radici dell'equazione

$$(\alpha) \qquad \alpha_n(x) = 0$$

si possono tutte esprimere mediante catene di $n$ radicali quadratici

$$(\beta) \qquad \pm\sqrt{a \pm \sqrt{a} \pm \cdots \pm \sqrt{a}}\,.$$

Ad ogni diversa disposizione dei segni $+$ o $-$ corrisponde in generale una diversa radice della $(\alpha)$.

Scopo della presente Nota è di dare un criterio per la realtà delle radici $(\beta)$.

2. È opportuno anzitutto di stabilire una notazione che permetta di porre in evidenza, nelle espressioni $(\beta)$, la successione dei segni $+$ e $-$.

[1] Pervenuta all'Accademia il 6 settembre 1918.

I segni radicali di $(\beta)$ verranno contati da sinistra verso destra. Supposto il primo radicale affetto da segno $+$, esso sia seguìto immediatamente da $r_1 - 1$ con lo stesso segno $+$; a questi succeda un radicale con segno $-$, seguìto immediatamente da $r_2 - 1$ con segno $+$, e così via; infine, l'ultimo segno $-$ sia seguìto da $r_p - 1$ segni $+$. Una tale catena verrà rappresentata colla notazione

$$(\gamma) \qquad (r_1, r_2, \dots r_p),$$

dove, essendo $n$ il numero dei radicali, gli interi positivi (non nulli) $r_1$, $r_2, \dots r_p$ dànno

$$(\delta) \qquad r_1 + r_2 + \cdots + r_p = n.$$

Quando il primo radicale avesse segno $-$, si farebbe precedere da questo segno la parentesi: così, la radice contraria di $(\gamma)$ si scriverà

$$-(r_1, r_2, \dots r_p), \quad \text{od anche} \quad (0, r_1, r_2, \dots r_p).$$

Agli interi $r_1, r_2, \dots r_p$ daremo il nome di *cifre* (1). Volendo porre in evidenza la base, la $(\gamma)$ si modificherà scrivendo

$$(\delta') \qquad (r_1, r_2, \dots r_p; a).$$

Data una catena $(\gamma)$, le catene che se ne deducono sopprimendo i primi radicali si diranno catene *secondarie* della $(\gamma)$. Tali saranno

$$(r_1 - 1, r_2, \dots r_p), (r_1 - 2, r_2, \dots r_p), \dots (r_2, r_3, \dots r_p), \dots (r_p).$$

3. Risalendo nella successione delle catene secondarie, le $(1), (2), \dots (r_p)$ sono certamente reali. Se ne incontriamo una immaginaria $(1, r_i, r_{i+1}, \dots r_p)$, le precedenti saranno tutte non reali.

Trattandosi di radici quadrate di elementi non reali, s'intenderà che il segno $+$ sia attribuito a quel valore della radice il cui argomento è compreso fra $0$ e $\pi$ ($\pi$ escluso), ed il segno $-$ a quello il cui argomento è compreso fra $\pi$ e $2\pi$ ($2\pi$ escluso).

4. Può accadere che due delle espressioni $(\beta)$ siano fra loro uguali. Ciò richiede — condizione necessaria e sufficiente — che una delle catene secondarie di una $(\beta)$ abbia il valore zero; in altri termini, una almeno fra le equazioni $\alpha_m(x) = 0$, con $m < n$, deve ammettere la radice zero. Osservando poi che, per $n > 1$, il termine indipendente da $x$ nella $(\alpha)$ non è altro che $\alpha_{n-1}(a)$, la condizione precedente equivale al fatto che l'equazione $\alpha_{m-1}(x) = 0$ ammetta per radice $a$. Questo fatto, che un'equazione della

(1) Cfr. Rendic. dell'Accademia di Bologna, 17 febbraio 1918; Rendic. dell'Acc. di Torino, 28 aprile 1918. Queste Note verranno citate rispettivamente colle lettere A e B.

classe $(\alpha)$ abbia per radice lo zero o la base, può accadere soltanto per valori particolari della base, i quali si diranno *valori speciali* o *critici*.

È evidente che l'uguaglianza di due delle espressioni $(\beta)$ equivale alla presenza di una radice doppia per la $(\alpha)$.

Se due equazioni $(\alpha)$, di grado diverso, hanno una radice comune $x$, la base è speciale: infatti da

$$\alpha_n(x) = 0 \ , \ \alpha_m(x) = 0 \ , \ (n > m)$$

segue

$$\alpha_{n-m}(\alpha_m(x)) = \alpha_{n-m}(0) = 0 .$$

Osservando che è

$$(\varepsilon) \qquad \frac{d\alpha_m(x)}{dx} = 2^n x\, \alpha_1(x)\, \alpha_2(x) \dots \alpha_{n-1}(x) \, ,$$

si conferma che se la $(\alpha)$ ha una radice multipla $x$, per questa, annullandosi la derivata, sarà $\alpha_m(x) = 0$ per un $m < n$, e quindi, essendovi una radice comune a due equazioni $(\alpha)$ di indice diverso, la base sarà speciale [1].

5. I valori speciali della base soddisfano dunque ad equazioni della forma

$$(\zeta) \qquad \alpha_m(u\,;u) = 0 \, , \qquad (m = 0 \, , 1 \, , 2 \, , \dots)$$

cioè alle

$$(\zeta') \qquad \left\{ \begin{array}{l} u = 0 \ , \ u^2 - u = 0 \ , \ (u^2 - u)^2 - u = 0 \, , \\ \qquad ((u^2 - u)^2 - u)^2 - u = 0 \, , \dots \end{array} \right.$$

Poichè la base è positiva, l'insieme dei suoi valori speciali è dunque costituito dal sistema delle radici positive delle $(\zeta)$. A questo sistema appartiene il valore $u = 1$, radice di tutte le $(\zeta)$ d'indice dispari. Le radici delle $(\zeta)$ godono di interessanti proprietà, dalle quali però possiamo qui prescindere, e che si deducono senza difficoltà dalla relazione ricorrente

$$\alpha_m = \alpha_{m-1}^2 - u \, .$$

Ci conviene solo di notare che ogni radice $u$ della $(\zeta)$ soddisfa ad una uguaglianza della forma

$$(\eta) \qquad \pm\sqrt{u \pm \sqrt{u \pm \cdots \pm \sqrt{u}}} = u \, ,$$

con $m$ radicali; ad ognuna delle radici corrisponde una diversa disposizione dei segni.

6. Consideriamo dapprima l'uguaglianza $(\eta)$ in cui siano tutti i segni positivi:

$$(\theta) \qquad \sqrt{u + \sqrt{u + \cdots + \sqrt{u}}} = u \, ;$$

[1] V. Nota B, n. 8.

questa, poichè $m$ sono i radicali, può scriversi secondo la notazione $(\delta')$ del n. 2:

$$(\theta') \qquad (m\,;u) = u\,.$$

In $(\theta)$, il primo membro è maggiore di $u$ per $u \leq 1$, è minore di $u$ per $u \geq 2$ [1]; è facile inoltre di dimostrare che $(m\,;u) - u$ è funzione decrescente di $u$; ne viene dunque che la $(\theta)$ ha un'unica soluzione positiva, che indicherò con $s_m$, e che per $m \geq 1$ è compresa fra 1 e 2.

Essendo $(n\,;u) > (m\,;u)$ per $n > m$, sarà $(n\,;s_m) > s_m$, da cui si deduce $s_n > s_m$; ed infatti, si ha

$$(n\,;u) > u \text{ per } u < s_n \quad , \quad (n\,;u) < u \text{ per } u > s_n\,.$$

Le $s_n$ formano dunque una successione crescente. È $s_0 = 0$, $s_1 = 1$, $s_2 = 1{,}754\ldots$, ecc.

Le $s_n$ essendo crescenti ed inferiori a 2, esse tendono ad un limite — loro limite superiore — che dico essere uguale a 2. Infatti, se questo limite S fosse minore di 2, si avrebbe

$$(r\,;u) < u$$

per $r$ arbitrariamente grande, se $u$ è un valore compreso fra S e 2. D'altra parte, essendo

$$\lim_{r=\infty} (r\,;u) = \tfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + 4u}\right)$$

che è maggiore di $u$ per ogni $u$ inferiore a 2 [2], si può prendere $r$ abbastanza grande perchè sia $(r\,;u) > u$: vi è dunque contraddizione nel supporre $S < 2$. La successione delle $s_m$ tende dunque al limite 2.

Fra le radici delle $(\zeta)$, la $s_m$ è la massima positiva; infatti, per ogni $u > s_m$ è $(m\,;u) < u$, e quindi *a fortiori* è minore di $u$ ogni espressione $\sqrt{u \pm \sqrt{u \pm \cdots}}$ formata da $m$ radicali che, a differenza di $(m\,;u)$, non siano tutti positivi.

7. Veniamo ora a studiare la $(\eta)$ nel caso in cui non tutti i segni siano positivi. Tale sarà però il primo segno; il primo membro verrà dunque a scriversi $f = (r_1\,, r_2\,, \ldots r_q\,;u)$ che indicherò talvolta brevemente anche con $f(u)$. La catena secondaria $(r_i\,, r_{i+1}\,, \ldots r_q)$ si indicherà con $f_i$, cosicchè $f_1 = f$.

Paragonando le cifre successive di $f$ e di $f_i$, sia

$$r_1 = r_i\,, r_2 = r_{i+1}\,, \ldots r_{k-1} = r_{i+k-2}\,, r_k \gtrless r_{i+k-1}\,,$$

[1] V. Nota A, n. 3.
[2] V. Nota A, n. 3.

dove $k$ è $\geq 1$. Allora, se $k$ è dispari ed $r_k > r_{i+k-1}$, per ogni valore $u$ che rende $f_i$ ed $f$ reali, è generalmente $f > f_i$ e così è pure se $k$ è pari ed $r_k < r_{i+k-1}$. Se invece è $k$ dispari ed $r_k < r_{i+k-1}$, oppure $k$ pari ed $r_k > r_{i+k-1}$, sarà $f < f_i$. Questo fatto si esprimerà dicendo che la catena $f$ è rispettivamente maggiore o minore della sua secondaria $f_i$. Si è detto « generalmente » perchè per qualche valore speciale di $u$ può essere $f = f_i$; quando sia

$$(\iota) \qquad f = (r_1, r_2, \dots r_{i-1}, r_1, r_2, \dots r_{i-1} - 1)$$

ed $\bar{u}$ sia soluzione di $f_i(u) = u$, si avrà $f(\bar{u}) = \bar{u}$: ma per ogni altro valore di $u$ che renda le catene reali, è $f > f_i$ se è $i-1$ dispari, $f < f_i$ se è $i-1$ pari, e si potrà usare in corrispondenza la denominazione di *maggiore* e *minore* nel confronto fra $f$ ed $f_i$.

8. Si noti che nel caso della $(\iota)$, è $\frac{df}{du} = \pm\infty$ per $u = \bar{u}$, ed un esame di carattere elementare mostra facilmente che vale il segno $+$ se $i-1$ è dispari, il segno $-$ se $i-1$ è pari. Onde per $u > \bar{u}$ e sufficientemente prossimo, è $\frac{df}{du} > 1$ nel caso di $f > f_i$, e quindi $f(u) - u$ è, in quelle condizioni, funzione crescente di $u$.

9. Possiamo ora cercare la condizione sotto la quale un'equazione

$$(\varkappa) \qquad f(u) = u, \quad \text{con} \quad f = (r_1, r_2, \dots r_q)$$

ha soluzione reale (positiva). Si noti che per $u$ maggiore della soluzione (se è unica, e della massima se eventualmente ve ne fosse più d'una), è $f(u) < u$. La condizione in discorso è data dal seguente

TEOREMA. — « Perchè la $(\varkappa)$ abbia soluzione reale, che non sia soluzione di una $f_i = u$, occorre e basta che sia $f > f_i$ per $i = 2, 3, \dots q$ ».

*a*) Intanto, il teorema è vero nel caso di $q = 2$.

Se infatti è $(r_1, r_2) > (r_2)$, ne consegue necessariamente $r_1 > r_2$. Sia $r_1 - 1 > r_2$; è $s_{r_1-1} > s_{r_2}$, onde $f(s_{r_1-1}) > f(s_{r_2}) > (r_2; s_{r_2}) = s_{r_2}$, onde per $u = s_{r_1-1}$ è $f(u) > u$; ma poichè si ha $(r_1, r_2) < r_1$, è $f < u$ per $u \geq s_{r_1}$; onde la $(\varkappa)$ ha soluzione reale compresa fra $s_{r_1-1}$ ed $s_{r_1}$. Sia invece $r_1 - 1 = r_2$; si è nel caso considerato al n. 7, con $\bar{u} = s_{r_2}$; per $u > s_{r_2}$ e sufficientemente prossimo, è $f(u) - u$ crescente onde, essendo $f(u) = u$ per $u = s_{r_2}$, è $f(u) > u$ per $u > s_{r_2}$ e abbastanza prossimo: è invece $f(u) < u$ per $u = s_{r_1}$, onde vi è una radice di $(\varkappa)$, anche in questo caso, fra $s_{r_1-1}$ ed $s_{r_1}$.

Se invece è $(r_1, r_2) < (r_2)$, il che richiede $r_1 < r_2$, $f$ non è reale per $u < s_{r_2}$, come del resto nel caso precedente, ma per $u \geq s_{r_2}$ è $(r_1, r_2) < (r_2) < u$, e quindi $f(u) - u$ è costantemente negativo: la $(\varkappa)$ non ha soluzione. Per $n = 2$ la proposizione è dunque verificata.

*b*) Si supponga il teorema dimostrato per le catene di $q-1$ cifre; dico che esso vale per le catene di $q$ cifre $f=(r_1, r_2, \ldots r_q)$. Fra le $f_i=(r_i, r_{i+1}, \ldots r_q)$, sia $f_k$ la *massima* catena; $f_k=u$ ammette dunque soluzione, e sia essa $\sigma$, con $f_k<u$ per $u>\sigma$. Per $u<\sigma$, le $f_{k-1}, f_{k-2}, \ldots f_2, f$ sono non reali. Ora, sia $f>f_k$. Ne viene $f(\sigma)>f_k(\sigma)=\sigma$, ed eccezionalmente (caso del n. 7), $f(\sigma)=\sigma$. Nel caso generale è dunque $f>u$ per $u=\sigma$, $f<u$ per $u=s_{r_1}$, onde $f=u$ ha radice fra $\sigma$ ed $s_{r_1}$. Nel caso eccezionale, per essere $f>f_k$, è (n. 8) $\frac{df}{du}=+\infty$ per $u=\sigma$ e quindi $\frac{df}{du}-1>0$, cioè $f-u$ crescente per valori di $u$ maggiori di $\sigma$ ed abbastanza prossimi a $\sigma$, ondè $f>u$ per questi valori, mentre è $f<u$ per $u>s_{r_1}$; vi è dunque una radice di $f=u$ fra $\sigma$ ed $s_{r_1}$. Questo caso eccezionale è quello in cui la ($x$) ha più di una soluzione reale, ma ve n'ha una sola che non appartiene ad una $f_i=u\,(i>1)$.

Sia invece $f<f_k$. Si ha $f(\sigma)\leq f_k(\sigma)=\sigma$, e, per $u>\sigma$, è $f(u)<$ $<f_k(u)<u$; la $f=u$ non ha dunque in generale soluzione reale, ed eccezionalmente può avere la soluzione $\sigma$, appartenente pure alle $f_k=u$. Il teorema è così dimostrato.

Si noti che la $f>u$ può venire soddisfatta se, e solo se è $f>f_i$, $(i=2, 3, \ldots q)$.

10. Dal teorema precedente è facile di dedurre la condizione sotto cui la $f=(r_1, r_2, \ldots r_q; u)$ è reale. Intanto, lo è per ogni $u\geq 2$. Nel caso $u<2$, fra le secondarie $f_2, f_3, \ldots f_q$, cerchiamo la massima, e sia $f_k$. Per essere massima, le è applicabile la proposizione del n. 9, e quindi vi è un valore $\sigma_k$ tale che per $u<\sigma_k$ è $f_k$ non reale o $>u$, per $u=\sigma_k$ è $f_k=u$, e per $u>\sigma_k$ è $f_k<u$. Ne viene che $f$ non è reale per $u<\sigma_k$, mentre invece, per $u>\sigma_k$ essendo, in conseguenza di $f_k<u$, anche $f_i<u$ per ogni indice $i$ da 2 a $q$, la $f$ è reale. Il limite di realtà $\xi$ per la $f$, cioè un numero $\xi$ tale che $f$ sia reale per $u\geq\xi$ e non reale per $u<\xi$, è il numero $\sigma_k$ relativo alla catena secondaria massima $f_k$, numero che è radice di $f_k=u$ ma non radice di $f_i=u$ per $i>k$.

11. Con ciò si è in grado di rispondere alla domanda enunciata al n. 1 come scopo della presente Nota. « Per riconoscere se la ($\beta$), radice dell'equa- « zione ($\alpha$), sia o no reale, essendo nota la disposizione, in ($\beta$), dei segni « $+$ e $-$, si scriverà codesta radice nella forma

$$(r_1 . r_2, \ldots r_q ; a) \quad , \quad (r_1+r_2+\cdots+r_q=n),$$

« indi, dall'esame delle cifre, si riscontrerà quale sia la massima fra le « catene secondarie

$$f_2=(r_2, r_3, \ldots r_q), f_3=(r_3, \ldots r_q), \ldots f_q=(r_q):$$

« sia essa $f_k = (r_k, r_{k+1}, \ldots r_q)$. Per questa, considerata come funzione « della $u$, esisterà un valore $\sigma$ che rende $f_k(u) = u$ mentre non dà $f_i(u) = u$ « per alcun valore dell'indice $i$ superiore a $k$. Allora la radice ($\beta$) è reale « se la base $a$ è superiore od uguale a $\sigma$, non è reale se è $a < \sigma$ ».

12. Un'osservazione assai semplice mostra che fra due radici consecutive $s_{r-1}$ ed $s_r$ cadono infiniti valori speciali di $u$. Infatti, presa l'equazione

$$(\lambda) \qquad (r, 1, 1, \ldots 1) = u,$$

dove è $r > 1$, questa, avendo il primo membro nelle condizioni del n. 9, ha una soluzione $\sigma$ che è evidentemente compresa fra $s_{r-1}$ ed $s_r$; questa soluzione è un valore speciale per $u$. E potendosi prendere arbitrariamente il numero delle cifre 1 in ($\lambda$), e la $\sigma$ essendo diversa per due diverse tali equazioni, il numero dei valori speciali compresi fra $s_{r-1}$ ed $s_r$ viene dunque ad essere infinito.

## Meccanica. — *$ds^2$ einsteiniani in campi newtoniani.* III. *Formule ausiliarie.* Nota del Socio T. Levi-Civita [1].

Ho raccolto in questa terza Nota considerazioni e sviluppi aventi ancora carattere preparatorio, in quanto trovano la loro principale, se non esclusiva, ragion d'essere nel sussidio che presteranno alla effettiva integrazione delle equazioni gravitazionali di Einstein in alcuno dei casi o sottocasi già classificati nella Nota II.

Circa il contenuto specifico rileverò che si tratta in primo luogo del passaggio da una forma fondamentale ad un'altra che ne differisce per un semplice fattore (trasformazione conforme). Ho assegnato le relazioni esplicite fra omologhe derivate covarianti (§ 1) e omologhi simboli di Riemann (§ 2). A dire il vero tali relazioni figurano già in una Nota del sig. Finzi pubblicata nel 1903 [2]; ma ho stimato opportuno ricavarle *ex novo* per comodità del lettore.

Nel § 3 ho indicato un processo di riduzione da $n+1$ a $n$ variabili, di cui già mi sono valso (per $n = 3$) nel riferire al $ds^2$ spaziale (anzichè al $ds'^2$ quadridimensionale) le equazioni della statica einsteiniana. In sostanza si troveranno qui ripetute, per $n$ qualunque, formule che già scrissi per $n = 3$, onde farne (§ 4) applicazione, per $n = 2$, al calcolo dei simboli di Ricci relativi ad una forma ternaria del tipo

$$d\sigma^2 + A^2\, dx_3^2$$

(1) Pervenuta all'Accademia l'11 ottobre 1918.

(2) *Le ipersuperficie a tre dimensioni che si possono rappresentare conformemente sullo spazio euclideo,* Atti del R. Istituto Veneto, T. LXII, pp. 1049-1062.

con $d\sigma$ (elemento lineare binario) ed A indipendenti da $x_3$. Si arriva ad espressioni di carattere invariantivo rispetto al $d\sigma$, la cui utilità si farà manifesta nelle Note successive.

## 1. — Trasformazione conforme e suoi effetti sulla derivazione covariante.

Sia

$$ds^2 = \sum_{1\,ik}^{n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k \tag{1}$$

il quadrato di un elemento lineare in quante si vogliono variabili;

$$ds'^2 = e^{2\tau}\, ds^2 . \tag{2}$$

Usando i soliti simboli per la metrica (1), designeremo con omologhi simboli accentati tutto ciò (coefficienti, coefficienti della forma reciproca, simboli di Christoffel e di Riemann, derivate covarianti, ecc.) che si riferisce alla metrica conforme (2). Così saranno

$$a'_{ik} = e^{2\tau}\, a_{ik}$$

i coefficienti del $ds'^2$;

$$a'^{(ik)} = e^{-2\tau}\, a^{(ik)}$$

i coefficienti della forma reciproca;

$$a'_{ik,j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a'_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial a'_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial a'_{ik}}{\partial x_j}\right) = e^{2\tau}\left(a_{ik,j} + \tau_k\, a_{ij} + \tau_i\, a_{jk} - \tau_j\, a_{ik}\right)$$

i simboli di Christoffel di prima specie;

$$\begin{Bmatrix} i\,k \\ h \end{Bmatrix}' = \sum_{1\,j}^{n} a'^{(hj)}\, a'_{ik,j} = \begin{Bmatrix} i\,k \\ h \end{Bmatrix} + \varepsilon_{ih}\,\tau_k + \varepsilon_{hk}\,\tau_i - a_{ik}\,\tau^{(h)} \tag{3}$$

$$(i\,,k\,,j\,,h = 1\,,2\,,\ldots\,,n)$$

quelli di seconda specie spettanti ad esso $ds'^2$. Ben si intende che con $\tau_i$ intendiamo le derivate (ordinarie, o, ciò che è lo stesso, covarianti) della funzione $\tau$; con $\tau^{(h)} = \sum_{1\,j}^{n} a^{(hj)}\tau_j$ gli elementi reciproci rispetto alla forma (1); infine con $\varepsilon_{ih}$ lo zero o l'unità secondochè i due indici sono distinti o coincidono.

Ciò premesso, sia $X_i$ un generico sistema semplice covariante. Se si assume come forma fondamentale la (2), si ha, per derivazione covariante, il sistema doppio

$$(X_i)'_k = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \sum_{1\,h}^{n} \begin{Bmatrix} i\,k \\ h \end{Bmatrix}' X_h .$$

Analogamente, se si assume per forma fondamentale la (1), le corrispondenti derivate covarianti hanno le espressioni

$$X_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \sum_1^n {}_h \begin{Bmatrix} i\,k \\ h \end{Bmatrix} X_h .$$

Ne viene, badando alle (3),

$$(X_i)'_k = X_{ik} - \tau_i X_k - \tau_k X_i + a_{ik} \sum_1^n {}_h \tau^{(h)} X_h , \tag{4}$$

delle quali relazioni è materialmente visibile il comportamento covariante. Una loro immediata conseguenza si è l'identità dei rotori (dedotti da $X_i$ con referenza alle due forme), cioè dei sistemi emisimmetrici

$$(X_i)'_k - (X_k)'_i \quad \text{e} \quad X_{ik} - X_{ki} .$$

Ove in particolare il sistema $X_i$ sia costituito dalle derivate di una funzione $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, il sommatorio

$$\sum_1^n {}_h \tau^{(h)} X_h$$

si identifica col parametro differenziale misto $\nabla(\tau, V)$, preso, si intende, con referenza alla forma (1).

Posto ancora

$$V = V_0 \, e^{\nu} \quad (V_0 \text{ costante arbitraria}),$$

le (4), divise per V, assumono l'aspetto

$$\frac{V'_{ik}}{V} = \nu_{ik} + \nu_i \nu_k - \tau_i \nu_k - \tau_k \nu_i + a_{ik} \nabla(\tau, \nu) . \tag{5}$$

Le (4) stesse si possono generalizzare considerando (anzichè un sistema semplice $X_i$) un sistema d'ordine qualunque $m$, $Y_{i_1 i_2 \dots i_m}$, e confrontando le derivate covarianti del sistema, prese una prima volta con referenza alla forma fondamentale (2), una seconda volta con referenza alla (1). Mi limiterò ai sistemi doppî $Y_{jh}$. Partendo dalle formole di definizione

$$(Y_{jh})'_k = \frac{\partial Y_{jh}}{\partial x_k} - \sum_1^n {}_i \left[ \begin{Bmatrix} j\,k \\ i \end{Bmatrix}' Y_{ih} + \begin{Bmatrix} k\,h \\ i \end{Bmatrix}' Y_{ji} \right],$$

si ricavano le relazioni

$$(Y_{jh})'_k = Y_{jhk} - \tau_j Y_{kh} - \tau_h Y_{jk} - 2\tau_k Y_{jh} + a_{jk} \sum_1^n {}_i \tau^{(i)} Y_{ih} + a_{kh} \sum_1^n {}_i \tau^{(i)} Y_{ji} . \tag{6}$$

Poniamo $Y_{jh} = (X_j)'_h$, e formiamo le differenze

$$(X_j)'_{hk} - (X_j)'_{kh} .$$

Si ha

$$(X_j)'_{hk} - (X_j)'_{kh} = [(X_j)'_h]_k - [(X_j)'_k]_h + \tau_j [(X_h)'_k - (X_k)'_h] +$$
$$+ \tau_h (X_j)'_k - \tau_k (X_j)'_h + a_{jk} \sum_1^n {}_i \tau^{(i)} (X_i)'_h - a_{jh} \sum_1^n {}_i \tau^{(i)} (X_i)'_k ,$$

da cui, usando ancora le (4) e il loro corollario concernente l'identità dei rotori, dopo riduzioni materiali, risulta

$$(X_j)'_{hk} - (X_j)'_{kh} = X_{jhk} - X_{jkh} + X_k (\tau_{jh} - \tau_j \tau_h) - X_h (\tau_{jk} - \tau_j \tau_k) +$$
$$+ a_{jh} \left[ \sum_1^n {}_i X^{(i)} (\tau_{ik} - \tau_i \tau_k) + X_k \Delta\tau \right] - a_{jk} \left[ \sum_1^n {}_i X^{(i)} (\tau_{ih} - \tau_i \tau_h) + X_h \Delta\tau \right],$$

essendo

$$\Delta\tau = \nabla(\tau , \tau) = \sum_1^n {}_\rho \tau^{(\rho)} \tau_\rho$$

il parametro differenziale di primo ordine della funzione $\tau$, relativo alla forma (1).

Ove, nel secondo membro, si sostituisca ulteriormente $\sum_1^n {}_i a_{ih} X^{(i)}$ al posto di $X_h$ e $\sum_1^n {}_i a_{ik} X^{(i)}$ al posto di $X_k$, si può ritenere la precedente relazione sotto la forma:

$$(7) \quad (X_j)'_{hk} - (X_j)'_{kh} = X_{jhk} - X_{jkh} +$$
$$+ \sum_1^n {}_i X^{(i)} [a_{ik} (\tau_{jh} - \tau_j \tau_h) - a_{ih} (\tau_{ik} - \tau_j \tau_k) + a_{jh} (\tau_{ik} - \tau_i \tau_k) -$$
$$- a_{jk} (\tau_{ih} - \tau_i \tau_h) + (a_{ik} a_{jh} - a_{ih} a_{jk}) \Delta\tau ].$$

2. — Relazioni fra i simboli di Riemann. — Corollari. — Forme ternarie.

Le derivate terze covarianti di un generico sistema semplice $X_i$, prese con referenza ad un'assegnata forma fondamentale — sia per esempio la (1) — sono legate ai simboli di Riemann relativi a quella forma dalle ben note identità (già invocate anche nella Nota II)

$$(8) \qquad X_{jhk} - X_{jkh} = \sum_1^n {}_i a_{ij,hk} X^{(i)} .$$

Se si assume per forma fondamentale la (2), con che, secondo la nostra convenzione, si debbono far apparire gli omologhi simboli accentati, queste identità (ove si tenga presente che $X'^{(i)} = e^{-2\tau} X^{(i)}$, assumono l'aspetto:

$$(9) \qquad (X_j)'_{hk} - (X_j)'_{kh} = e^{-2\tau} \sum_1^n {}_i a'_{ij,hk} X^{(i)} .$$

In base ad esse e alle precedenti, le (7) (che devono sussistere per qualsiasi sistema $X^{(i)}$) porgono le relazioni, già segnalate dal sig. Finzi (nella Nota citata da principio),

$$(10) \quad e^{-2\tau} a'_{ij,hk} = a_{ij,hk} + a_{ik}(\tau_{jh} - \tau_j \tau_h) - a_{ih}(\tau_{jk} - \tau_j \tau_k) + \\ + a_{jh}(\tau_{ik} - \tau_i \tau_k) - a_{jk}(\tau_{ih} - \tau_i \tau_h) + (a_{ik} a_{jh} - a_{ih} a_{jk}) \Delta \tau .$$

Va da sè che a queste relazioni si sarebbe potuto arrivare (in modo concettualmente più diretto, ma formalmente più laborioso) facendo capo alla definizione dei simboli di Riemann di seconda specie per mezzo di quelli di Christoffel, e sfruttando unicamente le (3).

Ove si ponga con Einstein

$$G_{ik} = \sum_{1}^{n}{}_{jh} a^{(jh)} a_{ij,hk}$$

e in conformità

$$G'_{ik} = \sum_{1}^{n}{}_{jh} a'^{(jh)} a'_{ij,hk} ,$$

si ha dalle (10) $\left[\text{badando alle identità } \sum_{1}^{n}{}_{h} a^{(jh)} a_{ih} = \varepsilon_{ij} , \sum_{1}^{n}{}_{jh} a^{(jh)} a_{jh} = n , \sum_{1}^{n}{}_{jh} a^{(jh)} \tau_j \tau_h = \Delta \tau , \sum_{1}^{n}{}_{jh} a^{(jh)} \tau_{jh} = \Delta_2 \tau \right]$

$$(11) \quad G'_{ik} = G_{ik} + (n-2)(\tau_{ik} - \tau_i \tau_k) + a_{ik} \{ \Delta_2 \tau + (n-2) \Delta \tau \} .$$

Ne consegue, fra gli invarianti lineari

$$G' = \sum_{1}^{n}{}_{ik} a'^{(ik)} G'_{ik} \quad , \quad G = \sum_{1}^{n}{}_{ik} a^{(ik)} G_{ik} ,$$

la relazione

$$(12) \quad e^{2\tau} G' = G + 2(n-1) \Delta_2 \tau + (n-1)(n-2) \Delta \tau .$$

Per $n = 3$, i simboli di Riemann a quattro indici si riducono sostanzialmente al sistema doppio $G_{ik}$; o piuttosto (con vantaggio per le eventuali interpretazioni geometriche) ai simboli di Ricci

$$\alpha_{ik} = G_{ik} - \tfrac{1}{2} G a_{ik} \text{ [1]}.$$

Gli omologhi simboli spettanti alla forma (2) sono

$$\alpha'_{ik} = G'_{ik} - \tfrac{1}{2} G' a'_{ik} = G'_{ik} - \tfrac{1}{2} G' e^{2\tau} a_{ik} .$$

Si ha perciò, in base alle (11) e (12),

$$(13) \quad \alpha'_{ik} = \alpha_{ik} + \tau_{ik} - \tau_i \tau_k - a_{ik} \Delta_2 \tau .$$

[1] Cfr. la Nota *Statica einsteiniana* in questi Rendiconti, vol. XXVI (1° sem. 1917), pag. 463.

### 3. — Abbassamento invariantivo da $n+1$ variabili ad $n$.

Sia

$$ds'^2 = A^2\, dx_0^2 + ds^2$$

una forma differenziale quadratica in $n+1$ variabili, con $ds^2$ forma generica in $n$ variabili definita dalla (1), ed A indipendente da $x_0$ (al pari dei coefficienti del $ds^2$).

I coefficienti del $ds'^2$ sono manifestamente

$$\text{gli } a_{ik} \text{ del } ds^2 \ (i, k = 1, 2, \dots, n) \ ; \ a_{0i} = 0 \ (i > 0) \ ; \ a_{00} = A^2 .$$

Il loro determinante vale quindi

$$a' = a \,.\, A^2,$$

essendo $a$ il discriminante della (1); donde gli elementi reciproci:

$$a'^{(ik)} = a^{(ik)} \ (i, k = 1, 2, \dots, n) \ ; \ a'^{(0i)} = 0 \ (i > 0) \ ; \ a^{(00)} = \frac{1}{A^2} .$$

Anche qui, come (salvo il diverso significato del $ds'^2$) nei precedenti paragrafi, contrassegneremo con accento tutto ciò che si riferisce alla metrica definita dal $ds'^2$, riservando la corrispondente notazione senza accento per gli elementi omologhi (eventualmente da limitarsi ai valori $1, 2, \dots, n$ degli indici) relativi al $ds^2$.

Con tale intesa, si trova subito, per i simboli di Christoffel di prima specie,

$$\begin{cases} a'_{ik,j} = a_{ik,j} \quad (i, k, j = 1, 2, \dots, n) ; \\ a'_{0i,k} = a'_{ik,0} = a'_{00,0} = 0 ; \\ a'_{0i,0} = \frac{1}{2} \dfrac{\partial A^2}{\partial x_i} = A A_i \ ; \ a'_{00,i} = - A A_i , \end{cases}$$

e per quelli di seconda:

$$(15) \quad \begin{cases} \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ h \end{matrix} \right\}' = \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ h \end{matrix} \right\} \quad (i, k, h = 1, 2, \dots, n) ; \\ \left\{ \begin{matrix} 0\,i \\ k \end{matrix} \right\}' = \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ 0 \end{matrix} \right\}' = \left\{ \begin{matrix} 0\,0 \\ 0 \end{matrix} \right\}' = 0 ; \\ \left\{ \begin{matrix} 0\,i \\ 0 \end{matrix} \right\}' = \dfrac{A_i}{A} , \ \left\{ \begin{matrix} 0\,0 \\ i \end{matrix} \right\}' = - A A^{(i)} . \end{cases}$$

Ne viene, per le derivate seconde covarianti di una generica funzione $\nu(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$$(16)\quad \begin{cases} \nu'_{ik} = \dfrac{\partial \nu_i}{\partial x_k} - \sum_0^n {}_h \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ h \end{matrix} \right\}' \nu_h = \nu_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \dots, n); \\ \nu'_{0i} = \dfrac{\partial \nu_0}{\partial x_i} - \sum_0^n {}_h \left\{ \begin{matrix} 0\,i \\ h \end{matrix} \right\} \nu_h = \dfrac{\partial \nu_0}{\partial x_i} - \dfrac{A_i}{A} \nu_0 = A \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{1}{A}\nu_0\right); \\ \nu'_{00} = \dfrac{\partial \nu_0}{\partial x_0} - \sum_0^n {}_h \left\{ \begin{matrix} 0\,0 \\ h \end{matrix} \right\}' \nu_h = \dfrac{\partial^2 \nu}{\partial x_0^2} + A\nabla(A, \nu). \end{cases}$$

Se poi si richiamano le formole di definizione delle $G'_{ik}$ e le conseguenti loro espressioni in funzione dei simboli di seconda specie,

$$G'_{ik} = \sum_0^n {}_{jh}\, a'^{(jh)} a'_{ij,hk} = \sum_0^n {}_h \{ih, hk\} =$$

$$= \sum_0^n {}_h \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \begin{matrix} i\,h \\ h \end{matrix} \right\}' - \frac{\partial}{\partial x_h} \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ h \end{matrix} \right\}' \right] + \sum_0^n {}_{hj} \left[ \left\{ \begin{matrix} i\,h \\ j \end{matrix} \right\}' \left\{ \begin{matrix} k\,j \\ h \end{matrix} \right\}' - \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ j \end{matrix} \right\}' \left\{ \begin{matrix} j\,h \\ h \end{matrix} \right\}' \right],$$

si ricava, dopo facili riduzioni,

$$(17)\quad \begin{cases} G'_{ik} = G_{ik} + \dfrac{A_{ik}}{A} \qquad (i, k = 1, 2, \dots, n); \\ G'_{0i} = 0; \\ G'_{00} = A \Delta_2 A \quad (^1), \end{cases}$$

da cui in particolare

$$(18)\qquad G' = \sum_0^n {}_{ik}\, a'^{(ik)} G'_{ik} = G + 2\frac{\Delta_2 A}{A}.$$

## 4. — Complementi relativi alle forme ternarie.

Supponiamo $n = 2$, e sostituiamo l'indice 3 all'indice 0, con che il $ds'^2$ ternario ha l'espressione

$$ds^2 + A^2\, dx_3^2.$$

Per la forma binaria

$$ds^2 = \sum_1^2 {}_{ik}\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k,$$

(1) Queste formole (salvo lieve divario nelle notazioni e speciale riferimento a $n = 3$) si trovano anche nella Nota testè citata sulla *Statica einsteiniana*, pag. 460.

i simboli di Riemann di prima specie $a_{ij,hk}$ si annullano, oppure si riducono allo schema $a_{12,12}$; e si ha

$$a_{12,12} = a\mathrm{K},$$

rappresentando K la curvatura gaussiana del $ds^2$ ed $a$ il discriminante.

Ne viene

$$\mathrm{G}_{ik} = \sum_{1}^{2}{}_{jh}\, a^{(jh)}\, a_{ij,hk} = a^{(\bar{i}\,\bar{k})}\, a_{i\bar{i},\bar{k}k},$$

designando $\bar{i}$ e $\bar{k}$ gli indici complementari di $i$ e di $k$ nella coppia $1, 2$: intendo dire che, per $i = 1$, $\bar{i} = 2$, e viceversa.

Dacchè

$$a^{(\bar{i}\,\bar{k})} = (-1)^{i+k}\frac{a_{ik}}{a}$$

e

$$a_{i\bar{i},\bar{k}k} = -(-1)^{i+k}\, a\mathrm{K};$$

rimane semplicemente

$$\mathrm{G}_{ik} = -\mathrm{K}\, a_{ik} \quad (i, k = 1, 2),$$

donde

$$\mathrm{G} = \sum_{1}^{2}{}_{ik}\, a^{(ik)}\, \mathrm{G}_{ik} = -2\mathrm{K}.$$

Le $\mathrm{G}'_{ik}$ sono fornite dalle (17) (per $n = 2$ e con sostituzione di 3 a zero), e la $\mathrm{G}'$ dalla (18), che diviene

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{G}' = -\mathrm{K} + \frac{\Delta_2 \mathrm{A}}{\mathrm{A}}.$$

Dopo ciò si possono senz'altro esplicitare le espressioni (riferite al $ds^2$ binario e alla funzione associata A) dei simboli di Ricci

$$\alpha_{ik} = \mathrm{G}'_{ik} - \tfrac{1}{2}\mathrm{G}'\, a'_{ik}$$

relativi alla forma ternaria $ds'^2 = ds^2 + \mathrm{A}^2\, dx_3^2$. Si trova immediatamente

$$(19)\qquad \begin{cases} \alpha_{ik} = \dfrac{\mathrm{A}_{ik}}{\mathrm{A}} - \dfrac{\Delta_2 \mathrm{A}}{\mathrm{A}}\, a_{ik} \quad (i, k = 1, 2); \\ \alpha_{i3} = 0; \\ \alpha_{33} = \mathrm{A}^2 \mathrm{K}, \end{cases}$$

nonchè, per la curvatura media,

$$(20) \qquad \mathfrak{M} = \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, a'^{(ik)}\, \alpha_{ik} = -\tfrac{1}{2}\, G' = K - \frac{\Delta_2 A}{A}.$$

Essendo evidentemente

$$a'_{ik} = a_{ik} \quad (i\,, k = 1\,, 2) \quad ; \quad a'_{i3} = 0 \;\; , \; a'_{33} = A^2$$

i coefficienti del $ds'^2$, dalla considerazione della equazione cubica

$$\| \alpha_{ik} - \omega\, a'_{ik} \| = 0\,,$$

la quale definisce le curvature principali, apparisce tosto che una radice è

$$\omega_3 = K$$

e che le linee coordinate $x_3$ ($x_1 = \text{cost}$ , $x_2 = \text{cost}$) sono le corrispondenti linee principali di curvatura.

Per individuare le altre due curvature principali $\omega_1\,, \omega_2$ (e subordinatamente le relative direzioni principali), si stacca dalla precedente equazione cubica il fattore $A^2 (K - \omega)$, e rimane

$$\begin{vmatrix} \dfrac{A_{11}}{A} - \left(\dfrac{\Delta_2 A}{A} + \omega\right) a_{11} & \dfrac{A_{12}}{A} - \left(\dfrac{\Delta_2 A}{A} + \omega\right) a_{12} \\ \dfrac{A_{21}}{A} - \left(\dfrac{\Delta_2 A}{A} + \omega\right) a_{21} & \dfrac{A_{22}}{A} - \left(\dfrac{\Delta_2 A}{A} + \omega\right) a_{22} \end{vmatrix} = 0\,.$$

Esempio. — Per $A = \text{cost}$, la equazione testè scritta si riduce a

$$\omega^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0\,,$$

e quindi porge $\omega_1 = \omega_2 = 0$. Ne viene che, per un $ds'^2$ ternario della forma

$$ds^2 + dx_3^2\,,$$

due delle curvature principali sono nulle, e la terza, corrispondente alle giaciture $x_3 = \text{cost}$, coincide colla curvatura gaussiana K del $ds^2$ binario.

Analisi. — *Sulle equazioni integrali.* Nota III di PIA NALLI, presentata dal Socio PINCHERLE [1].

12. La ricerca delle costanti caratteristiche soddisfacenti alla (13) si fonda su quanto passiamo ad esporre.

Supponiamo di avere trovato delle funzioni reali

$$\Gamma_1(s,t)\,,\ \Gamma_2(s,t)\,,\ldots \tag{18}$$

in numero finito o numerabile, soddisfacenti alle condizioni

$$\int_a^b \Gamma_n(v,s)\,\Gamma_m(v,t)\,dv = 0 \qquad (m \neq n) \tag{19}$$

ed una successione di costanti reali

$$\mu_1\,,\ \mu_2\,,\ \ldots\ldots \tag{20}$$

in modo che sia

$$(\mu_n - k(s))\,\Gamma_n(s,t) = \int_a^b \mathrm{K}(s,v)\,\Gamma_n(v,t)\,dv\,, \tag{21}$$

$$(\mu_n - k(s))\,\Gamma_n(s,t) = \int_a^b \Gamma_n(v,s)\,\Gamma_n(v,t)\,dv\,. \tag{22}$$

Per esempio, quando è $\mathrm{U}^{(1)} > 0$ ed è soddisfatta la (14) con $r=1$, si può formare la successione (18) con la sola funzione $\Gamma_1(s,t) = \sqrt{c^{(1)}}\,\mathrm{F}^{(1)}(s,t)$ e la (20) con $\mu_1 = \sqrt{c^{(1)}}$. Quando non è soddisfatta la (14) per $r=1$, si può formare la (18) con le due funzioni

$$\Gamma_1(s,t) = \sqrt{c^{(1)}}\,\mathrm{H}_1^{(1)}(s,t) \quad , \quad \Gamma_2(s,t) = -\sqrt{c^{(1)}}\,\mathrm{H}_2^{(1)}(s,t)\,,$$

prendendo $\mu_1 = \sqrt{c^{(1)}}$ , $\mu_2 = -\sqrt{c^{(1)}}$ .

*Se la* (18) *è formata da infinite funzioni la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \int_a^b \Gamma_n^2(s,t)\,ds\,dt$$

*è convergente e non supera* $\int_a^b \int_a^b \mathrm{K}^2(s,t)\,ds\,dt$.

*La successione delle somme parziali della serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(s,t)$ *converge in media verso una funzione* $\mathrm{C}_1(s,t)$.

[1] Pervenuta all'Accademia il 24 settembre 1918.

Siccome poi $\mu_1, \mu_2, \ldots$ sono costanti caratteristiche proprie relative a $K(s,t)$ e $k(s)$, si avrà per qualunque $n$ $\mu_n^2 \leq c^{(1)}$: ne viene che per qualunque $r$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{r-1} \Gamma_n(s,t)$ converge in media verso una funzione $C_r(s,t)$.

Poniamo

$$D_1(s,t) = K(s,t) - C_1(s,t) \tag{23}$$

e formiamo le iterate di $D_1(s,t)$, considerata come funzione di $s$, relativamente a $K(s,t)$ e $k(s)$, iterate che denotiamo con $D_2(s,t)$, $D_3(s,t)$, ... poniamo cioè

$$D_n(s,t) = k(s)\, D_{n-1}(s,t) + \int_a^b K(s,v)\, D_{n-1}(v,t)\, dv \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Si possono dimostrare le seguenti relazioni

$$D_n(s,t) = G_n^{(1)}(s,t) - C_n(s,t)$$

$$D_{\mu+\nu}(s,t) = k(s)\, D_{\mu+\nu-1}(s,t) + \int_a^b D_\mu(v,t)\, D_\nu(v,s)\, dv, \tag{24}$$

quest'ultima analoga alla (9) della Nota I.

Da questa si trae che se qualcuna delle $D_n(s,t)$ è nulla si ha $D_1(s,t)=0$ o $D_2(s,t) = 0$. Nel primo caso, siccome per la (22) si può porre

$$\Gamma_n(s,t) \sim \sum_{m=1}^{\infty} [\mu_n - k(t)]\, \psi_m^{(n)}(s)\, \psi_m^{(n)}(t),$$

le $\psi_m^{(n)}$ formando, al variare di $m$ ed $n$, un sistema ortogonale, essendo $K(s,t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(s,t)$, possiamo dire che $K(s,t)$ rientra nella forma (11) della Nota I.

Nel secondo caso, da

$$k(s)\, D_1(s,t) + \int_a^b D_1(v,s)\, D_1(v,t)\, dv = 0$$

si trae

$$D_1(s,t) \sim - \sum_{m=1}^{\infty} k(t)\, \varphi_m(s)\, \varphi_m(t),$$

le $\varphi_m(s)$ e le $\psi_m^{(n)}(s)$, quando si facciano variare $m$ ed $n$, formano un sistema ortogonale.

Essendo $K(s,t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(s,t) + D_1(s,t)$, $K(s,t)$ rientra ancora nella forma (11).

13. Se nessuna delle $D_n(s,t)$ è identicamente nulla, posto

$$V_n = \int_a^b \int_a^b D_n^2(s,t)\, ds\, dt$$

si ha, per la (4),

$$V_n = \int_a^b \int_a^b D_{n-1}(s,t)\, D_{n+1}(s,t)\, ds\, dt$$

e di qui $V_n^2 \leq V_{n-1} V_{n+1}$. Ponendo $d_n = \frac{V_n}{V_{n-1}}$ la successione delle $d_n$, limitata e crescente, per $n = \infty$ tende ad un limite $d$, e si ha poi $\lim_{n=\infty} \frac{V_n}{d^n} = V \geq 0$. La successione delle funzioni $\frac{D_{2n}(s,t)}{d^n}$ converge in media verso una funzione $D(s,t)$ per la quale si ha $\int_a^b \int_a^b D^2(s,t)\, ds\, dt = V$, quindi se è $V > 0$, $D(s,t)$ non è nulla e inversamente.

Dalla (24) si trae che è $V > 0$ se è quasi dapertutto $k^2(s) + \delta < d$ con $\delta > 0$.

Supposto $V > 0$, la $D(s,t)$, considerata come funzione di $s$, è fondamentale relativamente a $K^{(2)}(s,t)$ e $k^2(s)$, cioè si ha

$$d\, D(s,t) = k^2(s)\, D(s,t) + \int_a^b K^{(2)}(s,v)\, D(v,t)\, dv,$$

ed allora si possono dare due casi: in un primo caso si ha

$$\sqrt{d}\, D(s,t) = k(s)\, D(s,t) + \int_a^b K(s,v)\, D(v,t)\, dv, \tag{25}$$

la radice di $d$ essendo presa con segno conveniente, ed allora è

$$\sqrt{d}\, D(s,t) = k(s)\, D(s,t) + \sqrt{d} \int_a^b D(v,s)\, D(v,t)\, dv.$$

Si potrà porre allora

$$\sqrt{d}\, D(s,t) \sim \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sqrt{d} - k(t)\right] \varphi_m(s)\, \varphi_m(t),$$

le $\varphi_m(s)$ formando un sistema ortogonale ed essendo funzioni fondamentali proprie relative a $K(s,t)$ e $k(s)$, corrispondenti alla costante $\sqrt{d}$. Inoltre si ha per qualunque $n$,

$$\int_a^b \Gamma_n(v,s)\, D(v,t)\, dv = 0$$

e cioè

$$\int_a^b \psi_r^{(n)}(s)\, \varphi_m(s)\, ds = 0\,,$$

qualunque sieno $r$, $n$ ed $m$.

In un secondo caso la (25) non è soddisfatta, ed allora, ponendo

$$M_i(s,t) = \frac{1}{2} D(s,t) + \frac{(-1)^{i-1}}{2\sqrt{d}} \left[ k(s)\, D(s,t) + \int_a^b K(v,s)\, D(v,t)\, dv \right]$$

$$(i = 1, 2)$$

si avrà

$$(-1)^{i-1} \sqrt{d}\, M_i(s,t) = k(s)\, M_i(s,t) + (-1)^{i-1} \sqrt{d} \int_a^b M_i(v,s)\, M_i(v,t)\, dv$$

e si potrà porre

$$(-1)^{i-1} \sqrt{d}\, M_i(s,t) \sim \sum_{m=1}^{\infty} \left[ (-1)^{i-1} \sqrt{d} - k(t) \right] \varphi_m^{(i)}(s)\, \varphi_m^{(i)}(t)\,,$$

le $\varphi_m^{(i)}(s)$ formando un sistema ortogonale ed essendo funzioni fondamentali proprie relative a $K(s,t)$ e $k(s)$, corrispondenti alla costante $(-1)^{i-1}\sqrt{d}$. Inoltre si ha $\int_a^b M_1(v,s)\, M_2(v,t)\, dv = 0$, e per qualunque $n$,

$$\int_a^b \Gamma_n(v,s)\, M_i(v,t)\, dv = 0\,, \quad \text{cioè} \quad \int_a^b \psi_r^{(n)}(s)\, \varphi_m^{(i)}(s)\, ds = 0$$

qualunque sieno $r$, $n$ ed $m$.

Si dimostra che se $\varphi(s)$ è una funzione fondamentale propria relativa alla costante $\mu$, e se, qualunque sieno $r$ ed $n$ si ha $\int_a^b \psi_r^{(n)}(s)\, \varphi(s)\, ds = 0$, si ha $\mu^2 \leq d$.

Notiamo che le funzioni

$$(26) \qquad \Gamma_1(s,t)\,,\ \Gamma_2(s,t)\,, \ldots \ \sqrt{d}\, D(s,t)$$

nel primo caso, e le funzioni

$$(27) \qquad \Gamma_1(s,t)\,,\ \Gamma_2(s,t)\,, \ldots \ \sqrt{d}\, M_1(s,t)\,,\ -\sqrt{d}\, M_2(s,t)$$

nel secondo, formano una successione analoga alla (18); la successione analoga alla (20) è nel primo caso $\mu_1, \mu_2, \ldots \sqrt{d}$, e nel secondo $\mu_1, \mu_2, \ldots \sqrt{d}, -\sqrt{d}$.

14. Premesso questo si osservi che se $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ sono costanti caratteristiche proprie distinte, soddisfacenti alle condizioni $\sigma_n^2 > k^2(s) + \delta_n$ con $\delta_n > 0$, se non sono in numero finito i loro valori assoluti ammettono un solo punto limite, e precisamente il punto $l$ tale che l'insieme dei punti nei

quali è $|k(s)| > l$ è di misura nulla, mentre, qualunque sia $\varepsilon > 0$, l'insieme dei punti dove è $|k(s)| > l - \varepsilon$ è di misura non nulla. Ne viene che le $\sigma_n$ si possono ordinare per modulo decrescente.

Supponiamo ora i termini della (20) in numero finito, $n$, e siano ordinati per modulo decrescente. Sia poi $\mu_n^2 > k^2(s) + \delta$ con $\delta > 0$ e $\mu_1^2 = c^{(1)}$, e supponiamo che tra $\mu_i$ e $\mu_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots n-1)$ non cadano costanti caratteristiche proprie, ed ancora che se $\varphi(s)$ è una funzione fondamentale corrispondente a $\mu_i$ si abbia

$$(\mu_i - k(s))\, \varphi(s) = \int_a^b \Gamma_i(t, s)\, \varphi(t)\, dt .$$

*Si ha allora* $d < \mu_n^2$ *e condizione necessaria e sufficiente perchè esista almeno un'altra costante caratteristica propria* $\mu$ *relativa a* $K(s, t)$ *e* $k(s)$ *soddisfacente alla* (13) *è che sia* $k^2(s) + \varepsilon < d$, *con* $\varepsilon > 0$.

Tra queste costanti ve ne saranno una o due di massimo valore assoluto, eguale a $|\sqrt{d}|$, secondochè è o non è soddisfatta la (25).

Nel primo caso, qualunque sia la funzione fondamentale $\varphi(s)$ corrispondente alla costante $\sqrt{d}$ si ha

$$\left(\sqrt{d} - k(s)\right) \varphi(s) = \sqrt{d} \int_a^b \mathrm{D}(t, s)\, \varphi(t)\, dt ,$$

e nel secondo, qualunque sia la funzione fondamentale $\varphi^{(i)}(s)$ corrispondente alla costante $(-1)^{i-1} \sqrt{d}$ si ha

$$\left((-1)^{i-1} \sqrt{d} - k(s)\right) \varphi^{(i)}(s) = (-1)^{i-1} \sqrt{d} \int_a^b \mathrm{M}_i(t, s)\, \varphi^{(i)}(t)\, dt .$$

In seguito, per mezzo delle funzioni (26) o per mezzo delle (27) si possono determinare le costanti (o la costante) caratteristiche di massimo valore assoluto che seguono $\pm \sqrt{d}$ e le corrispondenti funzioni fondamentali, e così via di seguito; in conclusione: si vengono a determinare tutte le costanti caratteristiche $\mu$ soddisfacenti alla (13), dopo avere determinato $c^{(1)}$ e $\mathrm{F}^{(1)}(s, t)$.

Astronomia. — *Il problema dell'astrometria fotografica nel suo aspetto più generale.* Nota III di VITTORIO NOBILE, presentata dal Corrisp. V. CERULLI [1].

A rendere completa, nel senso geometrico, la soluzione del problema che c'interessa, resta ora soltanto, e si tratta di un semplice dettaglio, a mostrare come si possano agevolmente fissare in posizione e grandezza sulle singole lastre i poligoni che limitano le facce del poliedro. Basta perciò determinare le intersezioni mutue delle facce contigue, ciò che si ottiene facilmente dopo aver notato che le immagini delle stesse stelle, considerate come punti corrispondenti in due lastre successive, dànno luogo a due sistemi piani $\pi$ e $\pi'$ evidentemente omografici [2], perchè possono disporsi nello spazio in modo da risultare prospettivi. Le punteggiate corrispondenti sono dunque projettive: la retta richiesta si troverà cercando la coppia di punteggiate corrispondenti per la quale projettività anzidetta si riduce a una congruenza. Le due punteggiate rappresenteranno evidentemente le posizioni che viene a prendere, sulle lastre considerate, la retta d'intersezione dei due piani (nello spazio retta unita dei due sistemi prospettivi).

La omografia $\Omega$ fra i due piani si esprime così analiticamente, in un qualunque sistema di coordinate projettive, con relazioni lineari che porremo qui sotto la forma omogenea

$$\begin{aligned} \varrho y_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ \varrho y_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\ \varrho y_3 &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \sigma x_1 &= A_{11} y_1 + A_{21} y_2 + A_{31} y_3 \\ \sigma x_2 &= A_{12} y_1 + A_{22} y_2 + A_{32} y_3 \\ \sigma x_3 &= A_{13} y_1 + A_{23} y_2 + A_{33} y_3 \end{aligned} \tag{6}$$

dove sia

$$\sigma = \frac{D}{\varrho} \quad , \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} ,$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 16 settembre 1918.

[2] Per individuare la omografia basta conoscere le coordinate di 4 stelle comuni sulle due lastre, ma naturalmente nella pratica converrà di avvalersi di un numero ben maggiore di stelle e dedurre così, applicando il metodo dei minimi quadrati, i parametri della corrispondenza.

con D, modulo della sostituzione lineare (5), non nullo, e si indichi con $A_{i,j}$ l'aggiunto di $a_{i,j}$ in D.

Dette $u_1, u_2, u_3$ le coordinate projettive omogenee di una retta $r$ del sistema $\pi$, avrà luogo per ogni punto della retta la relazione

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0,$$

e detta $r'$ la corrispondente di $r$ in $\pi'$ al punto all'infinito della $r$ le cui coordinate sono proporzionali ad

$$u_2 \,,\; -u_1 \,,\; 0$$

corrisponderà sulla $r'$, per le (5), il punto

$$a_{11} u_2 - a_{12} u_1 \,,\; a_{21} u_2 - a_{22} u_1 \,,\; a_{31} u_2 - a_{32} u_1$$

e questo punto andrà anch'esso all'infinito, cioè *la projettività definita dalla $\Omega$ su $r$ ed $r'$ sarà una similitudine*, se le coordinate della $r$ verificano la relazione $a_{31} u_2 - a_{32} u_1 = 0$, ovvero se la retta passa pel punto all'infinito di coordinate

$$a_{32} \,,\; -a_{31} \,,\; 0$$

al quale corrisponde sulla $r'$ del sistema $\pi'$,

$$-A_{23} \,,\; A_{13} \,,\; 0 \,.$$

Della retta cercata è così nota la direzione. Per fissarla completamente bisognerà introdurre l'altra condizione che il rapporto di similitudine fra le punteggiate corrispondenti deve ridursi all'unità. Trattandosi di una condizione metrica converrà servirsi di un sistema cartesiano ordinario.

La omografia $\Omega$ può allora esprimersi con relazioni fratte del tipo

$$X = \frac{l_1 x + m_1 y + n_1}{l_3 x + m_3 y + 1} \quad , \quad Y = \frac{l_2 x + m_2 y + n_2}{l_3 x + m_3 y + 1}$$

ovvero, dividendo i termini delle due frazioni per $-\sqrt{l_3^2 + m_3^2}$ dopo aver determinato i valori numerici dei coefficienti,

$$X = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\alpha x + \beta y - \gamma} \quad , \quad Y = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{\alpha x + \beta y - \gamma} \tag{7}$$

con $\gamma$ necessariamente positivo ed esprimente in valore ed in segno la distanza della origine O alla retta

$$\alpha x + \beta y - \gamma = 0 \,. \tag{8}$$

Ciò equivale a scegliere come positivo il senso della normale alla retta (8) che va da O *verso* la retta e ad indicare con $\alpha$ e $\beta$ i coseni direttori della normale così orientata.

Con tali notazioni e convenzioni la retta da noi cercata ha una equazione della forma:

$$\alpha x + \beta y - p = 0 \tag{9}$$

e la costante $p$, che si tratta ora unicamente di determinare, esprime in valore e segno la distanza della retta dall'origine, nel senso che i valori positivi o negativi di $p$ corrisponderanno rispettivamente ai casi in cui le rette (8) e (9) si trovano, rispetto all'origine della stessa parte oppure da parte opposta.

Ciò posto, se indichiamo con $m$ un punto generico della (9) e con la stessa lettera il segmento che separa $m$ da una origine fissa sulla retta stessa in un senso determinato (p. es. quello che conduce da $m_1$ ad $m_2$) e poniamo

$$\Delta m = m_2 - m_1 \ , \ \Delta x = x_2 - x_1 \ , \ \Delta y = y_2 - y_1$$

e analogamente pei punti corrispondenti

$$\Delta \mathrm{M} = \mathrm{M}_2 - \mathrm{M}_1 \ , \ \Delta \mathrm{X} = \mathrm{X}_2 - \mathrm{X}_1 \ , \ \Delta \mathrm{Y} = \mathrm{Y}_2 - \mathrm{Y}_1$$

avremo che sulla (9) sarà

$$\alpha \Delta x + \beta \Delta y = 0 \tag{10}$$

$$\alpha x_1 + \beta y_1 - \gamma = \alpha x_2 + \beta y_2 - \gamma = p - \gamma$$

e quindi subito

$$\Delta \mathrm{X} = \frac{a_1 \Delta x + b_1 \Delta y}{p - \gamma} = - \frac{\mathrm{C}_2 \Delta x}{\beta (p - \gamma)} \tag{11}$$

e scambiando $a_1 , b_1$ con $a_2 , b_2$

$$\Delta \mathrm{Y} = \frac{\mathrm{C}_1 \Delta x}{\beta (p - \gamma)} \tag{12}$$

quando con $\mathrm{C}_1$ e $\mathrm{C}_2$ si intendano gli aggiunti di $c_1$ e $c_2$ nel determinante della trasformazione (7). Seguono immediatamente le eguaglianze

$$\beta \Delta m = \Delta x$$

$$\beta \Delta \mathrm{M} = \frac{\Delta x}{p - \gamma} \sqrt{\mathrm{C}_1^2 + \mathrm{C}_2^2}$$

delle quali la prima è esatta in valore ed in segno. Da queste eguaglianze si trae, dovendo essere $\Delta \mathrm{M} = \Delta m$,

$$p - \gamma = \pm \sqrt{\mathrm{C}_1^2 + \mathrm{C}_2^2} \,. \tag{13}$$

Il segno del radicale si determina subito in base a semplici criterî geometrici, dopo aver notato, cioè, che essendo la (8) la retta limite della omografia (intersezione del piano $(x , y)$ col piano condotto pel centro di pro-

spettiva parallelamente all'altro) i punti corrispondenti dei due piani che provengono da punti *fisicamente* prospettivi nello spazio (cioè dalla stessa parte del centro di prospettiva), ovvero le immagini di quelle stelle che sono comuni alle due lastre, debbono cadere, sulla lastra considerata $(x, y)$, tutti da una stessa parte della retta limite. E siccome le rette parallele corrispondenti ai due valori di $p$ dati dalla (13) sono simmetriche rispetto alla (8) *già fissata nel piano*, non potrà sussistere alcuna ambiguità nei casi singoli; si sceglierà fra le due rette [1] quella che con la retta limite (8) comprende le stelle comuni alle due lastre.

Eseguita in modo analogo la determinazione degli altri lati del poligono e ripetuta l'operazione per tutte le altre facce del poliedro si avranno tutti gli elementi per condurre a termine la soluzione del problema con le equazioni dei sistemi (1), (2), (3) e (4).

Il lettore avrà notato come nulla si sia fin qui detto sulle correzioni di aberrazione e refrazione.

In generale osserviamo come una qualunque deformazione indotta nella configurazione stellare da una causa fisica *la cui azione non varii durante le operazioni necessarie ad ottenere le lastre occorrenti*, rimanga senza effetto sui valori delle costanti geometriche del nostro problema (distanza focale dello strumento e coordinate dei centri delle lastre), le quali sono, per il loro significato intrinseco, affatto indipendenti dalle direzioni delle stelle. Occorrerà occuparsi di quelle deformazioni solo nella seconda fase del processo di catalogazione: quando, cioè, noti quei parametri e rappresentata la sfera celeste *apparente*, si debba passare alla determinazione della *reale* configurazione prospettica delle stelle. Ciò vale in senso quasi assoluto per l'aberrazione, quando solo si possano organizzare le operazioni in modo da ottemperare alla condizione di impressionare le lastre formanti le facce del nostro poliedro nello stesso giorno o in giorni prossimi; potremo così evitare l'applicazione preliminare della correzione di aberrazione sulle singole lastre e solo introdurla in fine dei calcoli, quando sia fissato sulla sfera celeste l'apice del movimento orbitale terrestre corrispondente all'epoca media delle operazioni.

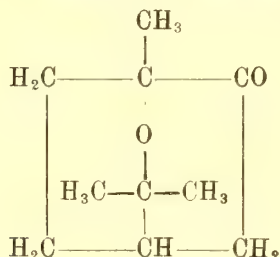
Per la refrazione bisognerà evidentemente applicare la correzione sulle lastre *prima* dei calcoli per la determinazione degli elementi del poliedro. Ciò potrà farsi agevolmente dopo un calcolo delle coordinate rettangolari dello zenit su ciascuna coppia di lastre contigue che si considera, calcolo che può effettuarsi o per via trigonometrica in base alla conoscenza approssimata della posizione dello strumento e della lastra, o meglio ancora cogli elementi delle sole lastre, esprimendo che sono omografici non i sistemi piani $\pi$ e $\pi'$, quali risultano immediatamente dalle immagini, ma quelli che si ottengono dopo che i punti di ciascuno di essi hanno subìto rispettivamente degli spostamenti verso due punti $(x_0, y_0)$, $(x_0', y_0')$, che sono le immagini dello zenit sulle due lastre e le cui coordinate si determinano insieme ai parametri della omografia.

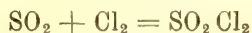
Questo secondo procedimento offre anche il vantaggio di condurre, incidentalmente, ad una revisione della teoria della refrazione e relative costanti.

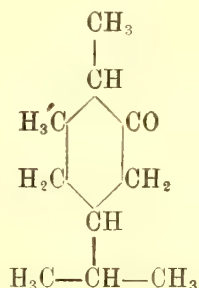
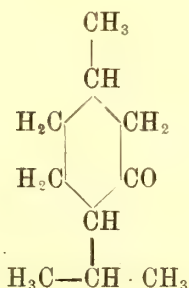
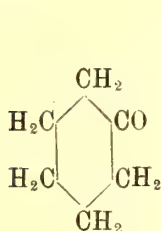
[1] Se si considera il piano bisettore del diedro formato dalle facce considerate del poliedro (lastre) e si conduce dal centro O di prospettiva il piano normale al primo, le due rette secondo cui il secondo piano taglia quelli delle due lastre sono parallele alla retta di intersezione delle due facce e su di esse la prospettività col centro in O determina due punteggiate *inversamente eguali*. È appunto a tale coppia di rette che corrisponde l'altra soluzione, da noi scartata, fornita dalla (13).

**Chimica.** — *Sintesi del cloruro di solforile in presenza di composti organici* [1]. Nota di Guido Cusmano, presentata dal Socio A. Angeli [2].

La continuazione dello studio del chetocineolo che descrissi con A. Li-

```
              CH3
               |
H2C —————— C —————— CO
 |              |            |
 |             O            |
 |              |            |
 |    H3C—C—CH3      |
 |              |            |
H2C —————— CH —————— CH2
```

nari [3] nel 1912 mi ha dato occasione di rilevare che questo composto ha molte proprietà chimiche simili a quelle della canfora. Fra l'altro, esso può sostituirla nella preparazione del cloruro di solforile da anidride solforosa e cloro, secondo il metodo segnalato da Schulze [4] e che attualmente trova applicazione industriale. Però un tal fatto non può citarsi come una prova di più dell' intima analogia che ricorre tra i due chetoni, perchè esso si verifica egualmente bene per altri chetoni ciclici saturi, per alcuni loro derivati e, inoltre, per il cineolo o eucaliptolo, da cui deriva il composto preparato da me e Linari. Difatti, ho determinato che la reazione:

$$SO_2 + Cl_2 = SO_2Cl_2$$

viene accelarata dalla presenza di cicloesanone, di mentone e di tetraidrocarvone

```
                          CH3                    CH3
                           |                      |
      CH2                  CH                     CH
  H2C/  \CO           H2C/  \CH2             H3C/  \CO
  H2C\  /CH2          H2C\  /CO              H2C\  /CH2
      CH2                  CH                     CH
                           |                      |
                      H3C—CH·CH3             H3C—CH—CH3
```

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica organica del R. Istituto di Studi superiori in Firenze.

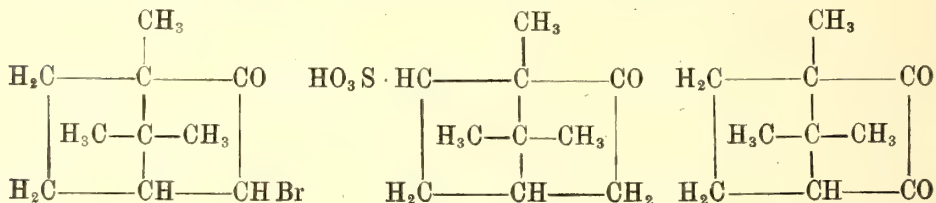
(2) Pervenuta all'Accademia il 6 ottobre 1918.

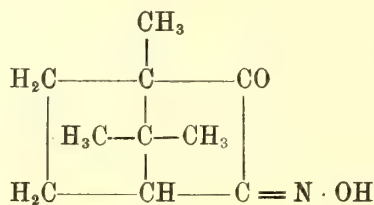
(3) Gazz. ch. it. XLII, parte I, pag. 1 (1912). In altra occasione farò noto un secondo metodo di preparazione di questo composto.

(4) Journ. für prakt. Ch. *24*, 168 (1881).

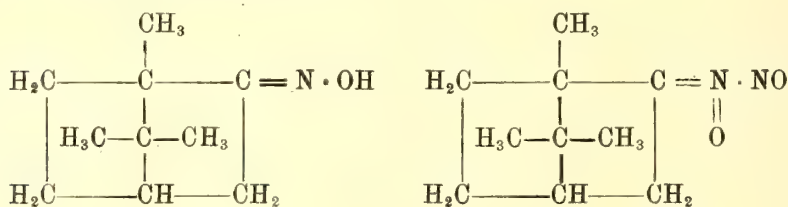
di struttura e comportamento chimico alquanto diversi da quelli della canfora e del chetocineolo.

La reazione non procede, invece, in presenza di $\alpha$-monobromocanfora, o dell'acido canfosolfonico di Reychler [1], o del canfochinone:

```
        CH3                          CH3                         CH3
         |                            |                           |
H2C------C------CO     HO3S·HC--------C------CO   H2C-------------C------CO
 |       |       |           |        |       |    |              |       |
 | H3C---C---CH3 |           | H3C----C---CH3 |    |    H3C-------C---CH3 |
 |       |       |           |        |       |    |              |       |
H2C------CH-----CHBr        H2C-------CH-----CH2  H2C-------------CH-----CO
```

Parimenti non procede in presenza di monobromo- o monoclorochetocineolo [2], con l'alogeno nel metilene accanto al carbonile, come nella bromocanfora; ma può di nuovo essere attivata introducendo nei suddetti composti qualche residuo positivo, per esompio, trasformando l'acido solfonico nell'amide, o nell'anilide e il canfochinone nella monossima, o isonitrosocanfora

```
        CH3
         |
H2C------C------CO
 |       |       |
 | H3C---C---CH3 |
 |       |       |
H2C------CH------C = N · OH
```

L'anilide dell'acido canfosolfonico, clorurata, non agisce da catalizzatore.

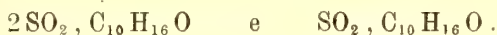
Infine accenno che la sintesi del cloruro di solforile da anidride solforosa e cloro si compie celeremente anche in presenza dell'ossima della canfora e della pernitrosocanfora:

```
        CH3                                CH3
         |                                  |
H2C------C------C = N · OH        H2C-------C------C = N · NO
 |       |       |                 |        |       |      ||
 | H3C---C---CH3 |                 | H3C----C---CH3 |      O
 |       |       |                 |        |       |
H2C------CH-----CH2               H2C-------CH-----CH2
```

Com'è noto, il processo Schulze consiste nel fare passare cloro in una soluzione di canfora nell'anidride solforosa a 0°, o a temperatura inferiore:

[1] Per questo composto Armstrong e Lowry (Journ. of the Chem. Society, *81*, 1445 (1902) ammettono la formola scritta sopra; nel Lehrbuch der Org. Chemie von V. Meyer u. P. Jacobson, 2° vol., 1ª parte, pag. 1008 (Lipsia 1902), con riferimento a più antiche ricerche, è data una formola con il gruppo $-SO_3H$ nel metilene adiacente al carbonile.

[2] Descriverò in altro luogo questi composti.

l'alogeno si combina rapidamente con l'anidride, formando cloruro di solforile, senza che la canfora venga alterata. Schulze non potè precisare il meccanismo della reazione; ma escluse che esso sia in rapporto con la proprietà del chetone di condensare molto gas solforoso e respinse l'ipotesi che nel processo si formino transitoriamente composti di canfora e cloro. Molti anni dopo, però, Bellucci e Grassi [1], per mezzo dell'analisi termica del sistema *anidride solforosa-canfora* determinarono l'esistenza a bassa temperatura di due composti

$$2\,SO_2\,,\,C_{10}H_{16}O \qquad e \qquad SO_2\,,\,C_{10}H_{16}O\,.$$

e ammisero che l'azione della canfora nella sintesi del cloruro di solforile sia con ogni probabilità connessa con la formazione di essi; e ciò perchè, mentre nelle condizioni favorevoli alla loro esistenza si forma la cloroanidride, la canfora non ha nessun potere assorbente, nè si altera di fronte al cloro. L'ipotesi degli autori va d'accordo con l'interpretazione che si suole dare [2] dei processi catalitici che avvengono in sistemi omogenei.

Le mie esperienze non contradicono a quest'interpretazione; credo che convenientemente ampliate forniranno dei fatti per stabilire la natura dei composti transitori per i quali si renderebbe utile la presenza delle suddette sostanze — e, senza dubbio, di molte altre [3] — nella sintesi del cloruro di solforile.

Per eseguire le ricerche accennate in questa nota preliminare si usò un palloncino da distillazione, nel fondo del quale arrivava il ramo verticale di un tubo a T, fissato al collo con un tappo di gomma: introdotta la sostanza da saggiare come catalizzatore, si raffreddava esternamente il palloncino sino a —10° e poi, fattavi condensare un poco di anidride solforosa secca, si mandava per i rami orizzontali del tubo a T, il cloro e l'anidride gassosi e a volumi eguali.

Tutte le sostanze cimentate (chetocineolo e suoi derivati alogenati, cineolo, cicloesanone, mentone, tetraidrocarvone, bromocanfora, canforissima, pernitrosocanfora, canfochinone, isonitrosocanfora, acido canfosolfonico e sua anilide) si sciolgono bene nell'anidride solforosa liquida, fornendo, salvo il canfochinone, soluzioni incolore. E tali esse rimangono, introducendovi il cloro, se la sostanza organica favorisce la sua combinazione con l'anidride; se no, si colorano subito in giallo verdastro.

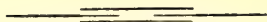
Dopo un tempo conveniente si toglie il palloncino dal miscuglio frigorifero, si sostituisce il tappo che porta il tubo a T con un altro munito di

[1] Rendiconti Società Chim. It., serie II, vol. V, pag. 191 (1913).

[2] Cfr. p. es.: P. Sabatier, *La catalyse en Chimie Organique,* pag. 242 (Parigi e Liegi, 1913).

[3] Già è nota l'azione spiegata in questo senso dall'acido formico e dall'acido acetico.

termometro e si sottopone il liquido raccolto alla distillazione. Se non si è formato cloruro di solforile si ha per residuo il composto organico inalterato (caso della monobromocanfora, del monocloro- e monobromochetocineolo, del canfochinone, dell'acido di Reychler e della sua anilide alogenata). Se si è formata la cloroanidride essa distilla a circa 69° e il residuo, a volte, non è costituito dal catalizzatore, ma da un suo prodotto di trasformazione. Così, per il caso del chetocineolo si ha una sostanza, la quale purificata per distillazione al vapor d'acqua, cristallizza in prismi incolori appiattiti e si manifesta identica con il composto clorurato che si ottiene per azione del cloro sul chetone disciolto in etere di petrolio. Però esso non si forma durante la sintesi del cloruro di solforile, ma per azione di quest'ultimo, alla temperatura dell'ebollizione, sul chetocineolo. Difatti, in un saggio apposito, furono preparati, in presenza di gr. 1 di chetocineolo, gr. 6 di cloruro di solforile e la miscela fu versata su ghiaccio pesto e carbonato sodico; indi si riprese con etere e questo, per evaporazione, lasciò il chetone inalterato in rosette di bei cristalli laminari.

E. M.

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

---

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

*pervenute all'Accademia durante le ferie del 1918.*

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo)

### Matematica. — *Sulle superficie le cui normali si distribuiscono in una serie $\infty^1$ di rigate applicabili sull'iperboloide rotondo.* Nota del Socio Luigi Bianchi (¹).

1. Del problema corrispondente all'enunciato nel titolo di questa Nota si conoscono già due ampie soluzioni particolari, ciascuna delle quali dipende da *due* funzioni arbitrarie.

La prima e più semplice soluzione corrisponde al caso che le $\infty^1$ rigate siano congruenti coll'iperboloide rotondo stesso. Di questo caso, ed anzi anche dell'altro più generale di un iperboloide rotondo variabile di forma, tratta un mio lavoro inserito nel tomo XXVI (serie 3ª) degli Annali di Matematica (1917).

La seconda e più interessante soluzione, fornita dal teorema di Chieffi, si ottiene nel modo seguente (²).

Si consideri una qualunque superficie S (non rigata) applicabile sull'iperboloide rotondo, e sopra di essa le $\infty^1$ geodetiche $g$ deformate delle generatrici di un sistema. La congruenza (normale) formata dalle tangenti alle geodetiche $g$ dà appunto una soluzione del nostro problema; e questo anzi in doppio modo (ciò che è una particolarità del caso attuale), poichè la congruenza si decompone, pel teorema di Chieffi, in *due* serie $\infty^1$ di rigate deformate dell'iperboloide, che si ottengono associandone i raggi lungo le asintotiche dell'uno o dell'altro sistema di S.

(¹) Pervenuta all'Accademia il 16 ottobre 1918.

(²) Cfr. il volume III delle mie *Lezioni di geometria differenziale*, § 2.

Trattando nella presente Nota del problema generale, stabilisco il sistema di equazioni a derivate parziali da cui il problema dipende, il sistema (A) del n. 3, e ne deduco che la soluzione generale contiene *tre* funzioni arbitrarie essenziali. Essa è quindi assai più ampia delle particolari sopra ricordate, delle quali si esamina il modo come si deducono dalla generale. Ma anche nel caso più generale, come già in quello particolare corrispondente al teorema di Chieffi, si hanno metodi di trasformazione che permettono di dedurre da una soluzione iniziale nota infinite nuove. Queste sono le *trasformazioni* $B_k$ delle deformate rigate dell'iperboloide, ed ancora qui il teorema di permutabilità permette di semplificare, nel noto modo, i metodi di trasformazione.

Osserviamo che qui si presenta spontanea una generalizzazione delle presenti ricerche sostituendo all'iperboloide rotondo ad una falda una qualunque *quadrica rigata*, dove saranno da utilizzare in simile modo le trasformazioni $B_k$, ma di questo mi riserbo di trattare in Note successive.

2. Suppongasi di avere una serie $\infty^1$ di rigate R deformate dell'iperboloide rotondo ad una falda di cui siano A, B i semiassi dell'iperbola meridiana e suppongasi inoltre che la congruenza costituita dalle generatrici delle R sia una congruenza *normale*.

Di una qualunque di queste rigate R consideriamo la linea $\Gamma$ di stringimento che sarà, pel teorema di Laguerre, una *curva di Bertrand*, le cui due curvature, la flessione che indicheremo con $L = \frac{1}{\varrho}$ e la torsione $M = \frac{1}{T}$, saranno legate da una relazione lineare, scriviamo

$$(1) \qquad a \operatorname{sen} c \,.\, L - a \cos c \,.\, M = 1 \,,$$

le due costanti $a$, $c$ essendo legate ai semiassi A, B dalle formole

$$A = a \operatorname{sen} c \quad , \quad B = a \cos c \,.$$

Mantenendo per la curva $\Gamma$ le consuete notazioni (*Lezioni*, vol. I, cap. I), si sa che i coseni di direzione $\overline{\lambda}, \overline{\mu}, \overline{\nu}$ della curva $\overline{\Gamma}$ di Bertrand coniugata di $\Gamma$ (avente le stesse normali principali di $\Gamma$) sono dati da

$$(2) \quad \overline{\lambda} = \alpha \operatorname{sen} c - \lambda \cos c \;,\; \overline{\mu} = \beta \operatorname{sen} c - \mu \cos c \;,\; \overline{\nu} = \gamma \operatorname{sen} c - \nu \cos c \,,$$

e la rigata R si forma conducendo per ogni punto di $\Gamma$ il raggio nella direzione $(\overline{\lambda}, \overline{\mu}, \overline{\nu})$ (Bioche).

Consideriamo ora la superficie, che diremo $\Sigma$, luogo delle $\infty^1$ curve $\Gamma$ di Bertrand e riferiamola ad un sistema coordinato curvilineo $(u, v)$ di cui le linee $v = \text{cost}$ siano le curve $\Gamma$ stesse, e le $u = \text{cost}$ intercettino sulle $\Gamma$ archi eguali, ciò che lascierà per ora arbitraria una linea iniziale di questo sistema p. es. la $u = 0$, scelta la quale fisseremo le rimanenti

assumendo a parametro $u$ *l'arco* delle $\Gamma$ contato a partire dalla $u = 0$. Il parametro $v$ resterà provvisoriamente indeterminato.

Le coordinate $x, y, z$ del punto $(u, v)$ di $\Sigma$, come pure i coseni delle tre direzioni principali delle curve $\Gamma$ di Bertrand $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \xi & \eta & \zeta \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}$ risulteranno determinate funzioni delle variabili $u, v$ e potremo scrivere per la superficie $\Sigma$ le formole fondamentali del quadro:

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \alpha \quad , & \dfrac{\partial x}{\partial v} = \mathrm{P}\alpha + \mathrm{Q}\xi + \mathrm{R}\lambda \\ \dfrac{\partial \alpha}{\partial u} = \mathrm{L}\xi \quad , & \dfrac{\partial \alpha}{\partial v} = r\xi - q\lambda \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial u} = -\mathrm{L}\alpha - \mathrm{M}\lambda \quad , & \dfrac{\partial \xi}{\partial v} = p\lambda - r\alpha \\ \dfrac{\partial \lambda}{\partial u} = \mathrm{M}\xi \quad , & \dfrac{\partial \lambda}{\partial v} = q\alpha - p\xi , \end{cases}$$

tralasciando le analoghe ottenute con permutazione circolare rispetto agli assi. In queste formole (delle quali quelle a sinistra sono le formole di Frenet per le curve $\Gamma$) figurano, oltre le due funzioni L, M, legate dalla (1), le tre rotazioni $p, q, r$ e le tre traslazioni P, Q, R.

Scrivendo le condizioni d'integrabilità delle (3), si hanno per le rotazioni $p, q, r$ le equazioni differenziali

$$(4) \quad \frac{\partial p}{\partial u} = \mathrm{L}q - \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial v} \, , \; \frac{\partial q}{\partial u} = -(\mathrm{L}p + \mathrm{M}r) \, , \; \frac{\partial r}{\partial u} = \mathrm{M}q + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial v}$$

e per le traslazioni P, Q, R le altre

$$(5) \quad \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial u} = \mathrm{LQ} \, , \; \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial u} = r - \mathrm{LP} - \mathrm{MR} \, , \; \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial u} = \mathrm{MQ} - q .$$

Ma ora dobbiamo introdurre in calcolo l'ulteriore condizione che la congruenza delle generatrici delle rigate R deve essere *normale*. Il raggio generico della congruenza parte dal punto $(x, y, z)$ coi coseni di direzione

$$\mathrm{X} = \overline{\lambda} = \alpha \operatorname{sen} c - \lambda \cos c \, , \; \mathrm{Y} = \overline{\mu} = \beta \operatorname{sen} c - \mu \cos c \, ,$$
$$\mathrm{Z} = \overline{\nu} = \gamma \operatorname{sen} c - \nu \cos c$$

e la condizione di normalità, posto

$$\mathrm{U} = \mathrm{S}\,\mathrm{X}\frac{\partial x}{\partial u} \quad , \quad \mathrm{V} = \mathrm{S}\,\mathrm{X}\frac{\partial x}{\partial v} ,$$

si esprime con

$$\frac{\partial V}{\partial u} = \frac{\partial U}{\partial v}.$$

Ma si ha subito dalle (3) e (6)

$$U = \operatorname{sen} c \quad , \quad V = P \operatorname{sen} c - R \cos c ,$$

e però la detta condizione si scrive

$$\operatorname{sen} c \frac{\partial P}{\partial u} - \cos c \frac{\partial R}{\partial u} = 0, \tag{7}$$

che per le (5) e per la (1) diventa

$$Q = -aq \cos c . \tag{8}$$

D'altra parte, integrando la (7), risulta

$$S X \frac{\partial x}{\partial v} = P \operatorname{sen} c - R \cos c = \psi(v), \tag{9}$$

essendo $\psi(v)$ una funzione della sola $v$, ed ora se disponiamo convenientemente della linea iniziale $u = 0$ sopra $\Sigma$, che rimaneva arbitraria, possiamo semplificare le formole e dedurre una conseguenza geometrica notevole. Assumiamo per ciò la linea $u = 0$ in guisa che risulti ortogonale ai raggi della congruenza uscenti dai suoi punti [1], e dovremo avere $S X \frac{\partial x}{\partial v} = 0$ *per* $u = 0$. Ma allora la (9) dimostra che sarà identicamente $\psi(v) = 0$, e perciò tutte le linee $u = \text{cost}$ risulteranno, come la $u = 0$, ortogonali ai raggi della congruenza. Risulta di qui il teorema in vista:

*Sulla nostra superficie $\Sigma$ le linee ortogonali ai raggi della congruenza (alle generatrici delle rigate* R) *intercettano archi eguali sulle curve $\Gamma$ di Bertrand, linee di stringimento delle rigate* R.

3. Scelto il sistema coordinato $(u, v)$ nel modo superiore la (9), essendo $\psi(v) = 0$, ci dà

$$R = \operatorname{tg} c \,.\, P , \tag{10}$$

e con questa e colla (8) risultano eliminate le due incognite $Q, R$; e sostituendo nelle equazioni differenziali (4), (5) coll'esprimere inoltre M per L dalla (1):

$$M = L \operatorname{tg} c - \frac{1}{a \cos c},$$

[1] Si noti che una tale linea è necessariamente distinta dalle $v = \text{cost}$, le quali tagliano i raggi della congruenza sotto l'angolo $\frac{\pi}{2} - c$ diverso da $\frac{\pi}{2}$.

otteniamo per le rimanenti 5 funzioni incognite

$$p\,,\,q\,,\,r\,,\,\mathrm{L}\,,\,\mathrm{P}$$

il sistema seguente:

$$(\mathrm{A})\quad\begin{cases}\dfrac{\partial p}{\partial u}=\mathrm{L}q-\operatorname{tg}c\,\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial v}\,,\quad \dfrac{\partial q}{\partial u}=\dfrac{r}{a\cos c}-\dfrac{p\cos c+r\operatorname{sen}c}{\cos c}\,,\\[2mm] \dfrac{\partial r}{\partial u}=\left(\mathrm{L}\operatorname{tg}c-\dfrac{1}{a\cos c}\right)q+\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial v}\\[2mm] \dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial u}=-a\cos c\,.\,\mathrm{L}q\,,\quad a\mathrm{L}(p\cos c+r\operatorname{sen}c)+\dfrac{a\mathrm{L}-\operatorname{sen}c}{a\cos^2 c}\mathrm{P}=2r\,.\end{cases}$$

Ora dall'ultima, che è una relazione in termini finiti fra $\mathrm{L}\,,\mathrm{P}\,,p\,,r$, potremo trarre p. es. $p$ in funzione delle rimanenti ed il sistema (A) si convertirà nelle quattro incognite

$$q\,,\,r\,,\,\mathrm{L}\,,\,\mathrm{P}$$

in un sistema differenziale del 1° ordine risoluto rispetto alle quattro derivate

$$\frac{\partial q}{\partial u}\,,\ \frac{\partial r}{\partial u}\,,\ \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial u}\,,\ \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial u}\,.$$

I teoremi generali d'esistenza assicurano che la soluzione generale dipende da quattro funzioni arbitrarie di $v$, e cioè da quelle a cui si riducono inizialmente $q\,,r\,,\mathrm{L}\,,\mathrm{P}$ per $u=0$. Ma di queste quattro funzioni arbitrarie una è soltanto apparente e dipende dall'arbitrarietà ancora lasciata al parametro $v$.

Così in definitiva: *La soluzione generale del problema proposto dipende da tre funzioni arbitrarie essenziali di una variabile.*

Come si caratterizzano entro la soluzione generale le due particolari indicate al n. 1? Per la prima, nella quale tutte le rigate R si riducono all'iperboloide stesso, e quindi le curve $\Gamma$ ad altrettanti circoli di raggio $a\operatorname{sen}c$, basta porre nelle formole generali

$$\mathrm{L}=\frac{1}{a\operatorname{sen}c}\quad,\quad \mathrm{M}=0\,,$$

e le equazioni fondamentali per le funzioni incognite $p\,,q\,,\mathrm{P}$ si riducono alle tre seguenti

$$(11)\qquad \frac{\partial p}{\partial u}=\frac{q}{a\operatorname{sen}c}\quad,\quad \frac{\partial q}{\partial u}=-\frac{p}{a\operatorname{sen}c}\quad,\quad \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial u}=-\cot c\,.\,q\,,$$

mentre $r$ si calcolerà da

$$r=p\cot c+\frac{\mathrm{P}}{a\operatorname{sen}c}$$

e soddisferà alla $\frac{\partial r}{\partial u} = 0$. L'integrazione delle (11) è immediata e proseguendo si avrebbero, sotto altra forma, i risultati già ottenuti nel t. XXVI degli Annali ed ivi interpretati geometricamente.

4. Volgiamoci ora a caratterizzare similmente la seconda delle soluzioni particolari fornita dal teorema di Chieffi.

Per questo cominciamo dall'osservare che del sistema differenziale (A) si può subito assegnare un integrale primo, poichè infatti l'espressione

$$\mathrm{P}(p \cos c + r \operatorname{sen} c) - a \cos^2 c \,.\, q^2$$

ha, identicamente nulla, in forza delle (A), la derivata rapporto ad $u$, e per ciò: *Il sistema differenziale* (A) *possiede l'integrale primo* (*quadratico*)

$$\text{(B)} \qquad \mathrm{P}(p \cos c + r \operatorname{sen} c) - a \cos^2 c \,.\, q^2 = \mathrm{F}(v)\,,$$

*dove* $\mathrm{F}(v)$ *è una funzione della sola* $v$. Ed anzi si noti che la funzione $\mathrm{F}(v)$ resta effettivamente, nella soluzione generale, una funzione arbitraria, tali essendo i valori iniziali di $p, q, r, \mathrm{P}$ *per* $u = 0$.

Ora dimostreremo che: *la soluzione particolare corrispondente al caso di Chieffi è caratterizzata analiticamente dall'assumere nulla nell'integrale primo la funzione* $\mathrm{F}(v)$.

Per questo osserviamo in primo luogo che, nel caso di Chieffi, la congruenza è formata dalle tangenti alle geodetiche $g$, sulla superficie S deformata dell'iperboloide, che corrispondono alle generatrici di un sistema, e sulla superficie $\Sigma$, luogo delle linee di stringimento $\Gamma$, le linee secondo cui le sviluppabili formate dalle tangenti alle $g$ tagliano $\Sigma$ sono manifestamente *evolventi* delle $g$, e perciò ortogonali ai raggi della congruenza. Dunque: *nel caso di Chieffi le sviluppabili di un sistema della congruenza sono precisamente le* $u =$ cost.

Ora se dalle formole

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial u} = \alpha \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \mathrm{P}\alpha - a \cos c \,.\, q\xi + \mathrm{P} \operatorname{tg} c \,.\, \lambda \\ &\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial u} = \frac{\xi}{a} \quad , \quad \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial v} = -\cos c \,.\, q\alpha + (p \cos c + r \operatorname{sen} c)\,\xi - \operatorname{sen} c \,.\, q\lambda \end{aligned}\right.$$

si calcolano le quantità fondamentali di Kummer della congruenza [1], si trova

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{E} = \frac{1}{a^2}\ ,\ \mathrm{F} = \frac{p \cos c + r \operatorname{sen} c}{a}\ ,\ \mathrm{G} = q^2 + (p \cos c + r \operatorname{sen} c)^2 \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &e = 0\ ,\ f = f' = -\cos c \,.\, q\,, \\ &\qquad g = -\left\{\frac{\mathrm{P}}{\cos c} + a \cos c (p \cos c + r \operatorname{sen} c)\right\} q\,. \end{aligned}\right.$$

[1] Cfr. *Lezioni*, vol. I, § 137 e sgg.

La condizione che le $u = \text{cost}$ formino uno dei due sistemi di sviluppabili si scrive

$$fG - gF = 0,$$

e calcolata coi valori precedenti diventa

$$P(p \cos c + r \operatorname{sen} c) - a \cos^2 c \,.\, q^2 = 0 .$$

Come si vede, nel caso di Chieffi si ha necessariamente $F(v) = 0$, ed ora proveremo che inversamente se $F(v) = 0$ siamo nel caso di Chieffi. Intanto se $F(v) = 0$ le rigate $u = \text{cost}$ della congruenza formano le sviluppabili di un sistema e noi consideriamo i corrispondenti spigoli di regresso e la prima falda focale $S_1$ della congruenza loro luogo. Se con $x_1, y_1, z_1$ indichiamo le coordinate del punto $(u, v)$ di $S_1$, avremo

$$x_1 = x + \varrho X \,,\; y_2 = y + \varrho Y \,,\; z_1 = z + \varrho Z \,, \tag{12}$$

dove il valore dell'ascissa $\varrho$ si avrà subito osservando che le derivate *rapporto a v* di $x_1, y_1, z_1$ debbono riuscire proporzionali a $X, Y, Z$; onde risulta

$$\varrho = \frac{a \cos c \,.\, q}{p \cos c + r \operatorname{sen} c} . \tag{13}$$

Dopo ciò, calcolando l'elemento lineare $ds_1$ della $S_1$, proveremo che questa $S_1$ è applicabile sull'iperboloide, le sue geodetiche $u = \text{cost}$ essendo le deformate delle generatrici di un sistema.

Abbiamo

$$dx_1 = X\, d\varrho + dx + \varrho\, dX \,, \text{ ecc.}$$

e per ciò

$$ds_1^2 = S\, dx_1^2 = d\varrho^2 + 2\, d\varrho\, S\, X\, dx + S\, dx^2 + 2\varrho\, S\, dx\, dX + \varrho^2\, S\, dX^2 . \tag{14}$$

Ora calcolando troviamo

$$S\, dx^2 = du^2 + 2\,P\, du\, dv + \left(\frac{P^2}{\cos^2 c} + a^2 \cos^2 c \,.\, q^2\right) dv^2$$

$$S\, dx\, dX = -2 \cos c \,.\, q\, du\, dv - \left\{ \frac{P}{\cos c} + a \cos c\, (p \cos c + r \operatorname{sen} c) \right\} q\, dv^2$$

$$S\, dX^2 = \frac{du^2}{a^2} + 2\, \frac{p \cos c + r \operatorname{sen} c}{a}\, du\, dv + \left\{ q^2 + (p \cos c + r \operatorname{sen} c)^2 \right\} dv^2$$

$$S\, X\, dx = \operatorname{sen} c \,.\, du ,$$

e sostituendo nel secondo membro della (14), coll'aver riguardo al valore (13) di $\varrho$ ed al valore di $P$

$$P = \frac{a \cos^2 c \,.\, q^2}{p \cos c + r \operatorname{sen} c} = \cos c \,.\, q \varrho ,$$

si vede che i termini in $du\,dv$ e $dv^2$ si elidono e resta pel $ds_1^2$ in coordinate $\varrho$, $u$ la formola

$$ds_1^2 = d\varrho^2 + 2 \operatorname{sen} c \, du \, d\varrho + \left(\frac{\varrho^2}{a^2} + 1\right) du^2 .$$

Ma questa appartiene appunto all'iperboloide rotondo ad una falda, riferito ai paralleli $\varrho = \text{cost}$ ed alle generatrici di un sistema $u = \text{cost}$. Concludiamo quindi: *La soluzione particolare data dal teorema di Chieffi è caratterizzata analiticamente dal porre* $F(v) = 0$ *nell'integrale primo* (B); *geometricamente poi dalla circostanza che sulla superficie* $\Sigma$ *le linee ortogonali ai raggi della congruenza corrispondono alle sviluppabili di un sistema.*

5. Ritorniamo ora al caso generale per dimostrare che anche in questo caso nelle trasformazioni $B_k$ per le deformate rigate dell'iperboloide rotondo si ha un mezzo per dedurre da una soluzione nota del problema infinite nuove soluzioni.

In primo luogo stabiliamo l'esistenza della trasformazione *complementare*, che si ottiene senza alcun calcolo d'integrazione secondo il teorema seguente: *Se si ha una prima serie* $\infty^1$ *di rigate* R *applicabili sull'iperboloide rotondo e le cui generatrici formano una congruenza normale, una seconda tale serie si ottiene subito dalle loro rigate complementari* $\overline{R}$ [1].

Per dimostrarlo ricordiamo [2] che la rigata $\overline{R}$ complementare di R si forma conducendo pei punti $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ della curva $\overline{\Gamma}$ di Bertrand coniugata di $\Gamma$ i raggi coi coseni di direzione $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ coincidenti con quelli $\lambda, \mu, \nu$ della binormale a $\Gamma$. Ora abbiamo

$$\overline{x} = x + a \operatorname{sen} c \,.\, \xi \,, \text{ ecc.}$$

indi

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \overline{x}}{\partial u} &= (1 - a \operatorname{sen} c \,.\, L)\, \alpha - a \operatorname{sen} c \,.\, M\lambda \\ \frac{\partial \overline{x}}{\partial v} &= (P - a \operatorname{sen} c \,.\, r)\, \alpha - a \cos c \,.\, q\xi + (P \operatorname{tg}^2 c + a \operatorname{sen} c \,.\, p)\, \lambda \end{aligned} \right.$$

E siccome $\overline{X} = \lambda$

$$\frac{\partial \overline{X}}{\partial u} = M\xi \quad , \quad \frac{\partial \overline{X}}{\partial v} = q\alpha - p\xi \,,$$

[1] Indico di passaggio che il teorema vale anche pel caso in cui le rigate R siano applicabili sopra iperboloidi rotondi diversi, quando però sia lo stesso per tutti questi iperboloidi il momento delle loro generatrici rispetto all'asse.

[2] Cfr. *Lezioni*, vol. II, Nota I, pp. 573-576.

ne risulta

$$S \frac{\partial \overline{X}}{\partial u} \frac{\partial \overline{x}}{\partial v} = -a \cos c \, . \, Mq$$

$$S \frac{\partial \overline{X}}{\partial v} \frac{\partial \overline{x}}{\partial u} = (1 - a \operatorname{sen} c \, L) \, q \, ,$$

onde per la (1) le due espressioni ora scritte sono eguali, il che esprime appunto che le generatrici delle $\overline{R}$ formano una congruenza normale, come è asserito nell'enunciato del teorema.

È manifesto così che da ogni soluzione del nostro problema se ne ottiene subito, in termini finiti, una seconda mediante la trasformazione complementare, che è di sua natura involutoria.

Nelle generali trasformazioni $B_k$, che andiamo ora a stabilire, troveremo invece il modo di moltiplicare all'infinito le soluzioni del problema, partendo da una iniziale nota.

6. Volendo procedere colle formole stabilite nella presente Nota conviene ricordare che le trasformazioni $B_k$ delle deformate rigate dell'iperboloide rotonda equivalgono perfettamente alle trasformazioni di Razzaboni ([1]) delle curve $\Gamma$ di Bertrand che sono le linee di stringimento di queste deformate rigate.

Secondo le formole del § 23 della Memoria ora citata, applichiamo a ciascuna curva $\Gamma$ di Bertrand ($v = \text{cost}$) della superficie $\Sigma$ una trasformazione $B_\sigma$, a costante $\sigma$, che la trasformi in una nuova curva $\Gamma'$ di Bertrand della stessa famiglia; avremo così

(15) $\quad x' = x + a \cos \sigma \, [\cos c \operatorname{sen} \varphi \, . \, \alpha + \cos \varphi \, . \, \xi + \operatorname{sen} c \operatorname{sen} \varphi \, . \, \lambda]$, ecc.

dove $\varphi$ è una funzione di $u$, $v$, assoggettata per ora a verificare l'equazione di trasformazione [ibid. § 23, formola (64)]

(I) $$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{L}{\cos c} - \frac{\operatorname{sen} c \operatorname{sen} \sigma}{a \cos c \, (\operatorname{sen} \sigma + \cos c)} - \frac{\cos \sigma}{a (\operatorname{sen} \sigma + \cos c)} \cos \varphi \, .$$

Quanto alla costante $\sigma$ essa è del tutto arbitraria e soltanto dovremo supporre per il seguito

(16) $$\operatorname{sen}^2 \sigma \neq \cos^2 c \, .$$

Notiamo poi che i coseni di direzione $X'$, $Y'$, $Z'$ della binormale alla coniugata $\overline{\Gamma}'$ di $\Gamma'$ sono dati da

(16) $$X' = (\operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} c + \cos \sigma \cos c \cos \varphi) \, \alpha - \\ - \cos \sigma \operatorname{sen} \varphi \, . \, \xi + (\cos \sigma \operatorname{sen} c \cos \varphi - \operatorname{sen} \sigma \cos c) \, \lambda \, , \text{ ecc.}$$

[1] Cfr. i §§ 22, 23 della mia Memoria: *Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche rotonde.* Memorie della Società dei XL, tomo IV della serie III (1905).

e se pei punti di $\Gamma'$ si tirano i raggi nella direzione $(X', Y', Z')$, questi formano una rigata R' deformata dell'iperboloide e trasformata della complementare $\overline{R}$ della R mediante una certa $B_k$ (vedi Mem. cit.). Ora domandiamo: a quali altre condizioni, oltre la (I), conviene assoggettare la funzione $\varphi = \varphi(u, v)$ affinchè le generatrici delle rigate R' formino a loro volta una congruenza normale?

Per questo dovremo avere

$$\frac{\partial}{\partial u} SX' \frac{\partial x'}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} SX' \frac{\partial x'}{\partial u},$$

ossia

$$S \frac{\partial X'}{\partial u} \frac{\partial x'}{\partial v} = S \frac{\partial X'}{\partial v} \frac{\partial x'}{\partial u}.$$

Eseguendo i calcoli sulle (15), (16) e riducendo opportunamente, troviamo che la condizione da aggiungere alla (I) è la seguente:

$$(\mathrm{I}^*) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \left\{ \frac{P \cos \sigma}{a \cos c (\operatorname{sen}^2 \sigma - \cos^2 c)} - \frac{\operatorname{sen} \sigma \cos \sigma (p \cos c p + r \operatorname{sen} c)}{\operatorname{sen}^2 \sigma - \cos^2 c} \right\} \cos \varphi +$$

$$+ \frac{q \cos c}{\operatorname{sen} \sigma - \cos c} \operatorname{sen} \varphi - \left\{ \frac{P \operatorname{sen} c}{a \cos c (\operatorname{sen}^2 \sigma - \cos^2 c)} + \frac{\operatorname{sen} c \operatorname{sen}^2 \sigma + \cos c \cos^2 \sigma r}{\operatorname{sen}^2 \sigma - \cos^2 c} \right\}.$$

Le due equazioni simultanee (I), (I*) per la funzione incognita $\varphi$ formano, come si verifica, un sistema completamente integrabile, che nella incognita $A = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi$ assume la solita formola di Riccati.

Fissata la costante $\sigma$, se si integra la detta equazione di Riccati deduciamo così dalla serie nota di rigate R deformate dell'iperboloide una semplice infinità di tali nuove serie, a congruenze di generatrici normali.

Osserviamo poi che sussiste anche in questo caso il *teorema di permutabilità* con tutte le sue conseguenze che permettono di semplificare i metodi di trasformazione.

Notiamo da ultimo che se la serie $\infty^1$ iniziale di deformate rigate R dell'iperboloide offre il caso particolare di Chieffi, lo stesso accade per tutte le nuove serie che se ne derivano per trasformazioni $B_k$.

Geologia. — *La Geologia e la Carta geologica.* Nota del Socio CARLO DE STEFANI [1].

Mentre il fragore delle armi riempie l'universo, fiumi di parole scorrono per ogni dove auspicando trasformazioni e movimenti che non sempre saranno atti a sommuovere l'inerzia dell'umanità in genere e dell'Italia in ispecie. Di quanto riguarda la scienza e la sapienza italiana, costante e nobilissimo scopo della illustre Accademia, fu trattato più volte ne' tempi passati. Oggi, mentre tutti i buoni propositi, con novello ardore, da parte di tutti, tornano in campo, a me pare rigoroso dovere ripassare in esame quello che fu, quello che è, quel che dovrebbe essere fra noi la scienza che io, dopo i colleghi Capellini e Taramelli ed insieme con essi, coltivo da mezzo secolo.

La Geologia in Italia quale fu coltivata dai nostri antichi maestri De Zigno, Gastaldi, Gemmellaro, Guiscardi, Meneghini, Omboni, Pareto, Pilla, Ponzi, Savi, Seguenza, Sismonda ed altri, era scienza eminentemente positiva, senza preconcetti, paragonabile « alla scienza ed al metodo dei « geologi inglesi » — riporto e riporterò parole mie scritte assai anteriormente ai tempi d'oggi. — L'intelletto nostro ben si addiceva a quel genere positivo di ricerche, ed « egualmente lontano dalle analisi minuziose e gravi « dei Germani e dalle sintesi eleganti ma talora affrettate dei Francesi op- « portunamente si approfitta di ambedue ».

I libri dei geologi italiani più vecchi, erano tradotti specialmente dai tedeschi. « La coltura scientifica fino a due secoli fa più diffusa in Italia « e presso i popoli Latini, conseguentemente alle nuove circostanze econo- « miche e politiche si è venuta diffondendo maggiormente presso i popoli « anglo-sassoni e germanici ».

In queste circostanze si apriva il primo mezzo secolo della nostra liberazione e della nostra unità.

Le scuole universitarie erano sufficientemente frequentate da valenti giovani atti a seguitare le tradizioni che i maestri nostri ci avevano consegnate. Di questi già parecchi, i De Gasperi, i Zuffardi, i De Toni, hanno pagato alla patria un tributo ben più caro della sapienza: e di sè hanno lasciato una memoria imperitura. Altri valenti la servono tuttora fedelmente con le armi. Chi più studia la propria terra più impara ad amarla.

Le aule universitarie, per supremi doveri, sono disertate dai giovani; nè di ciò dobbiamo dolerci. Ma già, almeno da un lustro prima della guerra,

[1] Pervenuta all'Accademia il 23 ottobre 1918.

le dette aule erano frequentate quasi più da donne che da uomini e le donne sono diventate oggi, nelle nostre scienze, nostre sole auditrici. Al superficiale osservatore potrebbe parere che tale fatto attestasse un ampliamento dell'istruzione e fosse causa di rallegramento; ma al conoscitore appare invece un progressivo incessante decadimento del livello e dei frutti dell'insegnamento scientifico od almeno di molta parte del medesimo. Constatiamo con dolore il fatto; ma del riordinamento della Università non è qui luogo a parlare.

Per quanto riguarda in modo speciale la Geologia, riassumendo quanto è stato fatto dal primo giorno di nostra liberazione ad oggi, l'intervento del governo, ad onta di tutte le sue migliori intenzioni, e di varie sue giustificazioni, è stato, come dirò, assai più dannoso che utile.

Fra le prime necessità dello Stato fu quella di ordinare una Carta geologica dando esecuzione ad un concetto che già tanti lustri prima e quando l'Italia era ancora divisa, era stato manifestato, ed in parte imperfettamente, come i tempi consentivano, eseguito.

Era pur necessario creare e rafforzare un istituto di Ingegneri delle miniere che servisse lo Stato nelle sue svariate bisogna e che poco a poco sostituisse i numerosi ingegneri di ogni nazionalità estranea che avevano quasi il privilegio della ricerca e della direzione delle nostre, allora comparativamente ricchissime, aziende minerarie. D'altra parte lo Stato era povero, anche più di oggi, nè pareva si potesse troppo moltiplicare la divisione del lavoro e degli uffici.

Per tali ragioni, specialmente ad opera di Quintino Sella, al cui glorioso nome l'Italia e con essa la nostra Accademia debbono omaggio imperituro, fu dato incarico agl'Ingegneri delle miniere di rilevare la Carta geologica del Regno. Era egli, uomo pratico, valente scenziato, Ingegnere di miniere, uscito dalle scuole di Francia ed animato dai principii di queste, donde erano usciti Ingegneri che erano pure stati geologi valentissimi. Fu egli aiutato nell'opera sua da Felice Giordano, pure Ingegnere delle miniere ed uscito dalle medesime scuole.

Per l'impresa della Carta geologica, oltre il titolo di Ingegnere delle miniere acquistato nelle scuole nostre che erano state sempre ed erano ancora a tale uopo imperfette, occorreva un noviziato o perfezionamento che dir si voglia, in un qualche Istituto geologico straniero che fu preferibilmente francese. Con questo sistema sancivasi un confondimento tra le funzioni dell'Ingegner di miniere e quelle del Geologo le quali sono fra loro ancor più diverse che non siano quelle dell'Ingegner di miniere e quelle dell'Ingegnere metallurgico.

Non dirò che se il provvedimento trovava giustificazione in quella mancata divisione di lavoro che è propria degli Stati più semplici e direi quasi primitivi, non rispondeva precisamente ai sistemi di alcun altro Stato, ec-

cettuata la Spagna, e meno che mai a quello di Francia, ed escludeva dagli operatori della Carta gli allievi presenti e futuri delle nostre tuttora rinomate scuole geologiche. Conviene notare che non era ancora fatta la Carta topografica d'Italia che doveva servire di base ad ogni buona Carta geologica, onde si ritenne che il far questa fosse principalmente questione di geodesia e di misurazione.

Vivaci critiche furono fatte a tali proponimenti, e con animo di rimediarvi fu istituita una Direzione di Professori universitari e di altri, quasi che in simili circostanze si potessero spartire fra differenti persone la mente e il braccio. Ad opera del Sella e del Capellini fu anche istituita la Società geologica, per la quale il Taramelli ed io ebbimo l'onorevole incarico di redigere lo Statuto.

Non ristarono i critici, e fra i più autorevoli furono lo Stoppani ed il Taramelli, membri del Comitato geologico direttivo.

Riteniamo che la mente aperta del Sella, troppo presto rapito, avrebbe finito per correggere le imperfezioni del sistema.

Oggi, dopo quasi mezzo secolo, può bene constatarsi quanto i timori e le critiche fossero fondati. Le funzioni dello Stato sono andate rapidamente aumentando di numero e d'importanza; ma non in pari modo si accrebbero le finanze. Le mansioni affidate dai Ministeri al Corpo Reale delle miniere furono straordinariamente aumentate.

Gl'Ingegneri delle miniere stanno oggi al pari di quelli degli altri Stati e fra quelli si sono pure venuti formando alcuni valenti geologi. Dal punto di vista puramente geologico, il metodo di riportare sulla Carta il rilevamento fu quello stesso dei geologi non ingegneri, nè poteva essere diversamente; errori furono commessi in fatto di miniere, di gallerie e di linee ferroviarie, di bacini idrici, di ponti, di frane, errori tali e quali, diciamo, come si fosse trattato di geologi non ingegneri. La Carta geologica fu fatta e pubblicata in quanto le finanze lo permettessero, certo, con miglioramento rispetto alle Carte precedenti; ma, *absque ira et studio*, nel complesso, e comparativamente, la Carta compiuta dagli Ingegneri delle miniere è riuscita, diciamo, come sarebbe stato un lavoro di miniere compiuto da Geologi non Ingegneri.

Sarebbe utile paragonare, come io feci di persona, la Carta nostra, sia pur nelle regioni ricche di fossili, con quella della sponda opposta dell'Adriatico redatta con criterio assai diverso, più scientifico, e probabilmente con meno miseria di finanze.

Con questo sistema fu codificata la Geologia italiana.

A proposito del rilevamento della Sicilia, il Di Stefano, che fu pur membro del Comitato geologico direttivo e che nell'ultima seduta cui assistette propose analogo ordine del giorno, faceva notare come « non fosse « punto compito lo studio delle ricerche stratigrafico-paleontologiche, ed è

« un errore il credere che l'attività dei geologi debba ora esclusivamente « rivolgersi a quelle tettoniche e morfologiche » (1). Lo stesso può dirsi, salvo lievissime eccezioni, del Codice geologico e del rilevamento di tutta Italia. E il Capellini dopo essere stato per 22 anni Presidente del Comitato direttivo finiva col dire: « i tentativi di continue modificazioni, già per mezzo « secolo, senza essere riesciti a un soddisfacente assetto definitivo, devono « avere persuaso tutti che la organizzazione del Comitato non è buona; e « la esperienza maestra oggi deve a ciò saper provvedere » (2).

E S. E. il prof. Cermenati, Presidente attuale del medesimo Comitato, nell'assumere il suo ufficio esclamava la necessità « anche per altre ragioni « intrinseche, di risollevare il Comitato e l' Ufficio geologico dallo stato ... « di pochissima rispondenza al rispettivo compito in cui sono entrambi ca- « duti: ... malattia ereditaria dalla nascita. In mezzo secolo si doveva fare « ben altro, e più lungo, e più completo cammino » (3).

Ma le ripercussioni inevitabili di ogni fatto fisico ed intellettuale, prevedute dagli acuti osservatori, sfuggenti alla moltitudine, hanno prodotto danni assai più gravi e meno reparabili. I nostri discepoli delle Università, già prima della guerra, hanno potuto fare studî e Carte geologiche dell'Albania, della Grecia, delle isole Egee, delle Indie, dell' Argentina, dell'Eritrea, di altre parti dell'Africa, dell'America, dell' Europa; e talvolta di loro si è servito lo stesso Governo; ma sono stati dichiarati incompetenti a fare la Carta d' Italia. Oltre le già scarse possibilità di carriera, sottratta anche la competenza a fare la Carta dello Stato, e ridotto sterile ed ingrato lo studio codificato della geologia paesana, i volonterosi di geologia hanno disertato le Università, e quelli che già l'avevano studiata, si sono dedicati alla Paleontologia, ancor loro permessa, a scienze agrarie, ovvero, fortunatamente almeno, alla Geografia, rinsanguando e rinnovando questa grande orfanella dei paesi latini.

Essendo venuta meno quasi ogni ragione pratica all' insegnamento della Geologia, i medesimi fatti non poterono a meno di avere ripercussione sugli stessi insegnanti universitarî, costretti a diventare sempre più teoretici con predominio dei Litologi e dei Paleontologi sedentarî.

Per contrapposto, la competenza geologica era dallo Stato affidata, come dissi, agl' Ingegneri di miniere che avessero studiato e praticato Geologia all'estero almeno un paio d'anni. L' innesto e la applicazione pratica di scuole dottrinarie degli stranieri diventati quasi sempre ignari di nostra

(1) G Di Stefano *Cenno storico sullo sviluppo degli studi geologici in Sicilia* (Bull. Soc. geol. it., vol. XXVIII, 1910), Roma.

(2) G. Capellini, *La Carta geologica d' Italia e la Società geologiea italiana* (Boll. Soc. geol. it., vol. XXX, 1911). Roma.

(3) M. Cermenati, *Per la Carta geologica d'Italia* (La Miniera italiana, Anno II, 1918, n. 6), Roma.

lingua e invidiosi di noi e de' nostri studî, forniti di più o meno ragionevole presunzione per sè, di compatimento per noi, ha rotto la nobile tradizione nostra, ed oppostamente alla lustra di *misoxenia* che a parole oggi pervade tutti, l'esecutore pratico della Geologia *laudabiliter se subiecit* al benigno compatimento altrui. « Così abbeverandosi a fonti straniere i gio- « vani, copiando scuole di fuori, or l'una or l'altra e adottando perfino « parole e intere frasi barbariche vennero meno a quell'originalità e a quel « contributo positivo e senza prevenzioni tanto utile alla scienza universale « che erano tradizionali nelle scuole italiane ». Appena timidamente ed occultata da noi stessi si mantenne quella corrente critica autonoma che in tutte le scienze, provenendo da diverse parti, contribuisce a lungo andare a determinare il vero.

Confusi gli attributi, imperfetta la Carta geologica, disertata l'Università, soggiacente la scienza italiana, ecco il risultato finale di un cinquantennio di azione dello Stato sulla Geologia italiana, e forse così sarà accaduto di qualche altra scienza.

Occorre dunque ricominciare la strada con la divisione del lavoro e con la separazione degli uffici. « Ai geologi ingegneri o naturalisti costituiti in « Comitato geologico indipendente siano affidati la revisione e il compimento « della gran Carta geologica d'Italia; all'Ufficio delle Miniere tutto quanto « direttemente o indirettamente alle miniere si riferisce ». Così conclude le sue osservazioni il già Presidente Capellini citato, e sottoscrivo interamente le sue conclusioni.

Obiettasi da alcuni che occorrerebbe una legge: credo ciò costituzionalmente esatto, ma non nel caso attuale. Tutta la faccenda della Carta geologica, tutto ciò che di geologico fu ripetutamente fatto e disfatto dal 20 luglio 1861 al 23 gennaio 1879 e ad oggi, è opera di Decreti ministeriali; anzi il Regolamento per la esecuzione dei lavori, per le attribuzioni, per i locali etc. porta la sola firma del Presidente del Comitato direttivo. È costituzionalmente arcichiaro che un semplice Decreto ministeriale può sostituire quelli precedenti e la sostituzione può essere sancita poi da una legge o da un Decreto luogotenenziale.

Ministri, segretari di Stato, lo stesso Comitato geologico hanno promesso più volte di provvedere. Ma *Expellas naturam furca tamen usque recurret.* Tempo perso! Nondimeno, dopo avere cercato invano per quasi cinquant'anni di oppormi, rafforzato dall'esperienza e dal comune consenso, avviandomi verso il termine della mia carriera, ed in accordo con tanti e forse con tutti i colleghi, che la pensarono e la pensano come me, ho creduto mio stretto dovere verso il paese, verso la scienza, verso i miei discepoli, ripetere l'eco delle voci che da ogni parte domandano rinnovamento.

**Meccanica.** — *$ds^2$ einsteiniani in campi newtoniani.* IV. *Il sottocaso* $B_2$): *Riduzione delle equazioni differenziali.* Nota del Socio T. LEVI-CIVITA [1].

La precedente Nota III fu, per così dire, di preparazione generica; questa sarà di preparazione specifica alla deduzione di una classe di integrali. Si tratta del sottocaso $B_2$) [cfr. Nota II], il più semplice. dopo quello elementare (o galileiano) in cui lo spazio resta addirittura euclideo. Dalle condizioni caratteristiche di $B_2$) scende (§§ 1-2) che lo spazio è atteggiato a varietà normale di Bianchi con due curvature principali $\omega_1$ e $\omega_2$ eguali tra loro, talchè (siccome la curvatura media si annulla in ogni caso) si ha

$$\omega_1 = \omega_2 = -\frac{1}{2}\omega ,$$

designando $\omega$ la terza curvatura principale. Il quadrato dell'elemento lineare è (§ 3) riducibile alla forma

$$dl^2 = e^{2\tau}(d\sigma^2 + dx_3^2) ,$$

dove $d\sigma$ rappresenta un elemento lineare binario (di cui anche i coefficienti sono indipendenti da $x_3$), e la funzione $\tau$ è legata alla velocità della luce $V = V_0 e^{\nu}$ ($V_0$ costante di omogeneità) dalla relazione $\nu = \tau + \zeta$, con $\zeta$ funzione della sola $x_3$; inoltre $e^{-3\tau}$ differisce da $\omega$ per un fattore costante.

Si potrebbe cercare di sfruttare tutti questi risultati simultaneamente procedendo a diretta riduzione e integrazione delle equazioni gravitazionali intrinseche, secondo il criterio indicato a § 4. Ma si richiederebbero calcoli poco istruttivi e artifici non spontanei. Ho preferito pertanto riprendere *ab initio* le equazioni della statica einsteiniana, cercandone le soluzioni per cui il $dl^2$ ha la forma indicata e $\tau = \nu + \zeta$ (senza far intervenire ipotesi concernenti la curvatura). In base a tali condizioni addizionali, le equazioni si trasformano con procedimento sistematico rivolto alla separazione delle variabili (§§ 5-6), applicando le formule della Nota precedente. Vien fatto così di sostituire, come forma fondamentale, il $d\sigma^2$ binario all'originario $dl^2$, e le espressioni che ne risultano per le curvature principali mostrano a posteriori che le soluzioni in questione sono tutte e sole le $B_2$) cercate.

Per ragione di spazio, mi sono arrestato a questo punto, rimettendo alle prossime Note la discussione del sistema ridotto che non si presenta ancora sotto forma immediatamente integrabile.

[1] Pervenuta all'Accademia l'11 ottobre 1918.

### 1. — Semplificazione delle condizioni di integrabilità corrispondenti al sottocaso $B_2$).

Ricordiamo — con riferimento alle Note precedenti e in particolare alla II [1] per simboli e formule — che il sottocaso $B_2$) è contraddistinto dall'annullarsi di

$$\delta_3 = \omega_2 - \omega_1 \quad ; \quad \gamma_1 = \gamma_{231} \quad , \quad \gamma_2 = \gamma_{312} \, .$$

La prima condizione esprime che sono eguali due delle curvature principali. Siccome la curvatura media $\mathfrak{M} = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ si annulla in ogni caso, così le tre curvature principali $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ si possono esprimere per mezzo di una sola funzione $\omega$ (del posto) sotto la forma

$$\omega_1 = -\frac{1}{2}\omega \quad , \quad \omega_2 = -\frac{1}{2}\omega \quad , \quad \omega_3 = \omega \, . \tag{1}$$

In una tale metrica (prescindendo dal caso particolare in cui $\omega$ si riduca ad una costante) assumono evidentemente posto cospicuo le superficie $\omega =$ cost. (luogo dei punti in cui lo spazio si presenta egualmente incurvato) e le loro traiettorie ortogonali che chiameremo, come è naturale, *linee di pendenza* (delle curvature).

Delle tre direzioni principali di curvatura è univocamente determinata soltanto quella corrispondente ad $\omega$, cioè [Nota II, § 4] la 3, che si dirà *assiale*; le altre due sono unicamente sottoposte alla condizione di essere perpendicolari tra loro e alla 3. Chiameremo naturalmente *linee assiali* quelle definite dalle direzioni assiali 3, e *congruenza assiale* la [3], formata dalle linee assiali. La relativa anormalità $\gamma_{312} - \gamma_{321}$ si annulla in causa di $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Perciò la congruenza assiale taglia ortogonalmente una famiglia di superficie, che gioverà assumere come superficie coordinate $x_3 =$ cost. Va notato altresì che (annullandosi separatamente $\gamma_{312}$ e $\gamma_{321}$) sussiste la relazione

$$\gamma_{312} + \gamma_{321} = 0 \, . \tag{2}$$

Premesso questo, introduciamo nelle condizioni di integrabilità [(IV) della Nota II

$$\frac{d\omega_k}{dl_i} + (\omega_i - \omega_k)\,\gamma_{kik} + \frac{dv}{dl_i}(\omega_k - \omega_j) = 0 \, , \tag{IV}$$

[1] Cfr. Nota I a pp. 307-317 del vol. XXVI (2° semestre 1917); Nota II a pp. 3-12 del vol. XXVII (1° semestre 1918); Nota III a pp. 183-191 di questo stesso volume (2° semestre 1918).

in cui $i, k, j$ rappresentano indici *distinti*, le determinazioni (1) delle curvature principali.

Anzitutto, per $k=1$ o $2$, $j=3$ (e quindi $i=2$ ovvero 1 rispettivamente) si hanno le due equazioni

$$(\mathrm{IV}_a) \qquad \frac{d\omega}{dl_i}+3\omega\frac{dv}{dl_i}=0 \qquad (i=1\,,2)\,.$$

Cogli stessi valori di $k$, ma $i=3$ (e quindi $j$ eguale rispettivamente a 2 ovvero a 1) risulta

$$(\mathrm{IV}_b) \qquad \frac{d\omega}{dl_3}-3\omega\gamma_{k3k}=0 \qquad (k=1\,,2)\,.$$

Infine, per $k=3$, $i=1$ o $2$ (e quindi $j=2$ o $1$ rispettivamente), si ricava

$$\frac{d\omega}{dl_i}-{}^3/_2\,\omega\gamma_{3i3}+{}^3/_2\,\omega\frac{dv}{dl_i}=0 \qquad (i=1\,,2),$$

che, unite alle precedenti, esauriscono le (IV). Quest'ultimo gruppo, eliminandone le $\frac{dv}{dl_i}$ per mezzo delle $(\mathrm{IV}_a)$, può essere scritto

$$(\mathrm{IV}_c) \qquad \frac{d\omega}{dl_i}-3\omega\gamma_{3i3}=0\,.$$

## 2. — Interpretazioni geometriche. Riferimento ad un sistema triplo ortogonale.

L'ipotesi $\omega=0$ implicherebbe, in virtù delle (1), l'annullarsi di tutte e tre le curvature principali; si tratterebbe pertanto di spazio euclideo, e si ricadrebbe nel caso galileiano $B_3$), già esaurito nella Nota II (§ 7). Va quindi ritenuto $\omega \neq 0$, ed è lecito porre

$$(3) \qquad \omega=\omega_0\,e^{-3\tau}\,,$$

designando con $\omega_0$ una curvatura costante (non nulla, ma *a priori* arbitraria) che si introduce per ragione di omogeneità, onde poter risguardare l'esponenziale e con esso l'esponente $\tau$ quale un puro numero. Tale è — ricordiamolo — anche $v$, legato alla velocità V della luce dalla posizione [(2) della Nota II]

$$V=V_0\,e^{v}\ (^1).$$

(1) A vero dire, nella Nota II, la costante moltiplicativa $V_0$ (affatto inessenziale perchè non compare nelle equazioni differenziali) era stata designata con $c$. Siccome si suole attribuire a $c$ il significato specifico di velocità della luce in assenza d'ogni circostanza perturbatrice, così evito d'ora innanzi di adoperare la stessa lettera per una semplice costante di omogeneità, che può benissimo non avere [come per es. vedremo nella Nota V, § 4] la detta interpretazione fisica.

Per il semplice fatto che $\omega$ non si annulla, segue dalle ($IV_b$)

$$\gamma_{311} = \gamma_{322}, \tag{4}$$

la quale, associata a (2), sta ad esprimere che la congruenza assiale [3] è isotropa, ossia può, in infiniti modi, risguardarsi costituita dalle intersezioni di due famiglie di superficie ortogonali fra loro [1]. Due tali famiglie, unitamente alla $x_3 =$ cost., formano un sistema triplo ortogonale, talchè, assumendole come superficie coordinate $x_1 =$ cost. , $x_2 =$ cost., il quadrato dell'elemento lineare dello spazio ha necessariamente la forma

$$dl^2 = H_1^2\, dx_1^2 + H_2^2\, dx_2^2 + H_3^2\, dx_3^2 .$$

Abbiamo già osservato a § 1 che ogni terna trirettangola di direzioni fra cui figuri quella assiale può essere risguardata come principale. *Perciò in particolare è lecito considerare come terna principale di curvatura quella costituita dalle linee coordinate di un qualsiasi sistema triplo ortogonale cui appartenga la famiglia* $x_3 =$ cost. Così intanto risulta che ogni varietà del tipo $B_2$) è normale nel senso di Bianchi, e quindi rientra nel tipo $B_1$) [Nota II, § 6], di cui però costituisce [in virtù della condizione addizionale $\vartheta_3 = 0$, ossia delle (1)] una classe speciale. Ed è ben giustificato il considerarla a parte, tanto più che $B_2$) si integra, mentre non si saprebbe forse affrontare $B_1$) nella sua generalità.

### 3. — Forma finita sotto cui giova ritenere le condizioni di integrabilità.

Ricordiamo che le linee coordinate di un sistema triplo ortogonale costituiscono tre congruenze normali, per cui le $\gamma$ con tre indici distinti sono nulle, e le altre si riducono allo schema $\gamma_{ikk}$. Queste si esprimono, per mezzo dei coefficienti H del $dl^2$ riferito al sistema triplo, sotto la forma

$$\gamma_{ikk} = \frac{d\mathfrak{h}_k}{dl_i} \qquad (i \neq k),$$

essendo

$$H_k = e^{\mathfrak{h}_k} .$$

[1] Cfr. Ricci, *Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque*, nelle Memorie di questa Accademia, ser. V, vol. II, 1896, pp. 31 e 44. La denominazione « congruenza isotropa » ricorre però soltanto nella successiva mia Nota *Sulle congruenze di curve*, in questi Rendiconti, vol. VIII (2° sem. 1899), pag. 243. Le proprietà differenziali delle congruenze, e in particolare delle congruenze isotrope, ivi riferite all'ordinario spazio euclideo, sussistono anche in una varietà a tre dimensioni di natura metrica qualunque.

Con queste espressioni delle $\gamma$, ove si elimini anche $\omega$ per mezzo della (3), i tre gruppi $(\mathrm{IV}_a)$, $(\mathrm{IV}_b)$, $(\mathrm{IV}_c)$ divengono rispettivamente

$$(\mathrm{IV}'_a) \qquad \frac{d\nu}{dl_i} = \frac{d\tau}{dl_i} \qquad (i = 1, 2);$$

$$(\mathrm{IV}'_b) \qquad \frac{d\mathfrak{h}_i}{dl_3} = \frac{d\tau}{dl_3};$$

$$(\mathrm{IV}'_c) \qquad \frac{d\mathfrak{h}_3}{dl_i} = \frac{d\tau}{dl_i}.$$

Tali equazioni vanno notate perchè si prestano a diretta combinazione colle equazioni gravitazionali [sotto la forma $(\mathrm{I}^*)$, $(\mathrm{II}^*)$ della Nota II], combinazione che sarebbe richiesta dal primo dei procedimenti di integrazione di cui sarà fatto cenno nel § seguente. Ma importa anche più l'osservare che, sostituendo ad ogni $dl_i$ la sua espressione $\mathrm{H}_i\,dx_i$, si attribuisce alle suddette equazioni la forma equivalente

$$\frac{\partial \nu}{\partial x_i} = \frac{\partial \tau}{\partial x_i}; \quad \frac{\partial \mathfrak{h}_i}{\partial x_3} = \frac{\partial \tau}{\partial x_3}; \quad \frac{\partial \mathfrak{h}_3}{\partial x_i} = \frac{\partial \tau}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2).$$

L'effettiva integrazione del primo gruppo porge

$$(\mathrm{IV}''_a) \qquad \nu = \tau + \zeta,$$

designando $\zeta$ una funzione *a priori* arbitraria *della sola* $x_3$.

Dal secondo gruppo, tenuto presente che $\mathrm{H}_i = e^{\mathfrak{h}_i}$, si ricava

$$(\mathrm{IV}''_b) \qquad \mathrm{H}_i = e^{\tau}\,\mathcal{H}_i \qquad (i = 1, 2),$$

le $\mathcal{H}_i$ dipendendo *soltanto da* $x_1, x_2$.

Infine il terzo gruppo equivale a

$$\mathrm{H}_3 = e^{\tau}\,\chi$$

con $\chi$ funzione della sola $x_3$. Ma si può sempre rendere $\chi = 1$, eseguendo un semplice cambiamento di parametro, sostituendo cioè alla variabile $x_3$ una sua opportuna funzione. Adottato questo nuovo parametro, che per semplicità seguiteremo a chiamare $x_3$, si ha

$$(\mathrm{IV}''_c) \qquad \mathrm{H}_3 = e^{\tau};$$

ossia $\mathfrak{h}_3 = \tau$.

In virtù delle $(\mathrm{IV}''_b)$ e $(\mathrm{IV}''_c)$, il nostro $dl^2$ assume l'aspetto

$$e^{2\tau}(\mathcal{H}_1^2\,dx_1^2 + \mathcal{H}_2^2\,dx_2^2 + dx_3^2).$$

Si noti che, per essere $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ funzioni di $x_1, x_2$ non ulteriormente vin-

colate (dalle equazioni di cui ci occupiamo), $\mathcal{H}_1^2 dx_1^2 + \mathcal{H}_2^2 dx_2^2$ costituisce un generico $d\sigma^2$ binario.

*Possiamo pertanto riassumere le condizioni di integrabilità come segue:*

$$dl^2 = e^{2\tau} dl'^2 = e^{2\tau}(d\sigma^2 + dx_3^2), \tag{5}$$

*con $d\sigma$ elemento lineare binario* (a coefficienti indipendenti da $x_3$), ciò che sostituisce le $(IV_b'')$ e $(IV_c'')$;

$$\nu = \tau + \zeta \tag{6}$$

*con $\zeta$ funzione della $x_3$*, ciò che riproduce la $(IV_a'')$; *infine $\tau$ è legata ad $\omega$, ossia alle curvature principali* $(\omega_1 = \omega_2 = -\frac{1}{2}\omega)$ *del $dl^2$, dalla equazione* (3); *le $x_3$* $(x_1 = \text{cost.}, x_2 = \text{cost.})$ *sono linee assiali* (cfr. § 1).

## 4. Doppio modo di impostare la integrazione. Preferibilità del secondo.

Conseguite ormai sotto forma assai maneggevole le condizioni di integrabilità relative al sottocaso $B_2$), si può ricorrere, per l'integrazione delle corrispondenti equazioni gravitazionali, a due distinti criterî:

1°. Far sistema delle equazioni intrinseche $(I^*)$, $(II^*)$ della Nota II colle condizioni di integrabilità $(IV_a')$, $(IV_b')$, $(IV_c')$, riferendo il $dl^2$ ad un sistema triplo che rientri nel tipo (5), e semplificando poi ulteriormente di mano in mano che se ne presenta l'opportunità, in modo da rendere immediata taluna integrazione e giungere infine ad un sistema ridotto, in cui figurano esplicitamente derivate ordinarie, al posto delle intrinseche.

Il calcolo condotto per questa via mi è riuscito discretamente laborioso e poco perspicuo, sicchè reputo superfluo intrattenermivi, proponendomi di sviluppare invece il criterio

2°. Le condizioni di integrabilità esigono che il $dl^2$ spaziale e $\nu$ (legata alla velocità della luce dalla relazione $V = V_0 e^{\nu}$) abbiano le forme rispettive (5) e (6). Orbene, si riprendono le originarie equazioni gravitazionali (I), (II), e si cercano quelle loro particolari soluzioni, che verificano anche (5) e (6).

Le trasformazioni covarianti su cui appositamente richiamai l'attenzione nella precedente Nota III consentono di caratterizzare queste soluzioni con spontaneità ed eleganza. Il sottocaso $B_2$) vi è certo compreso. A posteriori risulterà che esso è proprio costituito da tutte e sole le dette soluzioni.

## 5. — Trasformazioni suggerite dalla forma (5) del $dl^2$.

Le derivate seconde covarianti $V_{ik}$ di una generica funzione V, prese con referenza ad un assegnato $dl^2$, si sanno riportare ad un $dl'^2$ che ne diffe-

risce per il fattore $e^{2\tau}$. Essendo precisamente

$$dl^2 = e^{2\tau}\, dl'^2 ,$$

basta invocare le formule (5) della precedente Nota III, *scambiandovi le lettere accentate con quelle non accentate.* Si ha così

$$\frac{V_{ik}}{V} = \nu'_{ik} + \nu_i \nu_k - \tau_i \nu_k - \tau_k \nu_i + a'_{ik} \nabla'(\tau , \nu) \tag{7}$$

$$(V = V_0 e^{\nu} ; \; i , k = 1 , 2 , 3),$$

il secondo membro andando riferito alla forma $dl'^2$.

L'analogo riporto dei simboli di Ricci $\alpha_{ik}$ dà luogo alle formule [(13) della citata Nota, con identica avvertenza circa gli accenti]

$$\alpha_{ik} = \alpha'_{ik} + \tau'_{ik} - \tau_i \tau_k - a'_{ik} \Delta'_2 \tau . \tag{8}$$

A noi interessa il $dl'^2$ che figura nella (5), cioè

$$dl'^2 = d\sigma^2 + dx_3^2 .$$

Stando così le cose, è possibile ed opportuno esprimere ulteriormente le $\nu'_{ik}$ e $\alpha'_{ik}$ con riferimento alla forma binaria $d\sigma^2$. A ciò provvedono le formule (16) e (19) della Nota citata, in cui si ponga $A = 1$. Tali formule divengono in conformità

$$\nu'_{ik} = \nu_{ik} \quad (i , k = 1 , 2 , 3) , \tag{9}$$

$$\alpha'_{ik} = \alpha'_{i3} = 0 \quad (i , k = 1 , 2) \; ; \; \alpha'_{33} = K : \tag{10}$$

le $\nu_{ik}$ $(i , k = 1 , 2)$ si possono risguardare come derivate covarianti rispetto al $d\sigma^2$ binario; $\nu_{i3}$ e $\nu_{33}$ si identificano colle derivate seconde ordinarie $\frac{\partial^2 \nu}{\partial x_i \partial x_3}$; $\frac{\partial^2 \nu}{\partial x_3^2}$; e K rappresenta la curvatura gaussiana del $d\sigma^2$.

6. — Combinazione delle precedenti relazioni e della (6).

A $\nu$ si può sostituire dappertutto la sua espressione (6), con che

$$\nu_i = \tau_i \quad (i = 1 , 2) \quad , \quad \nu_3 = \tau_3 + \zeta' ,$$

l'apice apposto ad una funzione di un solo argomento designando derivata rispetto a quell'argomento.

Così facendo, le (7), combinate colle (9), e le (8), combinate colle (10), dànno

$$(7') \quad \begin{cases} \dfrac{V_{ik}}{V} = \tau_{ik} - \tau_i \tau_k + a_{ik} \nabla'(\tau, \tau + \zeta) \; ; \; \dfrac{V_{i3}}{V} = \tau_{i3} - \tau_i \tau_3 \; ; \\ \dfrac{V_{33}}{V} = \tau_{33} - \tau_3^2 + \zeta'' + \zeta'^2 + \nabla'(\tau, \tau + \zeta) \; ; \end{cases}$$

$$(8') \quad \begin{cases} \alpha_{ik} = \tau_{ik} - \tau_i \tau_k - a_{ik} \Delta_2' \tau \quad ; \quad \alpha_{i3} = \tau_{i3} - \tau_i \tau_3 \; ; \\ \alpha_{33} = K + \tau_{33} - \tau_3^2 - \Delta_2' \tau \, , \end{cases}$$

*gli indici i e k potendo in queste formule assumere i valori* 1 *e* 2.

Giova rilevare subito che, essendo i coefficienti della forma reciproca alla (5)

$$a^{\star(ik)} = e^{-2\tau} a^{(ik)} \quad (i, k = 1, 2) \quad ; \quad a^{\star(i3)} = 0 \quad ; \quad a^{\star(33)} = e^{-2\tau} ,$$

dove le $a^{(ik)}$ spettano (quali elementi reciproci) al $d\sigma^2$ binario, le (8′) dànno la curvatura media $\mathfrak{M}$ del $dl^2$ spaziale sotto la forma

$$(11) \qquad \mathfrak{M} = \sum_1^3{}_{ik} a^{\star(ik)} \alpha_{ik} = e^{-2\tau} \{ K - 2(\Delta_2' \tau - \Delta' \tau) - 3\Delta' \tau \} .$$

### 7. — Riduzione delle equazioni gravitazionali.

Introduciamo le espressioni (7′) e (8′) nelle

$$(\mathrm{II}) \qquad \alpha_{ik} + \frac{V_{ik}}{V} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3),$$

che, assieme alla

$$(\mathrm{I}) \qquad \mathfrak{M} = 0 ,$$

costituiscono il sistema da integrare. Si hanno in conformità i tre gruppi

$$(\mathrm{II}_a) \qquad 2(\tau_{ik} - \tau_i \tau_k) + 2 a_{ik} e^{\tau} J = 0 \qquad (i, k = 1, 2),$$

$$(\mathrm{II}_b) \qquad 2(\tau_{i3} - \tau_i \tau_3) = 0 ,$$

$$(\mathrm{II}_c) \qquad K + 2(\tau_{33} - \tau_3^2) + \zeta'' + \zeta'^2 + 2 e^{\tau} J = 0 ,$$

dove J è determinato dalla posizione

$$(12) \qquad 2 e^{\tau} J = - \Delta_2' \tau + \Delta'(\tau, \tau + \zeta) .$$

Dacchè si ha identicamente (per $i, k = 1, 2, 3$)

$$(13) \qquad \frac{\partial e^{-\tau}}{\partial x_i} = - e^{-\tau} \tau_i \quad , \quad (e^{-\tau})_{ik} = - e^{-\tau} (\tau_{ik} - \tau_i \tau_k) ,$$

le $(\mathrm{II}_b)$ equivalgono a

$$\frac{\partial^2 e^{-\tau}}{\partial x_i \, \partial x_3} = 0 \qquad (i = 1, 2),$$

che si integrano a vista e porgono

$$(14) \qquad e^{-\tau} = \xi(x_1, x_2) + \eta(x_3),$$

$\xi$ ed $\eta$ dipendendo esclusivamente dagli argomenti indicati.

Con ciò, ove si tenga conto che i parametri differenziali accentati si riferiscono alla forma $dl'^2 = d\sigma^2 + dx_3^2$ e quelli non accentati al $d\sigma^2$ binario, si ha tosto dalle (13) e dalla definizione (sotto una forma qualsiasi) dei parametri suaccennati:

$$(15) \quad \begin{cases} e^{-2\tau} \Delta' \tau = \Delta' e^{-\tau} = \Delta \xi + \eta'^2, \\ e^{-2\tau} \nabla'(\tau, \tau + \zeta) = e^{-2\tau}(\Delta'\tau + \tau_3 \zeta') = \Delta\xi + \eta'^2 - \eta'\zeta' e^{-\tau}, \\ e^{-\tau}(\Delta_2' \tau - \Delta'\tau) = -\Delta_2' e^{-\tau} = -\Delta_2 \xi - \eta''. \end{cases}$$

La (12) può così essere scritta

$$(12') \qquad 2\,\mathrm{J} = e^{-\tau}(-\Delta_2'\tau + \Delta'\tau + \tau_3\zeta') = \Delta_2\xi + (\eta'' - \eta'\zeta'),$$

mentre le $(\mathrm{II}_a)$, moltiplicando per $-\frac{1}{2} e^{-\tau}$, divengono

$$\xi_{ik} - a_{ik}\mathrm{J} = 0 \qquad (i, k = 1, 2).$$

Di qua si trae in primo luogo, moltiplicando per $a^{(ik)}$ e sommando,

$$(12'') \qquad \Delta_2 \xi - 2\,\mathrm{J} = 0.$$

Il confronto colla (12') porge quindi

$$(16) \qquad \eta'' - \eta'\zeta' = 0;$$

inoltre, col valore (12'') di J, risultano le equazioni (di secondo ordine)

$$(17) \qquad \xi_{ik} - \tfrac{1}{2}\Delta_2\xi \, a_{ik} = 0 \qquad (i, k = 1, 2),$$

di cui è manifesto il carattere invariante di fronte al $d\sigma^2$ binario.

*Le* (16) *e* (17) (nella prima delle quali intervengono unicamente funzioni di $x_3$, mentre nelle altre c'è dipendenza esclusiva da $x_1, x_2$) *prendono il posto delle* $(\mathrm{II}_a)$. *La* (14) (che è addirittura in termini finiti) *sostituisce opportunamente le* $(\mathrm{II}_b)$.

Resta da tener conto delle $(\mathrm{II}_c)$ e (I), mettendovi in evidenza $\mathrm{K}, \xi, \eta, \zeta$. La $(\mathrm{II}_c)$ moltiplicata per $e^{-\tau}$, in base alle (13), (14) e (12''), si scrive

$$(18) \qquad (\mathrm{K} + \zeta'' + \zeta'^2)\, e^{-\tau} - 2\eta'' + \Delta_2\xi = 0.$$

Quanto alla (I), badando alla espressione (11) di $\mathfrak{M}$, le (15) le attribuiscono l'aspetto

$$(19)\qquad K e^{-2\tau} + 2(\Delta_2 \xi + \eta'') e^{-\tau} - 3(\Delta \xi + \eta'^2) = 0 .$$

*Ecco l'ultima equazione da ritenere per formarne sistema colle* (14), (16), (17), (18).

### 8. — Espressione delle curvature principali. Verificazione di appartenenza al tipo B).

Riservo alle prossime Note l'integrazione del sistema così specificato, e termino preparandomi le curvature principali dei $dl^2$ soddisfacenti al sistema stesso. Se ne desume tra altro che essi rientrano necessariamente nel tipo $B_2$), sicchè il nostro procedimento dà tutte e sole le soluzioni di questo tipo.

Per caratterizzare le curvature principali, basta naturalmente (come già a § 4 della Nota precedente) ricorrere all'equazione di terzo grado, che complessivamente le definisce,

$$\| \alpha_{ik} - \omega\, a_{ik} \| = 0 :$$

ben si intende che $a_{ik}$ e $\alpha_{ik}$ vanno ora riferite alla metrica (5).

Dacchè, in virtù delle (8′) e ($II_b$), le $\alpha_{i3}$ $(i = 1, 2)$ si annullano, e così pure [attesa l'espressione (5) del $dl^2$] le $a_{i3}$, mentre $a_{33} = e^{2\tau}$, si presenta nel primo membro della precedente equazione il fattore $\alpha_{33} - \omega e^{2\tau}$, determinandosi così la radice

$$\omega = e^{-2\tau} \alpha_{33} ,$$

la quale corrisponde evidentemente alle giaciture $x_3 = \text{cost}$.

L'espressione (8′) di $\alpha_{33}$, tenendo conto delle (13), (14) e (15), attribuisce ad $\omega$ la seguente forma esplicita

$$(20)\qquad \omega = K e^{-2\tau} + \Delta_2 \xi\, e^{-\tau} - (\Delta \xi + \eta'^2) .$$

D'altra parte, per $i, k = 1, 2$, le (8′), in virtù delle (14), (15) e (17), dànno

$$\alpha_{ik} = - e^{\tau} \xi_{ik} - a_{ik} \Delta_2' \tau = - \left(\tfrac{1}{2} \Delta_2 \xi \cdot e^{\tau} + \Delta_2' \tau\right) a_{ik} \qquad (i, k = 1, 2) .$$

C'è dunque proporzionalità fra le $\alpha_{ik}$ e le $a_{ik}$, e perciò le due ulteriori radici $\omega_1$ e $\omega_2$ della precedente equazione cubica sono eguali tra loro. Siccome la somma $\mathfrak{M} = \omega_1 + \omega_2 + \omega$ si annulla, si ha senz'altro

$$\omega_1 = \omega_2 = - \tfrac{1}{2} \omega ,$$

rimanendo così accertato il comportamento delle curvature, che contraddistingue il sottocaso $B_2$).

**Astronomia.** — *Sul prevalente addensamento degli afelî delle orbite cometarie intorno all'antiapice.* Nota del prof. P. BURGATTI, presentata dal Corrisp. A. DI LEGGE [1].

Il chiar. prof. Armellini in un bell'articolo « *Le comete e il calcolo delle probabilità* » [1] ha preso in esame il problema dell'origine delle comete; e, discutendolo ampiamente dal lato matematico e meccanico con la scorta delle ricerche antiche e moderne, è giunto alla conclusione che l'astronomia matematica non offre ragioni sufficienti per una sicura scelta fra la *teoria solare* e la *teoria stellare particolare*; le sole che possano contendersi il campo. Quest'ultima, ch'io proposi nel 1915 [2], offre nondimeno il vantaggio sull'altra di dar più facile ragione del fenomeno dell'addensamento degli afelî intorno all'antiapice, conformemente a quanto l'osservazione sembra indicare. A questo proposito il prof. Armellini ha dimostrato non potersi accettare l'ipotesi d'un « vento etereo » proposta dal Pickering; onde al presente non esiste alcuna spiegazione puramente meccanica di quel singolare fenomeno. In questa Nota io ne propongo una basata sopra certe considerazioni, che possono acquistare anche per sè sole una qualche importanza. Tale spiegazione è indipendente da qualunque ipotesi sull'origine delle comete; e però, confacendosi a tutte e due le teorie di sopra citate, non costituisce un mezzo per vagliarle; talchè rimane intatta per ora la menzionata conclusione dell'Armellini.

Nell'ordinaria meccanica celeste, che studia il movimento dei còrpi costituenti il sistema solare, si trascura senz'altro l'attrazione delle stelle, giudicandola insensibile a cagione della loro enorme distanza. A questo si può obbiettare che il numero delle stelle è anche straordinariamente grande, oltre che moltissima altra materia oscura è sparsa ovunque nell'universo; per modo che il numero potrebbe, per così dire, compensare la piccolezza delle singole attrazioni e dare una risultante piccola sì, ma non del tutto trascurabile. Come scoprire l'esistenza di tale forza? Si ammette, in seguito alle moderne ricerche astronomiche, che il Sole, come tutte le stelle, descriva nello spazio una immensa orbita a spirale. Se ciò è, e pare non potersi ormai porre in dubbio, l'esistenza di quella forza risulta palese, non potendo accadere un moto curvilineo senza l'azione d'una forza. Ma una forza della stessa natura agirà pure sopra un pianeta. Indicando con **F**

[1] Pervenuta all'Accademia il 22 ottobre 1917.

[2] Scientia, vol. XXII, 1917. Ed, Zanichelli, Bologna.

[3] Acc. Scienze di Bologna: *Osservazioni sull'origine delle comete*, 1915.

(vettore) la forza agente sull'unità di massa situata nel centro del Sole, con $\mathbf{F}_1$ quella relativa alla stessa unità, ma situata in un pianeta, è visibile che, per l'estrema vicinanza del pianeta al Sole in paragone alle distanze stellari, le $\mathbf{F}$ e $\mathbf{F}_1$ differiranno di tanto poco, che le perturbazioni da esse prodotte nei riguardi del moto del pianeta rispetto al Sole saranno *ultra-secolari*; e però, se pure avranno contribuito per un passato di migliaia di secoli a dare al sistema solare l'assetto presente, non possono essere poste in rilievo attraverso la breve storia astronomica che noi conosciamo. È dunque giustificato il loro abbandono tanto nello studio dei moti interni del sistema solare quali apparirono all'uomo nei pochi secoli di sua civiltà, quanto nelle previsioni degli stessi moti per parecchi altri secoli ancora. Ma per le comete si può affermare altrettanto? Se la cometa proviene dagli spazî interstellari; o se, pur appartenendo al sistema solare, ha lunghissimo periodo; quando essa si trova verso gli estremi confini della sfera d'azione del Sole, la sua distanza da noi è grandissima e tale permane per lungo tempo; perciò la $\mathbf{F}_1$ ad essa relativa potrà differire dalla $\mathbf{F}$, tanto in grandezza quanto in direzione, di quantità non del tutto trascurabile.

Indichiamo con $\mathbf{f}$ la forza con cui il Sole in S attrae la cometa in C, e con M e $m$ le loro masse rispettivamente. Le equazioni del moto assoluto saranno

$$\mathrm{M}\frac{d^2\mathrm{S}}{dt^2} = \mathbf{f} + \mathrm{M}\mathbf{F}$$

$$m\frac{d^2\mathrm{C}}{dt^2} = -\mathbf{f} + m\mathbf{F}_1 ;$$

dalle quali si trae

$$\frac{\mathrm{M}m}{\mathrm{M}+m}\,\frac{d^2(\mathrm{C}-\mathrm{S})}{dt^2} = \mathbf{f} - \frac{\mathrm{M}m}{\mathrm{M}+m}(\mathbf{F}-\mathbf{F}_1) .$$

Questa è l'equazione del moto di C rispetto ad S, equivalente al moto di una massa $\mathrm{M}m:(\mathrm{M}-m)$ attratta da un centro con la forza $\mathbf{f}$ e sollecitata da un'altra forza

$$\frac{\mathrm{M}m}{\mathrm{M}+m}(\mathbf{F}-\mathbf{F}_1) .$$

Ora si può fare l'ipotesi semplificatrice che quest'ultima forza non varii in grandezza e direzione lungo un certo tratto dell'orbita cometaria molto lontano dal Sole; perchè, pur potendo quel tratto essere di lunghezza considerevole, sarà sempre piccolo appetto alle distanze delle stelle dalla cometa e dal Sole. Con ciò il moto della cometa lungo il tratto in discorso (rispetto al Sole) sarà definito dall'equazione

$$\frac{\mathrm{M}m}{\mathrm{M}+m}\,\frac{d^2(\mathrm{C}-\mathrm{S})}{dt^2} = \mathbf{f} - \frac{\mathrm{M}m}{\mathrm{M}+m}\mathbf{a} , \tag{1}$$

ove $\mathbf{a}$ è un vettore costante.

Si potrà poi pensare tutta l'orbita divisa opportunamente in tanti tratti; per modo che **a**, pur variando da tratto a tratto e convergendo rapidamente a zero passando dall'afelio (reale o ipotetico) al perielio, resti approssimativamente costante lungo ciascun tratto. Allora il ragionamento che si fa per un tratto, vale per tutti gli altri. Questo artifizio, oltrechè essere suggerito dalla ragione sopra detta, è imposto dalla nostra ignoranza circa la legge di variazione della forza **F**.

La (1) definisce il moto d'una massa $Mm:(M+m)$ attratta da un centro S con la legge di Newton e sollecitata da una forza di grandezza e direzione costante. Orbene, il prof. Armellini in una bella ricerca « *Sopra un'ipotesi del Pickering relativa alla frequenza degli afeli delle orbite cometarie nelle vicinanze dell'antiapice* » (1) si è trovato a dover discutere quella medesima equazione, onde determinare l'effetto che potrebbe avere sulle comete la resistenza offerta dall'etere al moto traslatorio di tutto il sistema solare attraverso lo spazio. Egli ha concluso (e qui sarebbe inutile ripetere i suoi calcoli) che tale resistenza, equivalente in ultima analisi all'azione d'una forza costante $-\varrho \mathbf{v}$ agente sulla cometa insieme all'attrazione solare, avrebbe per effetto di addensare gli afelî delle orbite cometarie — di quelle almeno che si sviluppano in piani passanti per la linea degli apici — di addensarli, dico, non già intorno all'antiapice, come supponeva il Pickering, bensì lungo un cerchio massimo avente per poli l'apice e l'antiapice; ossia normale a **v** (cosa appunto che sembra contraria alla realtà). Nel caso presente, dunque, *gli afelî delle orbite cometarie situate in piani passanti per* **a**, *e assai prossimi a quelli, tenderanno ad addensarsi verso un piano* (P) *normale ad* **a**.

Se è vera l'osservazione degli addensamenti degli afelî lungo la linea degli apici (che è la direzione dell'attuale movimento del Sole); per poter attribuire il fenomeno all'azione delle stelle. bisognerebbe anzitutto, dopo quanto si è detto, che il piano (P) passasse per la tangente alla traiettoria del Sole; ossia, che il vettore **a**, applicato in S, giacesse nel piano normale alla detta traiettoria; o, per lo meno, che la componente tangenziale di **a** fosse piccolissima rispetto alla componente normale (2). Essendo $\mathbf{a} = \mathbf{F} - \mathbf{F}_1$, dovrebbero essere o piccolissime separatamente le componenti tangenziali di **F** e $\mathbf{F}_1$, oppure piccolissima la loro differenza. Posto che una intera spira dell'orbita solare sia quasi circolare (come quasi circolari sono le orbite dei pianeti rispetto al Sole), la componente tangenziale di **F** è certamente piccolissima; e tale pure sarebbe quella di $\mathbf{F}_1$, perchè un altro Sole situato nel luogo della cometa dovrebbe descrivere, per l'azione delle

(1) Rend. Acc. Lincei, 1916, pag. 622.

(2) E se ciò accade in un momento, accadrà pure per lunghissimo tempo, data la immensa ampiezza dell'orbita solare.

stelle, una spira simile a quella del Sole vero (con condizioni iniziali pochissimo diverse). Orbene, l'ipotesi di un'orbita solare quasi circolare (s'intende una spira) essendo plausibilissima, si vede come l'addensamento degli afelî di certe orbite cometarie verso un piano passante per la linea degli apici acquisti una notevole probabilità; in contrapposto all'ipotesi del Pickering, la quale, oltre che essere poco plausibile in se stessa per varie ragioni, condurrebbe invece, applicata alle comete, ad un addensamento in un piano normale a quello. In conclusione, *nell'ipotesi della quasi rotondità dell'orbita solare o di un suo grandissimo arco, l'azione delle stelle durante il soggiorno delle comete a grande distanza dal Sole avrebbe per effetto di avvicinare gli afelii delle loro orbite a un piano passante per la linea degli apici e normale al piano dell'orbita solare* (questo vuol dire che in massima una cometa apparirebbe a noi, quando s'approssima al perielio, come proveniente da una regione non molto discosta dal detto piano).

Ammesso ciò, come si potrebbe spiegare l'ulteriore addensamento intorno alla linea degli apici? Manifestamente con l'ipotesi che i piani delle orbite cometarie passassero in prevalenza per la linea degli apici, che diverrebbe così l'intersezione di questi piani col piano (P). Ma, poichè le nostre considerazioni riguardano le orbite contenute in piani passanti per **a**, occorrerà ammettere infine che tali comete si muovino nel piano stesso dell'orbita solare o in piani poco discosti da quello. Allora la conclusione diventa questa: *nell'ipotesi plausibilissima della quasi rotondità dell'orbita solare o d'un suo grand'arco, l'azione delle stelle avrebbe per effetto di addensare intorno alla linea degli apici gli afelii di quelle orbite cometarie che si sviluppano nel piano stesso dell'orbita solare, o in piani poco discosti da quello.*

Perchè questa legge assuma un valore meno particolare, basta ritenere che la maggior parte delle comete (o almeno di quelle visibili) si muovino effettivamente in piani assai prossimi al piano dell'orbita solare; il che non reca difficoltà di sorta, e può armonizzare pienamente tanto con la teoria solare dell'origine delle comete, quanto con la teoria stellare particolare.

In ogni modo resta provato che la plausibilissima ipotesi della quasi rotondità di una spira dell'orbita solare reca un mutamento nell'apparente direzione della linea degli apsidi delle orbite cometarie.

## Astronomia pratica. — *Coordinate della stella « Nova Aquilae 3 »*. Nota di B. Viaro, presentata dal Socio A. Abetti [1].

1. Nel corso di quest'anno mi trovai nella necessità di alternare il mio soggiorno tra Padova e Firenze [2], cosicchè ebbi occasione di frequentare spesso l'Osservatorio di Arcetri. Ultimamente ho accolto con lieto animo la proposta fattami dal prof. A. Abetti, Direttore dell'Osservatorio, di fare alcune osservazioni della Nova Aquilae [3] al Piccolo Meridiano di Bamberg, strumento a me ben noto per l'uso continuo che ne feci durante tre lustri. Queste osservazioni oltre che dare le coordinate della Nova ricavate da me al Meridiano dovevano offrire un termine di confronto per le coordinate ricavate da lui all'Equatoriale di Amici.

2. I risultati da me ottenuti al Piccolo Meridiano in quattro sere con sereno eccezionale, essendo la Nova circa di 5ª grandezza, sono riportati nel quadro seguente:

| 1918 | Cerchio | α app. | Rid. 1918.0 | δ app. | Rid. 1918.0 | α 1918.0 | δ 1918.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | h m s | s | ° ′ ″ | ″ | h m s | ° ′ ″ |
| Settembre 6 | Ovest | 18 44 47.293 | — 3.768 | +0 29 44.64 | — 13.31 | 18 44 43.525 | +0 29 31.33 |
| 7 | Est | 47.342 | — 3.753 | 44.77 | — 13.35 | 43.589 | 31.42 |
| 10 | Ovest | 47.239 | — 3.707 | 45.90 | — 13.50 | 43.532 | 32.40 |
| 11 | Est | 47.244 | — 3.692 | 43.85 | — 13.53 | 43.552 | 30.32 |
| Medî: Epoca 1918.69 . . . . . . . . . . | | | | | | 18 44 43.550 | +0 29 31.37 |

Le stelle fondamentali osservate in ciascuna sera furono sei, cinque equatoriali ed una boreale; e le posizioni adottate per esse allo scopo di ottenere gli elementi di riduzione furono desunte dall'American Nautical Almanac 1918 e si appoggiano al sistema di Newcomb. Volendo riferire la posizione ricavata per la Nova al sistema delle effemeridi di Berlino, bisogna applicare ai valori ottenuti le riduzioni seguenti [4] BJ — ANA =

[1] Pervenuta all'Accademia il 18 ottobre 1918.

[2] Il prof. B. Viaro già astronomo in Arcetri, lo è ora presso l'Osservatorio di Padova, dove i principali strumenti furono smontati, incassati e posti al sicuro da possibili ingiurie degli areoplani nemici. — A. Abetti.

[3] La Nova Aquilae fu vista splendere improvvisamente come le stelle più grandi del cielo, [α Lyrae] in America ed in Europa, l'8 dello scorso giugno.

[4] Queste riduzioni sono le medie aritmetiche delle differenze fra i valori delle coordinate delle fondamentali, utilizzate, dedotte dal B.J. e dall' A.N.A.

$-0^s.002 - 0''.39$. Ciò facendo e trasportandoci all'equinozio 1900, avremo:

| $\alpha$ 1900 | Praec. | Var. saec. | $\delta$ 1900 | Praec. | Var. saec. |
|---|---|---|---|---|---|
| $18^h\ 43^m\ 48^s.44$ | $+3^s.0615$ | $-0^s.0005$ | $+0^\circ\ 28'\ 21''.7$ | $+3''.809$ | $+0''.437$ |

Nella « Carte Photographique du Ciel, $+1^\circ$ N. 141, Observatoire d'Alger », eseguita il 20 agosto 1909, trovasi, in corrispondenza a questa posizione, una stella di 9ª grandezza. Inoltre, dal vol. V del Catalogo fotografico dello stesso Osservatorio, abbiamo:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Cliché 1003 | ⋆ 106 | Gr. 8.8 | $\alpha\ 1900 = 18^h 43^m 48^s.41$ | $\delta\ 1900 = +0^\circ 28' 20''.8$ | Ep. 1892.61 |
| » 341 | ⋆ 4 | » 8.8 | $48^s.37$ | $20''.6$ | » 1895.48 |
| | | Medî: | $\alpha\ 1900 = 18^h 43^m 48^s.39$ | $\delta\ 1900 = +0^\circ 28' 20''.7$ | » 1894.05 |

Ma, siccome le posizioni delle stelle di riferimento per il vol. V, *Alg. ph.*, sono state prese dai cataloghi A. G. Nicolajew ed A. G. Albany [1], per riferire le coordinate ottenute fotograficamente al sistema del B. J. applicheremo ad esse le riduzioni di Auwers [2] $BJ - AG = +0^s.02 + 0''.6$ ed otterremo

$$\alpha\ 1900 = 18^h\ 43^m\ 48^s.41 \qquad \delta\ 1900 = +0^\circ\ 28'\ 21''.3$$

Confrontando questo risultato con quello di Arcetri si ricava

$$Arc - Alg = +0^s.03 + 0''.4$$

Ed essendo la differenza delle epoche $22^a.64$ si vede che le coordinate ottenute per due vie tanto diverse, ad un intervallo di $^1/_4$ di secolo, differiscono di quantità che sono dell'ordine degli errori d'osservazione, cosicchè si può concludere che tanto in $\alpha$ quanto in $\delta$ la Nova non ha moto proprio sensibile.

3. Il prof. A. Abetti osservò la Nova all'Equatoriale di Amici in due sere del giugno, il 13 ed il 15, ed in altre due del settembre, il 3 ed il 16, prima e dopo le mie osservazioni meridiane ed il 16, per suo desiderio, l'osservazione all'Equatoriale fu da me ripetuta. Fra le stelle circostanti alla Nova, il professore scelse per il confronto le tre seguenti:

$$\star\, a = BD + 0^\circ\, 4023\ \ 8^m.5 \quad , \quad \star\, c = BD + 0^\circ\, 4027\ \ 6^m.5\ ,$$

$$\star\, d = BD + 0^\circ\, 4028\ \ 9^m.0$$

da lui indicate con lettere nel suo schizzo della regione della Nova lucidato dall'atlante BD. Le stelle $a$ e $d$ di 9ª grandezza, si trovano quasi

[1] Cfr. *Alg. ph.*, Tome V, Préambule, pag. VI.

[2] A. Auwers, *Tafeln sur Reduction von Sterncatalogen auf das System des Berliner Jahrbuchs*. Astronomische Abhandl. als Ergänzungshefte zu den Astronomischen Nachrichten, Nr. 7. Kiel, 1904, pag. 46.

sul parallelo della Nova, presso a poco 3′ australi, l'una precedente $14^s$, l'altra seguente $61^s$; invece la $c$ di 6ª grandezza, è notevolmente distante in declinazione, più boreale di 15′, che è quasi tutto il campo dell'Amici, e segue $43^s$.

Applicando le differenze $\Delta\alpha$ $\Delta\delta$ osservate nelle quattro sere, alle coordinate delle tre stelle dedotte dai Cataloghi di Abbadia [1], si ebbero i seguenti risultati:

*Coordinate di Nova Aquilae concluse all'Equatoriale di Amici dal prof. A. A.*

| * | $\alpha$ 1918 | $\delta$ 1918 |
|---|---|---|
| $a$ | $18^h\,44^m\,43^s.21 \pm 0^s.03$ | $+0°\,29'\,29''.2 \pm 0''.5$ |
| $c$ | $43.50 \pm 0.02$ | $29.1 \pm 0.6$ |
| $d$ | $43.30 \pm 0.05$ | $29.9 \pm 0.8$ |

Qui vediamo che le due asc. rette fornite dalle stelle $a$ e $d$ concordano sufficientemente tra loro, mentre l'una e l'altra e il loro medio $\frac{1}{2}(a+d) = 18^h\,44^m\,43^s.25$, presentano col risultato $c$ una differenxa troppo grande per essere spiegata cogli errori d'osservazione. Questo fatto fu avvertito dal prof. A. A. non appena egli ebbe calcolate le coordinate della Nova mediante le posizioni delle tre stelle di confronto dedotte dal catalogo di A. G. Nicolajew [2] e dopo l'impiego delle posizioni di Abbadia, non si potè più ascriverne la causa ad eventuale moto proprio della copia $a\,d$ o della stella $c$.

La mia osservazione all'Equatoriale, eseguita, come fu detto, il 16 settembre, diede i risultati seguenti:

(1) Le osservazioni delle stelle suddette, ritrovate nei volumi dell'Osservatorio di Abbadia dal VI (1906) all'XI (1911), furono nove per * $a$ (Ep. 1909.31), dodici per * $c$ in $\alpha$ e undici in $\delta$ (Ep. 1909.55-09.36) ed otto per * $d$ (Ep. 1909.25).

(2) La differenza fra le coordinate delle tre stelle di confronto, dedotte da Abbadia e da Nicolajew, nel senso Abb.-Nic., sono le seguenti:

| * | $\Delta\alpha$ | $\Delta\delta$ | $\Delta$ Ep. |
|---|---|---|---|
| $a$ | $+0^s.01$ | $-0''.5$ | $28^a.1$ |
| $c$ | $-0.06$ | $-1.1$ | $31.8$ |
| $d$ | $+0\,09$ | $-1.1$ | $32.7$ |

*Coordinate di Nova Aquilae concluse all'Equatoriale di Amici da B. V.*

| ⋆ | α 1918 | δ 1918 |
|---|---|---|
| a | $18^h\,44^m\,43^s.21$ | $+\,0^\circ\,29'\,30''.1$ |
| c | 43.48 | 29.9 |
| d | 43.33 | 30.8 |

che confermarono pienamente i risultati ottenuti all' Equatoriale dal prof. A. A.

4. L'asc. retta della Nova, ricavata dalle osservazioni meridiane, concorda con l'asc. retta extrameridiana $c$, anzichè con quella data da $\frac{1}{2}(a+d)$. Ora riflettendo alle differenti grandezze delle stelle osservate, si è dovuto convenire di trovarsi di fronte ad una prova certa del fenomeno messo in evidenza da Pihl [1] e trattato dal prof. A. A. nel Fasc. 3 delle pubblicazioni di Arcetri discutendo intorno ai $\Delta\alpha$ dedotti dalle osservazioni ai fili ed ai labbri delle lamine. Il detto fenomeno ha luogo nelle osservazioni con l'impiego di micrometri a lamine quando fra i due astri confrontati vi sia *rimarchevole differenza* di grandezza, ed è riferito dal prof. A. A. nel Fasc. cit., pag. 2, come segue: « .... la differenza $\Delta$ fra le due sparizioni « dei due astri confrontati, è maggiore o minore della differenza delle due « riapparizioni, non per causa accidentale, ma perchè la riapparizione del« l'astro minore (precedente o seguente), a motivo di un fatto fisiologico, è « sempre ritardata di una certa quantità $r$ detta da Pihl *retardation or* « *detention* ».

All'epoca delle nostre osservazioni vi era una differenza di grandezza di circa quattro unità fra la Nova e le stelle $a$ e $d$, mentre fra la Nova e la $c$ vi era pressochè l'eguaglianza; quindi il risultato extrameridiano $\frac{1}{2}(a+d)$ deve esser corretto del relativo errore $\frac{1}{2}r$, dovuto alla *detention.* E poichè ⋆ $a$ precede la Nova e ⋆ $d$ la segue, le corrispondenti $\Delta\alpha_a$ e $\Delta\alpha_d$ dovevano risultare la prima minore e l'altra maggiore del dovere, cosicchè entrambe le $\alpha_N$ risultanti, cioè

$$\alpha_a + \Delta\alpha_a = \alpha_N \qquad \alpha_d - \Delta\alpha_d = \alpha_N$$

dovevano riuscire troppo piccole. Se noi ricaviamo la correzione $\frac{1}{2}r$ per le due stelle dalla tavola di Pihl [2] abbiamo:

$$\tfrac{1}{2}r_a = 0^s.15 \quad \tfrac{1}{2}r_d = 0^s.20 \quad \text{e quindi in media} \quad \tfrac{1}{2}r = 0^s.18$$

[1] Nella Memoria: *On occulting Micrometers and their value as applied to exact astronomical measurements,* by O. A. L. Pihl. Christiania, 1893.

[2] Memoria cit., pag. 11.

tenendo conto di questa correzione ed inoltre riunendo qui sotto tutti i risultati, abbiamo:

| ★ | α 1918 | | | | δ 1918 | | | | Epoca |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *Nova Aquilae all'Equatoriale.* | | | | | | | | |
| ½ (a + d) | 18h 44m 43s.45 | V | 43s.43 | A | + 0° 29′ 30″.5 | V | 29″.6 | A | 1918.6 |
| c | 43.48 | V | 43.50 | A | 29.9 | V | 29.1 | A | |
| | *Nova Aquilae al Meridiano.* | | | | | | | | |
| | 18 44 43.55 | V | — | — | + 0 29 31.4 | V | — | — | 1918.7 |

E. M.

## Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. V. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti. Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I-XXVII. (1892-1918). Fasc. 7°-8°, Sem. 2°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I-XXVII. (1892-1918). Fasc. 3°-4°.
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XII. Fasc. 13.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII. Vol. XIV. Vol. XV. Fasc. 1-7.

## CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI
DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia è di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

P. Maglione & C. Strini (successori di E. Loescher & C.) — *Roma.*

# INDICE

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

*pervenute all'Accademia durante le ferie del 1918.*



**E. Mancini** *Segretario d'ufficio responsabile.*

Pubblicazione bimensile. N. 9-10.

# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

---

SERIE QUINTA

---

# RENDICONTI

---

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

---

*Sedute del* 3 *e del* 17 *novembre* 1918.

**Volume XXVII.° — Fascicoli 9°-10°**

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

# ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

## PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

---

### I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 9 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a pagine 4 ½.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 30 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

### II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta a stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta, pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 50 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 30 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

# DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

## Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 3 novembre 1918.*

F. D'Ovidio, Presidente.

In assenza del Vicepresidente prof. Ròiti, indisposto, assume la presidenza della seduta, come stabilisce lo Statuto, l'anziano dei Soci presenti sen. Paternò. Questi, poichè si tratta della prima seduta, e date anche le attuali circostanze, invita il Presidente dell'Accademia sen. prof. Francesco D'Ovidio, ad assumere lui la presidenza della seduta.

Il sen. D'Ovidio ringrazia il collega Paternò dell' invito cortese; assunta la presidenza, legge una nobile lettera del Vicepresidente Ròiti, al quale invia cordialissimi auguri di pronta guarigione, e aggiunge patriottiche parole circa i mirabili eventi di questi giorni per l'avvenire della patria. Dà poi comunicazione della seguente lettera colla quale il Presidente degli Stati Uniti W. Wilson ringrazia molto cordialmente l'Accademia della sua nomina a Socio straniero; e il sen. D'Ovidio si compiace che sia stato un uomo di studio ad avere oggi tanta e così gloriosa parte sui destini del mondo.

« *Mio caro Signore*,

« Mi sia concesso dirvi che ho ricevuto e vivamente apprezzato la vostra amorevole lettera del 17 giugno, che mi annunzia il grande onore che la Reale Accademia dei Lincei mi ha fatto eleggendomi a suo Socio nella Categoria delle Scienze Sociali nella Classe di Scienze Morali, Filologiche e Storiche. Io mi sento profondamente onorato che l' insigne Sodalizio, per parte del quale voi mi scrivete, abbia conferito a me questa distinzione. È una distinzione che considererò sempre come una delle più lusinghiere che io abbia ricevute. Io la estimo non solo come una generosissima, se-

pur non meritata, attestazione di sentimenti dell'Accademia verso di me, ma anche, ciò che accresce la mia compiacenza, vi ravviso il desiderio che l'Accademia ha avuto di esprimere l'intimo sentimento di amicizia che di giorno in giorno felicemente si rafforza tra il popolo italiano e quello degli Stati Uniti. Posso io pregarvi che vogliate comunicare ai vostri confratelli, che or sono anche i miei, l'espressione della mia gratitudine e del mio profondo compiacimento? Sono cordialmente e sinceramente vostro

« WOODROW WILSON ».

La lettera del Presidente WILSON è accolta dai vivissimi ed unanimi applausi dei Soci presenti.

## MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI.

### Meccanica. — *$ds^2$ einsteiniani in campi newtoniani.* V. *Il sottocaso* $B_2$): *Soluzioni longitudinali* ($\xi = 0$). Nota del Socio TULLIO LEVI-CIVITA.

Abbiamo stabilito nella Nota precedente [1] il sistema differenziale ridotto, da cui (in base ai criterî generali di trasformazione e di abbassamento esposti nella Nota III) [2] può farsi dipendere il sottocaso $B_2$). L'integrazione va effettuata con criterî diversi, secondochè una delle funzioni incognite, $\xi(x_1, x_2)$, si riduce o no ad una costante. Qui si contempla la prima ipotesi, in cui, come si osserva a § 1, è lecito porre addirittura $\xi = 0$.

Si è così condotti (§ 2) ad una prima categoria di $ds^2 = V^2 dt^2 - dl^2$, che includono quelli (di Einstein-Schwarzschild) provocati da masse (materiali) simmetricamente distribuite attorno ad un centro. Al $dl^2$ può essere attribuita la forma

$$dl^2 = \frac{1}{\eta^2} \left\{ d\sigma^2 + \frac{d\eta^2}{K_0 \eta^2(\mu - \varepsilon\eta)} \right\},$$

essendo $K_0$ una costante essenzialmente positiva, $\mu$ una seconda costante, $\varepsilon = \pm 1$, e $d\sigma$ un elemento lineare binario (indipendente da $\eta$) a curvatura gaussiana costante $K_0 \mu$. Il § 3 contiene lo studio intrinseco di una tale metrica e del relativo campo di forza. Questo deriva in generale dal potenziale statico $-\frac{1}{2} V^2$. Nel caso presente $V^2$ risulta lineare in $\eta$ (a coefficienti costanti), e le linee di forza coincidono sia colle linee di pendenza

[1] In questo volume di Rendiconti, pp. 205-214.

[2] Ibidem, pp. 183-191.

che colle linee assiali di curvatura principale (definite a § 1 della Nota prec.). Perciò la distorsione dello spazio è, in tutti i sensi, longitudinale rispetto alla forza che la determina, e *longitudinali* possono opportunamente qualificarsi le soluzioni corrispondenti del sistema differenziale ricordato da principio. Esse contengono tre costanti, ma sono $\infty^1$ intrinsecamente distinte, perchè due delle tre costanti sono di pura omogeneità, stanno cioè a rispecchiare indeterminazione delle unità di lunghezza e di tempo.

Per caratterizzare l'influenza di una massa puntiforme (o più in generale stratificata per sfere concentriche), basta supporre $\mu$ positiva ed $\varepsilon = 1$. Ponendo

$$R = \frac{1}{\sqrt{K_0 \eta}} \quad , \quad \alpha = \frac{\varepsilon}{\sqrt{K_0}\, \mu^{3/2}} ,$$

si ritrova la forma canonica di Schwarzschild. Ma anche per $\mu < 0$ (purchè soltanto risulti positivo il $dl^2$, il che richiede $\mu - \varepsilon\eta > 0$), si hanno soluzioni reali, soddisfacenti a tutte le volute condizioni. In tali soluzioni, quando si introduce l'ipotesi addizionale che siano quantitativamente piccolissime le divergenze dalla geometria di Euclide e dalla meccanica di Newton, le superficie equipotenziali tendono a confondersi con piani paralleli (§ 5). Così, oltre alla soluzione elementare $B_3$) della Nota II [1] (in cui lo spazio resta rigorosamente euclideo e le superficie equipotenziali, pur rigorosamente, piani paralleli), si riconosce l'esistenza di altre soluzioni esatte (dipendenti da un parametro), le quali presentano più complessa natura geometrica e meccanica, ma convergono allo stesso limite di $B_3$) (cioè a un campo uniforme dello spazio ordinario).

Si noti che, *in prima approssimazione*, è escluso un tale fenomeno, diciamo così poligenetico, a partire da un potenziale newtoniano ordinario. Come ho mostrato nella Nota I [2], ad ogni funzione armonica fa riscontro un solo $ds^2$ einsteiniano.

Il comportamento analitico, messo in evidenza dall'integrazione rigorosa, è suscettibile di una espressiva immagine fisica. Supponiamo che, in un certo ambiente, si provochi un campo newtoniano assai sensibilmente uniforme. Secondo la teoria di Einstein, ne rimane influenzata la natura metrica dell'ambiente, il quale, a equilibrio raggiunto, si atteggia a varietà in generale non euclidea. Se il campo messo in gioco fosse proprio rigorosamente uniforme, lo spazio rimarrebbe euclideo: soluzione $B_3$), che si può riavvicinare, per prendere un esempio dall'ordinaria teoria della elasticità, alla *non* inflessione di una verga verticale caricata di punta. Ma è pur naturale che inevitabili piccole impurità del campo diano luogo ad altre forme

[1] In questi Rendiconti, vol. XXVII (1° semestre 1918), pag. 11.
[2] Ibidem, vol. XXVI (2° semestre 1917), pp. 307-317.

di equilibrio finale, che involgono una distorsione dello spazio. L'analogia, nel caso della verga elastica, è offerta dall'inflessione in qualche piano verticale, privilegiato per effetto di piccole dissimmetrie strutturali della verga.

## 1. — Aspetto della questione per $\xi = 0$.

Il sistema di cui dobbiamo occuparci è costituito dalle equazioni differenziali (16)-(19) della Nota precedente, nonchè dalla equazione in termini finiti [recante il numero (14)]

$$e^{-\tau} = \xi(x_1, x_2) + \eta(x_3).$$

Nelle ricordate equazioni differenziali, $\xi$ ed $\eta$ compariscono soltanto derivate, ovvero pel tramite di $e^{-\tau}$. Perciò il sistema non si altera aggiungendo a $\xi$ una costante arbitraria, purchè contemporaneamente si tolga la stessa costante da $\eta$, in modo da rispettare la somma $e^{-\tau}$. Così in particolare, *nell'ipotesi che la funzione $\xi$ si riduca ad una costante,* è lecito assumere senz'altro $\xi = 0$, con che le equazioni (17), (18) e (19) si semplificano notevolmente. Le (17) rimangono identicamente soddisfatte; le (18) e (19), scrivendo anche $\eta$ in luogo di $e^{-\tau}$, divengono

$$(K + \zeta'' + \zeta'^2)\,\eta - 2\eta'' = 0\,, \tag{1}$$

$$K\eta^2 + 2\eta''\eta - 3\eta'^2 = 0\,. \tag{2}$$

Fra $\eta(x_3)$ e $\zeta(x_3)$ passa la relazione [(16) della Nota precedente]

$$\eta'' - \zeta'\eta' = 0\,. \tag{3}$$

Ricorderò, per quanto possa essere superfluo, che il $dl^2$ spaziale ha la forma [(5) della Nota prec., in cui si sostituisca a $e^{-\tau}$ il suo attuale valore $\eta$]

$$dl^2 = \frac{d\sigma^2 + dx_3^2}{\eta^2}\,, \tag{4}$$

dove $d\sigma$ rappresenta un elemento lineare binario (indipendente da $x_3$), avente K per curvatura gaussiana.

Per questa metrica si hanno le curvature principali

$$\omega_1 = \omega_2 = -\tfrac{1}{2}\,\omega\,,$$

con $\omega$ definito dalla equazione [(20) della Nota prec., che ora diviene]

$$\omega = K\eta^2 - \eta'^2\,. \tag{5}$$

Infine, da $V = V_0\, e^{\nu}$ ($V_0$ costante di omogeneità) e dalla equazione [(6) della Nota prec.] $\nu = \tau + \zeta$, segue, per la velocità della luce,

$$V = V_0\,\frac{e^{\zeta}}{\eta}\,. \tag{6}$$

## 2. — Prime conseguenze delle equazioni differenziali — Caratteri salienti delle soluzioni.

Si può tosto escludere che $\eta(x_3)$ si riduca ad una costante. Infatti la (2) mostra che, per $\eta = \text{cost}$, $K\eta^2 = 0$. La (5) implicherebbe allora $\omega = 0$, e quindi (per essere $\omega_1 = \omega_2 = -\frac{1}{2}\omega$) l'annullarsi di tutte le curvature. Si ricadrebbe pertanto nel caso $B_3$) (elementare o galileiano), già esaurito nella Nota II.

Ritenendo ormai $\eta'$ non identicamente nullo, sarà anche $\eta$ generalmente diversa da zero, e l'equazione, ricavata or ora, potrà essere risoluta rispetto a K, porgendo

$$K = -2\frac{\eta''}{\eta} + 3\frac{\eta'^2}{\eta^2}. \tag{2'}$$

Dacchè il primo membro, come curvatura del $d\sigma^2$ binario, dipende soltanto da $x_1$, $x_2$, mentre il secondo è funzione della sola $x_3$, la (2′) richiede che siano entrambi separatamente costanti. La (4) mostra allora (essendo $\eta$ funzione della sola $x_3$) che le superficie $x_3 = \text{cost.}$ hanno la curvatura (costante sopra ognuna di esse) $K\eta^2$, e riescono geodeticamente parallele. Il gruppo di movimenti (a tre parametri) di queste superficie a curvatura costante, che hanno per quadrato dell'elemento lineare $\frac{d\sigma^2}{\eta^2}$, è quello stesso del $d\sigma^2$, il quale opera sulle sole variabili $x_1$, $x_2$. Un tale gruppo spetta quindi (come gruppo intransitivo) anche alla metrica spaziale definita dalla (4).

*Concettualmente la integrazione può riguardarsi compiuta.* Abbiamo infatti riconosciuto che lo spazio (pur non restando euclideo) ammette un gruppo intransitivo $\infty^3$ di movimenti rigidi. Per $K > 0$, tale gruppo è senz'altro isomorfo a quello delle rotazioni intorno ad un punto, e si è ricondotti al caso oramai classico di Einstein [1] (campo dovuto a masse distribuite simmetricamente attorno ad un punto). Ciò vale non solo per la metrica spaziale, ma anche per il $ds^2$ quadridimensionale, dacchè V, a norma della (6), è funzione della sola $x_3$, e quindi costante sulle varie sfere geodetiche $x_3 = \text{cost.}$

Va da sè che il caso di $K < 0$ è formalmente identico, passando attraverso l'immaginario, ma dà luogo a diversa interpretazione nel campo reale, il gruppo dei movimenti essendo quello della pseudosfera. Per $K = 0$, le superficie $x_3 = \text{cost.}$ hanno curvatura nulla, e il gruppo di movimenti è quello del piano euclideo.

[1] Veggasi la trattazione esauriente del Palatini (*Sullo spostamento del perielio di Mercurio*, ecc., Nuovo Cimento, vol. XIV, luglio 1917, pp. 12-45), che prende appunto le mosse dalla impostazione gruppale.

### 3. — Formule esplicite — Legge della forza — Comportamento longitudinale della deformazione spaziale.

Alle equazioni (1) e (2) possiamo pensare sostituite la (2′) e quella che si ricava da (1) eliminandone K e $\zeta$ mediante (2′) e (3), ossia

$$-4\eta'' + \frac{3\eta'^2}{\eta} + \frac{\eta'''\eta}{\eta'} = 0.$$

Non occorre tenerne conto perchè è implicita nella (2′), da cui, attesa la costanza di K, discende per derivazione. La (2′) stessa, posto per un momento $\mathfrak{z} = \frac{1}{\sqrt{\eta}}$, equivale a

$$\mathfrak{z}'' - \tfrac{1}{4} K \mathfrak{z} = 0,$$

che giova sostituire col solito integrale primo

$$\mathfrak{z}'^2 - \tfrac{1}{4} K \mathfrak{z}^2 = \text{cost.}$$

La costante del secondo membro sarà, secondo i casi, positiva o negativa (certamente positiva per $K < 0$). Checchè ne sia, è lecito attribuirle la forma $-\frac{1}{4}\varepsilon K_0$, dove $\varepsilon = \pm 1$, e $K_0$ designa una costante $\geq 0$, che ha le dimensioni di K (cioè $l^{-2}$). Riponendo per $\mathfrak{z}$ il suo valore $\frac{1}{\sqrt{\eta}}$, si ricava

$$\eta'^2 = K\eta^2 - \varepsilon K_0 \eta^3.$$

La (5) diviene con ciò

$$\omega = \varepsilon K_0 \eta^3 \ (^1), \tag{5′}$$

donde in particolare apparisce che la costante $K_0$ va ritenuta diversa da zero: altrimenti si ricadrebbe nel sottocaso $B_3$) (curvature tutte nulle, ossia spazio euclideo).

Dacchè $K_0$ non si annulla (ed ha le dimensioni di K), possiamo assumere la costante K sotto la forma $K_0 \mu$ (con $\mu$ puro numero); la precedente equazione può così essere scritta:

$$\eta'^2 = K_0(\mu\eta^2 - \varepsilon\eta^3). \tag{7}$$

[1] Questa espressione di $\omega$ è conforme al risultato generale trovato nella Nota preced. (§ 1), specificando le condizioni di integrabilità del sottocaso $B_2$). Per ogni soluzione appartenente a tale tipo sussiste la relazione $\omega = \omega_0 e^{-3\tau}$ (con $\omega_0$ costante). Qui $e^{-\tau}$ si riduce ad $\eta$, e la (5′) si identifica appunto colla ricordata condizione di integrabilità.

La (4), sostituendovi come variabile indipendente $\eta$ ad $x_3$, a norma della (7), assume l'aspetto

$$(4') \qquad dl^2 = \frac{d\sigma^2}{\eta^2} + \frac{d\eta^2}{K_0 \eta^4 (\mu - \varepsilon \eta)},$$

dove $K_0 > 0$ è una costante arbitraria di dimensioni $l^{-2}$, $\mu$ è una costante numerica arbitraria (positiva, negativa o nulla), $\varepsilon = \pm 1$, e $d\sigma$ sta ad indicare un elemento lineare binario di curvatura costante $K = K_0 \mu$. *Si dovranno prendere in considerazione soltanto valori positivi di* $\eta$, dacchè (§ 1) $\eta$ è il valore di una esponenziale.

Le linee (geodetiche) su cui varia la sola $x_3$, ossia la sola $\eta$, hanno, in base alla (4'), l'elemento lineare

$$(8) \qquad dg = \frac{|d\eta|}{\sqrt{K_0}\, \eta^2 \sqrt{\mu - \varepsilon \eta}},$$

il radicale intendendosi preso positivamente. Supponiamo di contare l'arco $g$ su queste geodetiche, a partire da una generica, ma ben determinata superficie (ad esse ortogonale) $\eta = \eta_0$, e di procedere, nel senso delle $\eta$ decrescenti, da $\eta_0$ verso lo zero. Si avrà così $|d\eta| = -d\eta$, e $g$, a tenore della (8), andrà crescendo *indefinitamente*, perchè il differenziale del secondo membro tende a diventare infinito d'ordine superiore al primo. Ne viene che, facendo decrescere $\eta$ da un generico valore positivo $\eta_0$ verso lo zero, si tende all'$\infty$, nella nostra varietà di elemento lineare (4'), allontanandosi indefinitamente, in senso perpendicolare, da una qualsiasi superficie della famiglia $\eta = \text{cost.}$ Quanto più si procede verso l'infinito, tanto meno la varietà tende a scostarsi da uno spazio euclideo, perchè, in virtù della (5), $\omega$, e con essa anche le due altre curvature principali $\omega_1 = \omega_2 = -\frac{1}{2}\omega$ convergono a zero assieme ad $\eta$.

La (3), isolando $\zeta'$, si integra e porge

$$(3') \qquad e^{\zeta} = \frac{1}{\sqrt{K_0}} \eta',$$

dove ho assunto $\frac{1}{\sqrt{K_0}}$ per costante di integrazione. Ciò è lecito, perchè da un lato è rispettata l'omogeneità, tale costante dovendo essere una lunghezza $\left(\eta \text{ e } \zeta \text{ sono puri numeri, } \eta' = \frac{d\eta}{dx_3} \text{ è l'inversa di una lunghezza}\right)$. D'altro lato poi va tenuto presente che ci prepariamo $e^{\zeta}$ *soltanto* per sostituirlo nella espressione (6) di V, in cui compare già una costante moltiplicativa arbitraria. Sarebbe dunque ozioso introdurne una seconda.

L'effettiva sostituzione di (3') in (6), ove si tenga conto della (7), ci dà

$$(6') \qquad \tfrac{1}{2}\,V^2 = \tfrac{1}{2}\,V_0^2(\mu - \varepsilon\eta).$$

In questa e nella (4'), si compendia la rappresentazione formale della categoria di soluzioni di cui stiamo occupandoci. L'integrazione ha introdotto le tre costanti $K_0$, $\mu$, $V_0$. Ma $K_0$ e $V_0$ dipendono dalla scelta delle unità di lunghezza e di velocità. *Perciò si tratta di* $\infty^1$ *soluzioni intrinsecamente distinte.*

Dacchè [Nota 1, § 2] $-\frac{1}{2}V^2$ costituisce il potenziale statico del nostro campo di forza, e $V$ dipende dalla sola $\eta$, le superficie $\eta =$ cost. sono equipotenziali, e le loro traiettorie ortogonali (geodetiche come s'è già rilevato) costituiscono le *linee di forza.* Esse coincidono manifestamente colle *linee assiali* (linee principali di curvatura corrispondenti alla $\omega$, le quali, in ogni $dl^2$ del sottocaso $B_2$), sono quelle su cui varia la sola $x_3$, il che è quanto dire, nel caso presente, la sola $\eta$); nonchè colle *linee di pendenza* della $\omega$ [funzione della sola $\eta$ a norma della (5')]. Per questa duplice coincidenza, è ben giustificato di chiamare *longitudinali* le soluzioni di cui stiamo occupandoci.

Assumendo per positivo il senso delle $\eta$ crescenti, si ha dalle (6') e (8)

$$(9) \qquad F = -\tfrac{1}{2}\,\frac{dV^2}{dg} = \tfrac{1}{2}\,V_0^2\sqrt{K_0}\,\eta^2\sqrt{\mu - \varepsilon\eta}\,.$$

Dacchè $F$ risulta positiva, *la forza è diretta* (secondo le linee assiali di curvatura) *verso le regioni più incurvate* (tali essendo, a norma della (5'), quelle che corrispondono a valori maggiori di $\eta$).

La legge quantitativa della forza si può considerare espressa dalla (9) sotto forma intrinseca. Infatti $\eta$ non è un generico parametro di posizione, ma, in virtù della (5'), ha un preciso significato metrico dipendente dalle curvature delle varietà. Va da sè che, volendo, si potrebbe anche esprimere $F$ in funzione della distanza geodetica $g$ da una prefissata superficie (equipotenziale) $\eta = \eta_0$. Basterebbe ricavare $\eta$ in termini di $g$ dalla (8), e sostituire in (9).

Val la pena di fissare anche l'espressione esplicita del gradiente della forza $F$ (lungo la sua linea d'azione, nel senso delle $\eta$ crescenti), che è

$$(10) \qquad \frac{dF}{dg} = V_0^2\,K_0\,\eta^3(\mu - {}^5/_4\,\varepsilon\eta).$$

### 4. — Forma di Schwarzschild per $\mu > 0$.

A norma della (4'), le superficie $\eta =$ cost. sono geodeticamente parallele. Ad esse compete il quadrato dell'elemento lineare $\dfrac{d\sigma^2}{\eta^2}$ e quindi (per

essere $K_0 \mu$ la curvatura del $d\sigma^2$) la curvatura costante $K_0 \mu \eta^2$, *positiva* assieme a $\mu$. Ognuna di esse è perciò applicabile sopra una sfera il cui raggio R è definito da

$$\frac{1}{R} = \sqrt{K_0 \mu} \cdot \eta . \tag{11}$$

Introducendo coordinate geografiche $\vartheta$, $\varphi$, si può intanto porre

$$\frac{d\sigma^2}{\eta^2} = R^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2) .$$

D'altra parte dalle (8) e (11), sostituendo come variabile indipendente R ad $\eta$, si ricava

$$dg^2 = \frac{dR^2}{1 - {}^{\alpha}/_{R}} ,$$

dove

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{\sqrt{K_0} \, \mu^{3/2}}$$

sta a designare una costante (positiva per $\varepsilon = 1$) avente le dimensioni di una lunghezza.

Ne consegue, badando alle (4′) e (8),

$$dl^2 = \frac{d\sigma^2}{\eta^2} + dg^2 = R^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2) + \frac{dR^2}{1 - {}^{\alpha}/_{R}} ,$$

che è precisamente la forma di Schwarzschild [1].

La corrispondente espressione di $V^2$ si ha dalla (6′), sostituendo R ad $\eta$ per mezzo della (11). Ove si designi con $c^2$ la costante $V_0^2 \mu$, risulta

$$V^2 = c^2(1 - {}^{\alpha}/_{R}) .$$

C. D. D.

### 5. — Condizione qualitativa di immediata prossimità ad uno spazio euclideo.

Dacchè le tre curvature principali sono, a norma della (5′),

$$\omega_1 = \omega_2 = -\tfrac{1}{2} \omega = -\tfrac{1}{2} \varepsilon K_0 \eta^3 \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

si sarà prossimi al comportamento euclideo allora e allora soltanto che risulti piccolo $K_0 \eta^3$. Questo può avvenire per due ragioni: o $K_0$ (che è una curvatura) riesce trascurabile di fronte ad altra curvatura che abbia importanza specifica nel caso concreto da prendere in considerazione; ovvero $\eta^3$ (che è un puro numero) si mantiene piccolo in valore assoluto.

[1] Cfr. Palatini, loc. cit., pag. 19.

Ciò premesso, si osservi dal punto di vista geometrico che la congruenza assiale (costituita dalle linee su cui varia la sola $x_3$, o, ciò che è lo stesso, la sola $\eta$) è, per ogni metrica del sottocaso $B_2$), isotropa e normale [cfr. Nota IV, § 2]; per le metriche (4′) risulta altresì geodetica. Ora, in uno spazio euclideo, le congruenze geodetiche, isotrope e normali si riducono a due soli tipi:

1°) Rette concorrenti in un punto (proprio) O.

2°) Rette parallele.

Ne segue che, nelle soluzioni trovate, in quanto si accostino al caso euclideo, le superficie equipotenziali $\eta = \text{cost.}$ devono essere assai prossime a sfere concentriche, oppure a piani paralleli.

La curvatura delle sfere è positiva, e non infinitesima, finchè ci si pone a distanza finita da O. Siccome, nella contigua metrica einsteiniana, la curvatura delle superficie $\eta = \text{cost.}$ è espressa da $K_0 \mu \eta^2$, così dobbiamo necessariamente ritenere $\mu > 0$. Dopo di che, in base al precedente §, diviene superfluo soffermarsi sul complemento quantitativo di piccolo divario dalla metrica euclidea: questo si specifica in modo noto, chiaramente illustrato dal Palatini nella citata Memoria.

Resta da riconoscere in quali delle nostre soluzioni le superficie equipotenziali sono prossime a piani paralleli dello spazio ordinario. Si richiede evidentemente (e basta) che sieno piccole ad un tempo le curvature principali, e per esse $K_0 \eta^3$, nonchè la curvatura $K_0 \mu \eta^2$ delle superficie equipotenziali. Trattando come quantità di prim'ordine i due puri numeri $\eta$ (variabile) e $\mu$ (costante), le dette curvature riescono del 3° ordine. E si può constatare che il campo di forza è uniforme con approssimazione anche superiore a quest'ordine. Basta por mente alla (10), la quale mostra che il gradiente della forza F contiene il fattore di quarto ordine

$$\eta^3(\mu - {}^5/_4\, \varepsilon\eta)\,.$$

Val la pena di rilevare che, in questi campi prossimi agli uniformi, come in tutte le soluzioni longitudinali, lo spazio è distorto (cioè deformato rispetto all'ordinario spazio euclideo) in modo che la direzione assiale di curvatura principale coincide con quella della forza. È questo il comportamento più intuitivo. Vedremo però in seguito (in particolare al § 6 della Nota VI) che altre soluzioni, pur aventi lo stesso aspetto limite di campi uniformi dello spazio euclideo, presentano, nei riguardi dell' inclinazione delle linee assiali sulle linee di forza, caratteristiche più complesse, che non si saprebbero certo prevedere col semplice buon senso.

## Fisica. — *Sui motori sincroni senza eccitazione e sui circuiti ad autoinduzione variabile.* Nota del Corrisp. O. M. Corbino.

1. In molte applicazioni hanno impiego frequente alcuni tipi di motorini sincroni, per correnti alternate o trifasi, i quali funzionano senza che occorra la eccitazione da parte di una corrente continua. In essi lo statore, che porta gli avvolgimenti, è costituito come nei motori asincroni; presenta quindi una cavità cilindrica a denti lungo la quale si alternano le facce polari cui è dovuto il campo alternato o rotante, secondo che si tratti di motori monofasi o trifasi. Il rotore è costituito, molto semplicemente, da un blocco di ferro laminato con cavità profonde, cilindriche, ripartite lungo la periferia in numero eguale a quello dei poli dello statore. Così se questo ha due coppie di poli, lo statore ha la sagoma di un cilindro a croce di Malta, con quattro braccia eguali. Lungo le braccia sono avvolti talora delle matassine di filo, chiuse ciascuna in corto circuito; ovvero tutta la croce è circondata da una gabbia di scoiattolo. L'aggiunta ha un duplice scopo. Nei motori a campo rotante gli avvolgimenti o la gabbia forniscono la coppia di avviamento che porta il rotore rapidamente nelle vicinanze del sincronismo, raggiunto il quale gli avvolgimenti acquistano la funzione di smorzatori Leblanc rispetto alle oscillazioni intorno al sincronismo, che viene così assicurato assai bene. Per questa seconda funzione i circuiti stessi o la gabbia vengono adottati anche nei motorini monofasi, per i quali serve all'avviamento un secondo motorino a collettore disposto superiormente e coassiale col motore principale; la corrente che lo alimenta viene interrotta a sincronismo raggiunto.

La spiegazione del funzionamento di questo tipo di motore è semplicissima nel caso delle correnti trifasi. A sincronismo raggiunto le braccia del rotore si magnetizzano stabilmente per virtù del campo induttore, e i poli così creati vengono attratti dal campo rotante rispetto al quale restano permanentemente arretrati di un angolo costante, il cui valore dipenderà dalla coppia resistente. Una spiegazione analoga vale pel caso delle correnti monofasi, che creano nello spazio del rotore un campo alternativo; decomponendo questo in due campi rotanti opposti, uno di questi agirà sul rotore al sincronismo come nei motori trifasi; l'altro sarà praticamente senza effetto, avendo, rispetto al rotore, una velocità relativa doppia della corrente.

In questa Nota mi sono proposto di studiare le condizioni di funzionamento di questi motori, in riguardo alla alterazione che essi determinano nella forma della corrente, estendendo ad essi l'osservazione che è già stata

fatta nella teoria degli alternatori, quella cioè di considerare gli avvolgimenti come circuiti ad autoinduzione variabile.

È invero evidente che il rotore in forma di croce offre nelle varie direzioni diametrali o radiali un cammino più o meno facile alle linee di induzione uscenti dalle facce polari dello statore; e pertanto nella rotazione del rotore ogni avvolgimento disposto intorno alla faccia polare dello statore viene a subire un mutamento periodico di autoinduzione; il periodo è eguale a quello di rotazione moltiplicato per il numero delle braccia del rotore; così se queste sono quattro come d'ordinario, l'autoinduzione assumerà periodicamente lo stesso valore quattro volte a ogni giro. E poichè, in tal caso, il rotore compie, al sincronismo, un giro ogni due periodi della corrente, l'autoinduzione assumerà lo stesso valore due volte a ogni periodo.

2. Sia pertanto

$$e = \mathrm{E} \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$

la forza e. m. d'alimentazione; si potrà porre per l'autoinduzione $l$ dell'avvolgimento

$$l = \mathrm{L}(1 + \mathrm{K} \cos 2\omega t)$$

qualora l'origine delle fasi si conti da una delle posizioni di massimo della a. i.; in questa ultima espressione L denota l'a. i. media, e K l'ampiezza relativa della variazione, sempre inferiore all'unità com'è evidente.

L'equazione che domina l'andamento della corrente $i$, e cioè

$$ri + \frac{d}{dt}(li) = e\,, \tag{1}$$

dove $r$ è la resistenza ohmica, può quindi essere scritta:

$$ri + \mathrm{L}(1 + \mathrm{K} \cos 2\omega t)\frac{di}{dt} - i\,.\,2\mathrm{KL}\omega\,.\operatorname{sen} 2\omega t = \mathrm{E} \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$

o anche

$$(r - 2\mathrm{KL}\omega \operatorname{sen} 2\omega t)\, i + \mathrm{L}(1 + \mathrm{K} \cos 2\omega t)\frac{di}{dt} = \mathrm{E} \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)\,. \tag{2}$$

Al fine di determinare la corrente $i$, che a regime permanente deve assumere un valore periodico con frequenza fondamentale corrispondente a $\omega$, si ponga

$$i = \Sigma\, i_m = \Sigma\, \mathrm{A}_m \operatorname{sen}(m\omega t + \alpha_m)$$

e quindi

$$\frac{di_m}{dt} = \mathrm{A}_m\, m\omega \cos(m\omega t + \alpha_m)\,.$$

Sostituendo nella (2), e isolando nel 1° membro la parte che deriva da $i_m$, essa risulta eguale a

$$r\mathrm{A}_m \operatorname{sen}(m\omega t + \alpha_m) - 2\mathrm{KL}\omega \operatorname{sen} 2\omega t \,.\, \mathrm{A}_m \operatorname{sen}(m\omega t + \alpha_m)$$
$$+ \mathrm{LA}_m\, m\omega \cos(m\omega t + \alpha_m) + \mathrm{LK} \cos 2\omega t \,.\, \mathrm{A}_m\, m\omega \cos(m\omega t + \alpha_m)\,;$$

e pertanto, dopo trasformazione del 2° e del 4° termine, eguale a

$$\begin{aligned} & r\mathrm{A}_m \operatorname{sen}(m\omega t + \alpha_m) + \mathrm{LA}_m\, m\omega \cos(m\omega t + \alpha_m) \\ & + \mathrm{LK}\omega\left(\frac{m}{2} - 1\right) \mathrm{A}_m \cos[(m-2)\,\omega t + \alpha_m] \\ & + \mathrm{LK}\omega\left(\frac{m}{2} + 1\right) \mathrm{A}_m \cos[(m+2)\,\omega t + \alpha_m]\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Si riconosce da ciò che dalla componente $i_m$ di pulsazione $m\omega$ prendono origine nel primo membro due termini di pulsazione $(m-2)\,\omega$ e $(m+2)\,\omega$. Per la stessa ragione prenderanno origine dei termini di pulsazione $m\omega$ dalle componenti $i_{m+2}$ e $i_{m-2}$. Raccogliendo quindi nello sviluppo del 1° membro, tutti i termini di pulsazione $m\omega$, derivanti direttamente da $i_m$ e indirettamente da $i_{m+2}$ e da $i_{m-2}$, tale parte dello sviluppo sarà data da;

$$r\mathrm{A}_m \operatorname{sen}(m\omega t + \alpha_m) + \mathrm{LA}_m\, m\omega \cos(m\omega t + \alpha_m)$$
$$+ \mathrm{LK}\frac{m}{2}\,\omega\, \mathrm{A}_{m+2} \cos(m\omega t + \alpha_{m+2}) + \mathrm{LK}\frac{m}{2}\,\omega\, \mathrm{A}_{m-2} \cos(m\omega t + \alpha_{m-2})\,.$$

In virtù della equazione (2) questa parte deve essere eguale a $\mathrm{E} \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$ per $m = 1$, ed eguale a zero per tutti gli altri valori di $m$.

Si ponga

$$i_m = \mathrm{A}_m \operatorname{sen}(m\omega t + \alpha_m) = a_m \operatorname{sen} m\omega t + b_m \cos m\omega t$$

cioè

$$a_m = \mathrm{A}_m \cos \alpha_m \quad ; \quad b_m = \mathrm{A}_m \operatorname{sen} \alpha_m$$

con che $a_m$ e $b_m$ rappresentano le ampiezze della componente di pulsazione $m\omega$, l'una in seno, l'altra in coseno. Sarà, per quanto precede,

$$r a_m - \mathrm{L}m\omega\, b_m - \mathrm{L}m\omega \frac{\mathrm{K}}{2}(b_{m+2} + b_{m-2}) = 0$$

$$r b_m + \mathrm{L}m\omega\, a_m + \mathrm{L}m\omega \frac{\mathrm{K}}{2}(a_{m+2} + a_{m-2}) = 0$$

per $m$ diverso da 1.

La soluzione è immediata se si trascurano per questi armonici elevati, le tensioni ohmiche rispetto alle induttive; se si pone cioè $r = 0$, supponendo inoltre K non troppo piccolo di fronte a 1. Si ottiene allora

$$a_m = -\frac{K}{2}(a_{m-2} + a_{m+2})$$

$$b_m = -\frac{K}{2}(b_{m-2} + b_{m+2})$$

le quali sono soddisfatte ponendo

$$a_{m+2} = s a_m = s^2 a_{m-2} = \cdots$$
$$b_{m+2} = s b_m = s^2 b_{m-2} = \cdots$$

qualora $s$ verifichi l'equazione

$$s^2 + \frac{2}{K}s + 1 = 0$$

cioè qualora sia

$$s = \frac{-1 + \sqrt{1 - K^2}}{K}. \tag{4}$$

Con ciò ogni componente armonica dispari della corrente è una frazione costante dell'armonica dispari precedente (le armoniche pari, com'è chiaro, sono tutte nulle).

3. Basterà quindi, per il calcolo di $a_m$ e $b_m$, la conoscenza di $a_1$ e $b_1$. Il caso di $m = 1$ richiede un esame speciale. La formola (3) ci dice intanto che dalla componente $i_1$ prendono origine un termine in $\cos(-\omega t + \alpha_1) = \cos(\omega t - \alpha_1)$; e che un termine in $\cos(\omega t + \alpha_3)$ prende origine da $i_3$. Tenendo conto di tutta la parte che contiene $\omega t$, ed eguagliandola al secondo membro $E \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$ si ottengono le equazioni:

$$r a_1 - L\omega b_1 - \tfrac{1}{2} L\omega K(b_1 + b_3) = E\cos\alpha$$
$$r b_1 + L\omega a_1 - \tfrac{1}{2} L\omega K(a_1 - a_3) = E \operatorname{sen}\alpha .$$

Osservando che per quel che si è detto

$$a_3 = s a_1 \quad ; \quad b_3 = s b_1$$

otteniamo, sostituendo ad $s$ il suo valore dato dalla (4):

$$r a_1 - \tfrac{1}{2} L\omega b_1(1 + K + \sqrt{1 - K^2}) = E\cos\alpha$$
$$r b_1 + \tfrac{1}{2} L\omega a_1(1 - K + \sqrt{1 - K^2}) = E \operatorname{sen}\alpha .$$

Se anche per la componente fondamentale si trascurano le perdite ohmiche, si pone cioè $r = 0$, si ottiene

$$
(5) \qquad \begin{aligned} a_1 &= \frac{E \operatorname{sen} \alpha}{\frac{1}{2} L\omega(1 - K + \sqrt{1 - K^2})} \\ b_1 &= \frac{- E \cos \alpha}{\frac{1}{2} L\omega(1 + K + \sqrt{1 - K^2})} \end{aligned}
$$

dai quali valori si può passare al calcolo delle componenti $a_m$, $b_m$ di qualunque armonica per mezzo delle formole

$$
a_m = s^m a_1 \quad ; \quad b_m = s^m b_1 \, .
$$

Si può quindi considerare risoluto il problema, col risultato che per il funzionamento del motore prende origine tutta la serie degli armonici dispari della corrente fondamentale, con ampiezze decrescenti in progressione geometrica, avente per ragione $s = \frac{-1 + \sqrt{1 - K^2}}{K}$. Se fosse, ad esempio, $K = \frac{1}{2}$, cioè se la self variasse periodicamente fra $\frac{1}{2} L$ e $2 L$, il rapporto fra ogni armonica e la precedente sarebbe circa 0,067.

4. Nel caso semplice di $r = 0$, cui corrispondono le (5), la totale potenza elettrica media assorbita dal motore si converte in potenza meccanica. E poichè agisce la f. e. m. $E \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$ di pulsazione $\omega$, ed è nullo il lavoro elettrico medio risultante da quella f. e. m. con le armoniche della corrente di pulsazione multipla di $\omega$, la potenza elettrica si otterrà tenendo presenti solo $a_1$ e $b_1$. Con $a_1$ è in fase la componente $E \cos \alpha$ della tensione; con $b_1$ la componente $E \operatorname{sen} \alpha$ di essa. Si ha pertanto come espressione della potenza media assorbita P, in funzione delle ampiezze massime

$$
(6) \qquad \begin{aligned} P &= \frac{a_1 E \cos \alpha}{2} + \frac{b_1 E \operatorname{sen} \alpha}{2} = \\ &= \frac{E^2}{2L\omega} \operatorname{sen} 2\alpha \frac{K}{1 - K^2 + \sqrt{1 - K^2}} = \frac{E^2_{eff}}{L\omega} \operatorname{sen} 2\alpha \frac{K}{1 - K^2 + \sqrt{1 - K^2}} \end{aligned}
$$

dove $E_{eff}$ denota la tensione efficace primaria. Si riconosce da questa formola che la potenza, e quindi la coppia motrice poichè si tratta di un motore sincrono, cresce al crescere di K, cioè dell'ampiezza dei mutamenti periodici della self; e che essa coppia è proporzionale a $\operatorname{sen} 2\alpha$ acquistando il massimo valore per $\alpha = 45°$.

In conseguenza al crescere della coppia resistente aumenterà $\alpha$, cioè l'anticipo della f. e. m. rispetto alle variazioni della self, e quindi il ritardo costante dell'asse del rotore sulla direzione del campo rotante nei motori

trifasi. Nel caso del motore a quattro poli, poichè il rotore compie un giro a ogni due periodi, la coppia massima si otterrà quando il diametro più lungo del rotore a croce resta indietro di 22°,5 rispetto alla direzione che assume nel funzionamento a vuoto (coppia nulla, $\alpha = 0$). Per un ulteriore accrescimento della coppia resistente il motore perde il sincronismo.

5. Ritornando alla forma della corrente abbiamo veduto come se ne può dare lo sviluppo in serie di Fourier, e dedotto una legge semplice di variazione dei coefficienti che vale nel caso di una resistenza ohmica trascurabile negli avvolgimenti. Ma quando questa ipotesi è verificata si può ottenere per $i$ l'espressione analitica completa partendo direttamente dalla (1), la quale diviene, per $r = 0$

$$\frac{d}{dt}(li) = \mathrm{E} \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$

e quindi

$$li = -\frac{\mathrm{E}}{\omega} \cos(\omega t + \alpha).$$

Sostituendo a $l$ il suo valore, si ottiene

$$i = -\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{L}\omega} \frac{\cos(\omega t + \alpha)}{1 + \mathrm{K} \cos 2\omega t}$$

la quale consente il tracciamento grafico della curva che dà la forma di $i$, e rivela già dalla sua struttura le notevoli deviazioni di $i$ dalla forma sinusoidale appena K non sia troppo piccolo.

6. Le considerazioni sopra esposte sono estensibili a tutti i casi in cui una f. e. m. alternativa agisca in un circuito di autoinduzione variabile periodicamente. Così valgono per il caso di un elettrodiapason alimentato con una f. e. m. alternativa, poichè la forchetta vibrante crea un circuito magnetico più o meno facile alle linee di forza generale nel rocchettino; la potenza elettrica spesa localmente intrattiene le oscillazioni di periodo doppio di quello della f. e. m. se la forchetta non è un magnete permanente; altrettanto vale per un telefono non polarizzato. Può anche considerarsi come un'autoinduzione variabile, a frequenza doppia della f. e. m. agente, ogni self con nucleo di ferro, per la non costanza della permeabilità di questo metallo: in tal caso la formola (6) ci dice che si ha perdita locale di energia quando le variazioni della self sono tali che questa non sia massima proprio nelle fasi di zero della f. e. m., ciò che avviene sempre per la isteresi; mentre, indipendentemente da questa, la corrente perde la forma sinusoidale.

## Idromeccanica. — *Equazione caratteristica dei piccoli moti ondosi in un canale di qualunque profondità.* Nota I di U. Cisotti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

In un canale, a fondo orizzontale e a sponde verticali, la massa liquida, perfetta e pesante, sia in equilibrio. — Si immagini di turbare lievemente, e in modo qualsiasi, lo specchio d'acqua: si constata allora la formazione di piccoli moti ondosi.

Lo studio matematico di queste onde fu — ed è tuttora — oggetto di numerose ricerche, a cominciare dalle classiche Memorie di Poisson [1] e di Cauchy [2]. — Per la estesa bibliografia si possono consultare i Cap. VIII e IX del Trattato di idrodinamica del Lamb [3]. — Gli studî compiuti in argomento si possono compendiosamente riassumere nei seguenti gruppi:

*a*) onde in canali di piccola profondità (Lagrange) [4];

*b*) onde in canali di profondità infinita (Poisson-Cauchy) [5], oppure in canali di profondità considerevole, senza essere infinita (Palatini) [6];

*c*) onde progressive di tipo permanente (Green, Airy, Stokes, Helmholtz, Rayleigh, Boussinesq, Mc Cowan, Levi-Civita);

*d*) metodi approssimati di ricerca di soluzioni ondose generali in canali di profondità finita e soluzioni particolari (Stokes, Kelvin, Rayleigh, Pidduck, Haveloch).

Nei problemi *a*), *b*), *c*) il punto di vista è sempre particolare; i metodi accennati in *d*) non lumeggiano nitidamente la questione analitica. Per il problema ondoso ivi accennato si presenta la difficoltà di potersi liberare ad un tempo dalle condizioni al pelo libero e al fondo del canale, difficoltà che può agevolmente essere rimossa nei problemi *a*) e *b*), a cagione delle ipotesi semplificatrici in esse contenute.

[1] Poisson, *Mémoire sur la théorie des ondes* [Mém. de l'Acad. Roy. des Sciences, t. I (1816)].

[2] Cauchy, *Mémoire sur la théorie des ondes* [Mém. de l'Acad. Roy. des Sciences, t. I (1827)].

[3] Lamb, *Hydrodynamics* [Cambridge, University Press (1916); Fourth Edition].

[4] Lagrange, *Oeuvres* [t. I].

[5] Poisson, Cauchy, loc. cit.

[6] Palatini, *Sulla influenza del fondo nella propagazione delle onde dovute a perturbazioni locali* [Rend. del Circ. Mat. di Palermo, t. XXXIX (1915)]. — Idem, *Studio asintotico del pelo libero* [Ibidem, t. XL (1915)].

Come questa difficoltà si può rimuovere nel caso *c*), fu mostrato da Levi-Civita ([1]), con ingegnoso criterio.

In questa prima Nota con opportuno adattamento del criterio di Levi-Civita mi propongo di mettere in rilievo che *il problema dei piccoli moti ondosi in un canale di profondità finita* (*qualunque*) *si può far dipendere da un'unica equazione mista* — cioè differenziale e alle differenze finite — *lineare e di second'ordine* (di tipo parabolico) *relativa ad un'unica funzione olomorfa*: essa è pertanto *equazione caratteristica* dei moti ondosi in discorso.

In una Nota successiva farò vedere come da questa equazione caratteristica scendano in particolare e nel modo più naturale le equazioni caratteristiche (non più alle differenze finite) già conosciute e corrispondenti ai problemi *a*), *b*); e infine che, nell'ipotesi di moti ondosi aventi carattere permanente rispetto ad una traslazione uniforme (caso *c*)) si ritrova l'equazione caratteristica stabilita da Levi-Civita ([2]).

Concludendo, l'equazione caratteristica che presento racchiude in sè tutti i problemi di piccoli moti ondosi fino ad ora considerati e costituisce un sicuro, e spero valido, punto di partenza per la ricerca di soluzioni ondose in canali di qualunque profondità.

1. *Brevi richiami sulla impostazione del problema* ([3]). — Si ammette, com'è consuetudine, che il moto ondoso abbia luogo per piani verticali paralleli alle sponde del canale col medesimo comportamento in ognuno d'essi; si ha così il vantaggio di ridurre il problema alle due dimensioni. Assumo in uno generico di questi piani una coppia di assi cartesiani ortogonali O; $x, y$ coll'asse $x$ orizzontale e coincidente col fondo del canale e l'asse $y$ verticale ascendente; è indifferente la scelta dell'origine O che lascio arbitraria. Sia $l$ il *pelo libero*, che allo stato naturale della massa liquida è orizzontale, cioè è una retta parallela al fondo e che ne dista $h$ — *profondità del canale* —. A perturbazione avvenuta $l$ muta forma, che in generale è variabile col tempo $t$; il moto ondoso ha quindi sede in una striscia indefinita S compresa tra il fondo $y = 0$ e la linea $l$.

*Equazioni indefinite.* — Supposto il moto regolare ed irrotazionale, esistono: una funzione $\varphi(t; x, y)$ — *potenziale di velocità* — e la *funzione di corrente* $\psi(t; x, y)$, funzioni armoniche associate, cioè legate tra di loro dalle relazioni

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} , \tag{1}$$

([1]) Levi-Civita, *Sulle onde progressive di tipo permanente* [Questi Rend.; vol. XVI (1907); pag. 777].

([2]) Levi-Civita, loco citato.

([3]) Lamb, loco citato, pag. 351.

che supporrò regolari e derivabili quanto occorre in S e per ogni $t$ finito e susseguente alla perturbazione.

Supposta omogenea la massa fluida il valore $p$ della pressione risulta in ogni punto e in ogni istante legato alla densità (costante) $\varrho$, alla gravità $g$ e al valore

$$V=\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}$$

della velocità della nota relazione

$$\frac{p}{\varrho}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}V^2+gy=\text{funzione della sola } t.$$

Trattandosi di piccoli moti ondosi il terzo termine si può trascurare, per cui la precedente si riduce a

$$\frac{p}{\varrho}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}+gy=\text{funzione della sola } t. \tag{2}$$

Questa, unitamente alla condizione di armonicità della $\varphi$:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0, \tag{3}$$

esaurisce le equazioni indefinite.

*Condizione al fondo.* — Bisogna esprimere che, per qualunque $t$, il fondo del canale è linea di flusso; per questo è necessario e sufficiente che la funzione di corrente $\psi$ abbia valore costante sul fondo; assumendo per la costante il valore zero, si ha la seguente condizione al fondo:

$$\psi=0\,,\ \text{per}\ y=0\ \text{ e qualunque } t. \tag{4}$$

*Condizione al pelo libero.* — Rappresenti

$$y=h+\eta(t;x) \tag{5}$$

l'equazione di $l$ in un generico istante $t$, con che $\eta=y-h$ è, in un posto generico di $l$ il sopraelevamento sullo specchio imperturbato $y=h$; per l'ordine di approssimazione voluto è a ritenersi $\frac{\eta}{h}$ quantità di primo ordine.

La condizione relativa ad $l$ è la isobaricità, il che si esprime per la (2), conglobando in $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ la funzione della sola $t$ del secondo membro, nel modo seguente

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+g\eta=0\,,\quad \text{sopra } l.$$

Potendosi ammettere che l'accelerazione verticale di ogni particella liquida sia trascurabile di fronte all'accelerazione di gravità, facilmente si vede ([1]) che, nell'ordine di approssimazione impostoci, la precedente condizione si può sostituire con la seguente:

(6) $$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g\eta = 0 \quad , \quad \text{per } y = h \text{ e qualunque } t.$$

Dovendo questa essere soddisfatta per qualunque $t$, si potrà derivare ulteriormente rispetto a questo argomento, ottenendo così

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0,$$

ovvero, notando che

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

si può scrivere in definitiva

(7) $$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - g\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad , \quad \text{per } y = h \text{ e qualunque } t.$$

Affinchè il problema di moto ondoso risultasse determinato sarebbero ulteriormente da fissarsi le condizioni iniziali: siccome però queste interessano la effettiva integrazione dell'equazione alla quale mi propongo di pervenire, integrazione che non è oggetto delle Note presenti, così converrà rimandare la relativa discussione a quando mi occuperò dell'integrazione dell'equazione caratteristica.

Concludendo, la traduzione analitica del problema ondoso in discorso (prescindendo dalle circostanze iniziali) è contenuta nella questione seguente: determinare una funzione $\varphi$ armonica e regolare nella striscia S, ad ogni istante, tale che essa e la sua associata $\psi$ soddisfino alle condizioni (4) e (7).

2. *Ricorso al piano complesso* $z = x + iy$. — *Equazione caratteristica.* — Conviene introdurre la variabile complessa $z = x + iy$, nella striscia S. Essendo $\varphi$ e $\psi$ (considerate quali funzioni di $x$ e $y$) funzioni armoniche associate, ponendo

$$f = \varphi + i\psi,$$

si ottiene una funzione di $z = x + iy$ (oltre che di $t$), che deve per ogni valore di $t$ mantenersi regolare in S (essendolo, per ipotesi, $\varphi$ e $\psi$) e di più

([1]) Cfr. ad es. Palatini, loc. cit., § 1, n. 4.

deve, per la (4), mantenersi reale sull'asse reale. Ne segue per il noto principio di riflessione analitica di Schwarz che $f$ è prolungabile analiticamente nella striscia S':

$$-h \leq y \leq 0 \quad , \quad -\infty \leq x \leq \infty ,$$

immagine riflessa di S, assumendo in ogni punto $(x, -y)$ di S' il valore coniugato di quello che essa assume nel corrispondente punto $(x, y)$ di S. Per cui se nel punto $z = x + iy$ è, in un generico istante:

$$f(t; x + iy) = \varphi(t; x, y) + i\psi(t; x, y) ,$$

nello stesso istante nel punto coniugato $\bar{z} = x - iy$ si ha:

$$f(t; x - iy) = \varphi(t; x, y) - i\psi(t; x, y) .$$

Da queste seguono:

$$(8) \qquad \begin{cases} \varphi(t; x, y) = \dfrac{1}{2} \left\{ f(t; x + iy) + f(t; x - iy) \right\} , \\ \psi(t; x, y) = \dfrac{1}{2i} \left\{ f(t; x + iy) - f(t; x - iy) \right\} . \end{cases}$$

Riferendosi, in particolare, ai punti del pelo imperturbato $y = h$, basta porre in queste $y = h$, allora la condizione (7), relativa al pelo libero, può scriversi:

$$(7') \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ f(t; x + ih) + f(t; x - ih) \right\} + \\ + ig \frac{\partial}{\partial x} \left\{ f(t; x + ih) - f(t; x - ih) \right\} = 0 .$$

Conviene ora far intervenire la circostanza che $f$ è funzione analitica: la precedente, dedotta per $x$ reale, vale per qualunque valore complesso $z$ appartenente al campo di esistenza; per cui scrivendo $z$ al posto di $x$, si ottiene:

$$(9) \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ f(t; z + ih) + f(t; z - ih) \right\} + \\ + ig \frac{\partial}{\partial z} \left\{ f(t; z + ih) - f(t; z - ih) \right\} = 0 .$$

Il problema è ora condotto alla integrazione di questa equazione che è differenziale lineare del secondo ordine e di tipo parabolico e nello stesso tempo alle differenze finite.

Facilmente si constata che ogni integrale della (9) reale sull'asse reale, soddisfa alle volute condizioni al fondo e al pelo libero, per cui la (9) è *equazione caratteristica* dei moti ondosi in discorso.

Matematica. — *Sulle equazioni integrali.* Nota IV di Pia Nalli, presentata dal Socio S. Pincherle.

15. Servendoci dei risultati ottenuti nelle Note precedenti dimostreremo che: *se* $c$ *è una costante caratteristica propria relativa a* $K(s,t)$ *e* $k(s)$, *esiste una funzione* $H(s,t)$ *soddisfacente all'eguaglianza*

$$(c-k(s))\,H(s,t)=\int_a^b K(s,v)\,H(v,t)\,dv,$$

*tale che, qualunque sia la funzione fondamentale* $\varphi(s)$ *corrispondente alla costante* $c$, *si abbia*

$$(c-k(s))\,\varphi(s)=\int_a^b H(t,s)\,\varphi(t)\,dt.$$

*Come conseguenza di queste due relazioni si avrà*

$$(c-k(s))\,H(s,t)=\int_a^b H(v,s)\,H(v,t)\,dv.$$

Daremo anche un metodo per calcolare $H(s,t)$ quando è nota $c$.

Chiameremo $H(s,t)$ *funzione caratteristica* corrispondente alla costante $c$.

16. Premettiamo la seguente osservazione.

Sia $\mu$ una costante caratteristica propria relativa a $K(s,t)$ e $k(s)$ e sia $\mu^2=d$, dove $d$ è la costante determinata al n. 13 della Nota precedente. Supponiamo anche $\mu$ diversa dalle $\mu_n$ della successione (20), dimodochè, per qualunque funzione fondamentale $\varphi(s)$ corrispondente a $\mu$, si avrà $\int_a^b \Gamma_n(t,s)\,\varphi(t)\,dt=0$, qualunque sia $n$. Sarà allora $D(s,t)\neq 0$.

Infatti, da

$$(\mu-k(s))\,\varphi(s)=\int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt$$

si trae

$$(\mu^n-k^n(s))\,\varphi(s)=\int_a^b K^{(n)}(s,t)\,\varphi(t)\,dt,$$

e di qui

$$\mu^{n-1}(\mu-k(s))\,\varphi(s)=\int_a^b [K^{(n)}(s,t)-k(s)\,K^{(n-1)}(s,t)]\,\varphi(t)\,dt,$$

cioè

$$\mu^{n-1}(\mu-k(s))\,\varphi(s)=\int_a^b G_n^{(1)}(t,s)\,\varphi(t)\,dt,$$

ed essendo, per qualunque $n$, $\int_a^b \Gamma_n(t\,,s)\,\varphi(t)\,dt = 0$ sarà pure, per qualunque $n$, $\int_a^b C_n(t\,,s)\,\varphi(t)\,dt = 0$: l'ultima eguaglianza si può anche scrivere

$$\mu^{n-1}(\mu - k(s))\,\varphi(s) = \int_a^b D_n(t\,,s)\,\varphi(t)\,dt\,.$$

Mettendo invece di $n$, $2n$, tenendo conto che è $\mu^2 = d$, avremo

$$(\mu - k(s))\,\varphi(s) = \mu \int_a^b \frac{D_{2n}(t\,,s)}{d^n}\,\varphi(t)\,dt\,,$$

e facendo tendere $n$ ad $\infty$, per la convergenza in media di $\frac{D_{2n}(t\,,s)}{d^n}$ verso $D(t\,,s)$,

$$(\mu - k(s))\,\varphi(s) = \mu \int_a^b D(t\,,s)\,\varphi(t)\,dt\,,$$

non può dunque essere $D(s\,,t) = 0$.

Si vede anche che $\mu\,D(s\,,t)$, ovvero $\mu\,M_i(s\,,t)$, dove è $\mu = (-1)^{i-1}\sqrt{d}$ (quando le due funzioni $M_1(s\,,t)$ ed $M_2(s\,,t)$ sono entrambe non nulle) è funzione caratteristica corrispondente a $\mu$.

17. Passiamo ora a dimostrare quanto abbiamo enunciato al n. 15.

Sia $(t_0\,,t_1)$ un intervallo dove cadono i valori di $k(s)$ e $c$. Si fissi $\alpha$ in modo che sia

$$2c - \alpha < t_0 < t_1 < \alpha:$$

il polinomio $x^2 - 2cx + (2c - \alpha)\,\alpha$ prende valori negativi quando $x$ varia in $(t_0\,,t_1)$ ed è minimo per $x = c$.

Si avrà dunque, per $x$ compreso in $(t_0\,,t_1)$,

$$(c - \alpha)^2 \geq |x^2 - 2cx + (2c - \alpha)\,\alpha|\,. \tag{28}$$

Sia $\varphi(s)$ una funzione fondamentale propria relativa a $K(s\,,t)$ e $k(s)$ e corrispondente a $c$: chiamando $P(s\,,t)$ il secondo nucleo iterato di $K(s\,,t)$ per mezzo di $k(s) - c$, si avrà:

$$0 = (k(s) - c)^2\,\varphi(s) + \int_a^b P(s\,,t)\,\varphi(t)\,dt\,, \tag{29}$$

e sarà quindi

$$\int_a^b P(s\,,t)\,\varphi(t)\,dt \neq 0\,. \tag{30}$$

La (29) si può anche scrivere

$$\lambda\,\varphi(s) = p(s)\,\varphi(s) + \int_a^b P(s\,,t)\,\varphi(t)\,dt$$

con $p(s) = k^2(s) - 2ck(s) + (2c - \alpha)\alpha$ e $\lambda = -(c - \alpha)^2$, quindi, tenendo conto della (30), possiamo dire che $\lambda$ è una costante caratteristica propria relativa a $P(s, t)$ e $p(s)$.

Nella (28) al posto di $x$ si può mettere $k(s)$, sarà dunque

$$\lambda^2 \geq p^2(s) . \tag{31}$$

Si possono dare due casi: 1°) esiste un numero $\delta > 0$ tale che sia quasi dapertutto

$$\lambda^2 > p^2(s) + \delta ; \tag{32}$$

ed allora, per i risultati della Nota III, si può determinare una funzione $\Gamma(s, t)$, caratteristica relativamente a $P(s, t)$ e $p(s)$, corrispondente alla costante $\lambda$; 2°) la (32) non è soddisfatta per nessun $\delta > 0$.

Siano allora $\mu_1, \mu_2, \ldots$ tutte le eventuali costanti caratteristiche relative a $P(s, t)$ e $p(s)$ per le quali è soddisfatta quasi dapertutto la disuguaglianza

$$\mu^2 > p^2(s) + \delta \tag{33}$$

con qualche $\delta > 0$ e $\Gamma_1(s, t), \Gamma_2(s, t), \ldots$ le corrispondenti funzioni caratteristiche, determinate coi metodi nella Nota III. Se in tutto quanto è esposto ai nn. 12 e 13, sostituiamo alle funzioni $K(s, t)$ e $k(s)$ rispettivamente $P(s, t)$ e $p(s)$, possiamo formare le $D_n(s, t)$, e non sarà $D_2(s, t) = 0$, perchè allora non esisterebbe nessuna costante caratteristica propria diversa dalle $\mu_n$, tranne eventualmente lo zero, mentre esiste la costante $\lambda < 0$.

Determineremo così un numero $d$ tale che, qualunque sia la costante caratteristica $\mu$ relativa a $P(s, t)$ e $p(s)$, diversa dalle $\mu_n$, si avrà $\mu^2 \leq d$. Sarà dunque $\lambda^2 \leq d$.

Ma non può essere $\lambda^2 < d$, perchè allora, per la (31), si potrebbe determinare $\varepsilon > 0$ in modo da avere quasi dapertutto $d > p^2(s) + \varepsilon$; quindi $\sqrt{d}$, presa con segno conveniente, sarebbe una costante caratteristica soddisfacente alla (33). Allora sarebbe $\sqrt{d} = \mu_i$ e si verrebbe a determinare una funzione caratteristica $R(s, t)$, corrispondente a $\sqrt{d}$, per la quale si avrebbe $\int_a^b \Gamma_i(v, s)\, R(v, t)\, dv = 0$. Ma si dovrebbe anche avere

$$\left(\sqrt{d} - p(s)\right) R(s, t) = \int_a^b \Gamma_i(v, s)\, R(v, t)\, dv \text{ e } \left(\sqrt{d} - p(s)\right) R(s, t) =$$

$$= \int_a^b R(v, s)\, R(v, t)\, dv , \text{ quindi } \int_a^b R(v, s)\, R(v, t)\, dv = 0 ,$$

e finalmente $R(s, t) = 0$.

Sarà dunque $\lambda^2 = d$ e perciò anche in questo secondo caso, per l'osservazione del n. 16, si può determinare una funzione $\Gamma(s, t)$, caratteristica

relativamente a $P(s, t)$ e $p(s)$, corrispondente alla costante $\lambda$. $\Gamma(s, t)$ sarà pure funzione caratteristica relativa a $P(s, t)$ e $(k(s) - c)^2$ corrispondente alla costante zero e si potrà porre

$$\Gamma(s, t) \sim - \sum_{m=1}^{\infty} (k(t) - c)^2 \psi_m(s) \psi_m(t),$$

le $\psi_m(s)$ formando un sistema ortogonale. Esse sono funzioni fondamentali proprie relative a $P(s, t)$ e $(k(s) - c)^2$, corrispondenti alla costante zero, perciò saranno pure fondamentali relativamente a $K(s, t)$ e $k(s) - c$ e corrisponderanno alla costante zero, cioè, finalmente, sono fondamentali relativamente a $K(s, t)$ e $k(s)$ e corrispondenti alla costante $c$.

La successione delle somme parziali della serie

$$\sum_{m=1}^{\infty} (c - k(t)) \psi_m(s) \psi_m(t)$$

converge in media verso una funzione $H(s, t)$ e si avrà

$$\Gamma(s, t) = -(c - k(t)) H(s, t).$$

Si ha evidentemente

$$(c - k(s)) H(s, t) = \int_a^b K(s, v) H(v, t) \, dv.$$

Inoltre, se $\varphi(s)$ è una funzione fondamentale relativa a $K(s, t)$ e $k(s)$ corrispondente a $c$, sarà pure fondamentale relativamente a $P(s, t)$ e $(k(s) - c)^2$ e corrispondente a zero, e perciò si avrà

$$-(k(s) - c)^2 \varphi(s) = \int_a^b \Gamma(t, s) \varphi(t) \, dt,$$

cioè

$$-(k(s) - c)^2 \varphi(s) = (k(s) - c) \int_a^b H(t, s) \varphi(t) \, dt,$$

quindi, quasi dapertutto nell'insieme dei punti $s$ dove è $k(s) \neq c$

$$(c - k(s)) \varphi(s) = \int_a^b H(t, s) \varphi(t) \, dt.$$

Ma questa eguaglianza è soddisfatta anche quasi dapertutto nell'insieme dei punti $s$ dove è $k(s) = c$, perchè allora tanto il primo che il secondo membro hanno valore nullo [1].

Concludiamo finalmente che $H(s, t)$ è funzione caratteristica relativa a $K(s, t)$ e $k(s)$, corrispondente alla costante $c$.

È poi facile dimostrare che *ad una costante caratteristica corrisponde una funzione caratteristica unica.*

[1] $\int_a^b H(t, s) \varphi(t) \, dt$ non è altro che la funzione verso cui converge in media la successione delle somme parziali della serie $\sum_{m=1}^{\infty} (c - k(s)) \psi_m(s) \int_a^b \psi_m(s) \varphi(s) \, ds$.

Matematica. — *Condizione necessaria e sufficiente per la derivabilità termine a termine di una serie di funzioni.* Nota di
GUSTAVO SANNIA, presentata dal Socio ENRICO D'OVIDIO.

1. I termini di una serie di funzioni

$$(1) \qquad u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots,$$

convergente in un intervallo $(a, b)$, ammettano derivata in un punto $x = c$ dell'intervallo. Allora una quistione importante (fin qui rimasta insoluta) è di assegnare la condizione *necessaria e sufficiente* affinchè la serie delle derivate

$$(2) \qquad u'_1 + u'_2 + \cdots + u'_n + \cdots$$

sia convergente e rappresenti la derivata nel punto $c$ della somma $u(x)$ della (1).

Questa condizione è la seguente:

*Dati due numeri positivi* $\varepsilon$ *ed* N, *deve esistere un numero intero* $n$ *maggiore di* N, *tale che, per ogni valore, finito o infinito, del numero intero positivo* $p$ *esista un intorno* $I_p$ ([1]) *di* $c$ *in tutti i punti* $x$ *del quale* (*escluso* $c$) *risulti*

$$(3) \qquad \left| \frac{[u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)] - [u_{n+1}(c) + \cdots + u_{n+p}(c)]}{x - c} \right| < \varepsilon .$$

Essa risulta dai due teoremi seguenti:

*Affinchè la* (2) *sia convergente è necessario e sufficiente che, dato un numero positivo* $\varepsilon$, *esista un numero intero positivo* $n$ (*maggiore, se si vuole, di un numero positivo assegnato* N) *tale che, per ogni valore finito dell'intero positivo* $p$, *esista un intorno* $I_p$ *di* $c$, *in tutti i punti* $x$ *del quale* (*escluso* $c$) *sussista la* (3).

Infatti, affinchè la (2) sia convergente è necessario e sufficiente che, dato $\varepsilon > 0$, esista un intero positivo $n$ (maggiore, se si vuole, di un numero positivo assegnato N) tale che, per ogni valore finito del numero intero positivo $p$, risulti

$$| u'_{n+1} + \cdots + u'_{n+p} | < \varepsilon$$

ossia

$$(4) \qquad \left| \lim_{x=c} \frac{[u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)] - [u_{n+1}(c) + \cdots + u_{n+p}(c)]}{x - c} \right| < \varepsilon ;$$

([1]) Intorno *sinistro* (*destro*) di $c$, se si considerano soltanto le derivate a sinistra (a destra) del punto $c$.

ed affinchè la (4) si verifichi è necessario e sufficiente che esista un intorno $I_p$ di $c$ in tutti i punti $x$ del quale sia soddisfatta la (3).

*Se la serie* (2) *è convergente, affinchè la sua somma sia la derivata nel punto c della somma* $u(x)$ *della* (1) *è necessario e sufficiente che, dati due numeri positivi* $\varepsilon$ *e* N, *esista un numero intero* $n$ *maggiore di* N *tale che, in tutti i punti* $x$ *di un intorno* $I_\infty$ *di* $c$ (*escluso* $c$), *risulti*

$$(5) \qquad \left|\frac{u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots]-[u_{n+1}(c)+u_{n+2}(c)+\cdots]}{x-c}\right|<\varepsilon \text{ [1]}.$$

Detto $r_n(x)$ il resto della (1) dopo il termine $u_n(x)$, la (5) può scriversi

$$(5)' \qquad \left|\frac{r_n(x)-r_n(c)}{x-c}\right|<\varepsilon .$$

La condizione enunciata è necessaria. Infatti, se la somma $u'$ della (2) è la derivata nel punto $c$ della somma $u(x)$ della (1), dato $\varepsilon>0$, esiste un intorno $I'$ di $c$ nei punti $x$ del quale ($c$ escluso) si ha

$$(6) \qquad \left|\frac{u(x)-u(c)}{x-c}-u'\right|<\frac{\varepsilon}{3};$$

inoltre si può trovare un intero $n$, maggiore di un numero positivo prefissato N, tale che sia

$$(7) \qquad |u'-s'_n|<\frac{\varepsilon}{3} \quad , \quad (s'_n=u'_1+\cdots+u'_n);$$

e poichè la funzione $s_n(x)=u_1(x)+\cdots+u_n(x)$ ha per derivata $s'_n$ nel punto $c$, si ha pure

$$(8) \qquad \left|s'_n-\frac{s_n(x)-s_n(c)}{x-c}\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

in un intorno $I''$ di $c$ (escluso $c$).

Dalle disuguaglianze (6), (7), (8) e

$$\left|\frac{r_n(x)-r_n(c)}{x-c}\right|\leq\left|\frac{u(x)-u(c)}{x-c}-u'\right|+|u'-s'_n|+\left|s'_n-\frac{s_n(x)-s_n(c)}{x-c}\right|$$

segue che la $(5)'\equiv(5)$ è soddisfatta in tutti i punti $x$ del più piccolo $I_\infty$ dei due intorni $I'$ e $I''$ di $c$.

La condizione è sufficiente. Infatti, poichè $u'$ è la somma della (2), dato $\varepsilon>0$, esiste un numero positivo N, tale che valga la (7) per ogni intero $n$ maggiore di esso; e se la condizione enunciata è soddisfatta, si

[1] Questa condizione non è che il limite della precedente per $p=+\infty$.

può scegliere uno di questi valori di $n$ per modo che la $(5) \equiv (5)'$ sia soddisfatta in un intorno $I_\infty$ di $c$; infine, poichè $s'_n$ è la derivata di $s_n(x)$ in $c$, vale la (8) in un intorno $I''$ di $c$.

Dalle (5)', (7), (8) e

$$\left|\frac{u(x)-u(c)}{x-c}-u'\right| \leq \left|\frac{s_n(x)-s_n(c)}{x-c}-s'_n\right| + |s'_n - u'| + \left|\frac{r_n(x)-r_n(c)}{x-c}\right|$$

segue che

$$\left|\frac{u(x)-u(c)}{x-c}-u'\right| < \varepsilon$$

nel più piccolo degli intorni $I_p$ ed $I''$ di $c$, ossia che $u'$ è la derivata di $u(x)$ nel punto $c$.

2. Supponiamo ora che i termini della serie (1) siano derivabili *in tutti i punti* dell'intervallo $(a, b)$.

*Affinchè la serie delle derivate*

$$u'_1(x) + u'_2(x) + \cdots + u'_n(x) + \cdots \tag{9}$$

*sia convergente e rappresenti la derivata della somma della* (1) *in tutti i punti dell'intervallo* $(a, b)$, *é sufficiente che: dati due numeri positivi* $\varepsilon$ *e* N, *si possa decomporre l'intervallo* $(a, b)$ *in un numero finito di parti* $P_1, P_2, \ldots P_r$ *e si possano trovare altrettanti numeri interi* $n_1, n_2, \ldots n_r$ *(distinti o non) maggiori di* N, *per modo che risulti*

$$\left|\frac{[u_{n_s+1}(x_1) + \cdots + u_{n_s+p}(x_1)] - [u_{n_s+1}(x_2) + \cdots + u_{n_s+p}(x_2)]}{x_1 - x_2}\right| < \varepsilon \tag{10}$$

*per ogni valore finito o infinito dell'intero positivo* $p$ *e per ogni coppia di punti* $x_1, x_2$ *della parte* $P_s$ $(s = 1, 2, \ldots, r)$.

Supponiamo che questa condizione sia soddisfatta e che, dati $\varepsilon$ e N, si siano costruite le parti $P_1, \ldots, P_r$ e si siano scelti i numeri $n_1, \ldots, n_r$.

Sia $x_1$ un punto fisso di $(a, b)$. Esso apparterrà ad una parte $P_s$ e la (10) varrà in ogni punto $x_2 \neq x_1$ di $P_s$ e per ogni valore, finito o non, di $p$. Se $x_1$ è interno a $P_s$ in senso stretto, ciò basta per asserire che la (9) è convergente per $x = x_1$ e che la sua somma $u'(x_1)$ è la derivata della somma $u(x)$ di (1) per $x = x_1$. (Perchè è soddisfatta la condizione enunciata in principio del n. 1 per $n = n_s$ e $I_p = P_s$). Se invece $x_1$ è l'estremo sinistro (destro) di $P_s$, ciò permette di asserire soltanto che $u'(x_1)$ è la derivata di $u(x)$ a destra (a sinistra) del punto $x_1$; ma in tal caso $x_1$ è pure l'estremo destro di $P_{s-1}$ (sinistro di $P_{s+1}$), se non cade in $a$ o in $b$, dunque $u'(x_1)$ è anche la derivata di $u(x)$ a sinistra (a destra) del punto $x_1$.

Meccanica. — *Sul problema delle coazioni elastiche.* Nota I di Gustavo Colonnetti, presentata dal Socio V. Volterra.

In un solido elastico in equilibrio nel suo stato naturale — il quale, per quanto non sollecitato da alcuna forza esterna, si presenti in istato di coazione interna ([1]) — immaginiamo di praticare un taglio.

In generale le due faccie del taglio, appena rese indipendenti l'una dall'altra, si sposteranno l'una rispetto all'altra, deformandosi, fino a che il solido abbia raggiunta la sua nuova configurazione di equilibrio.

Questa osservazione elementarissima serve non di rado ai tecnici per riconoscere l'esistenza degli stati di coazione, e qualche sperimentatore, operando su casi particolarmente semplici (anelli temprati), è anche riuscito a trarre, da un esame sommario della suaccennata variazione di configurazione, alcune pratiche conclusioni in ordine alla buona riuscita dei trattamenti termici ([2]).

Io mi propongo qui di dimostrare come, da un esatto rilevamento sperimentale degli spostamenti relativi dei singoli punti delle due faccie del taglio, si possa, anche nei casi più generali e complessi, risalire alla identificazione del sistema di tensioni interne che inizialmente si trasmettevano attraverso ad esso.

La risoluzione di un tale problema viene a dipendere, come si vedrà, dalla conoscenza di certe particolari distorsioni relative a quel medesimo taglio.

Così le belle, ed ormai classiche ricerche del Volterra ([3]), delle quali io ho già avuto occasione alcuni anni or sono di rilevare la stretta connessione con certe teorie dell'influenza dei carichi mobili verso le quali si va ogni giorno più decisamente orientando la moderna scienza delle costruzioni ([4]), si presentano ora come il prezioso punto di appoggio da cui si

([1]) G. Colonnetti, *Su certi stati di coazione elastica che non dipendono da azioni esterne*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. XXVI (1917), 2° sem.; *Su di una particolare classe di coazioni elastiche che si incontra nello studio della resistenza delle artiglierie*, id., vol. XXVII (1918), 2° sem.; *Una proprietà caratteristica delle coazioni elastiche nei solidi elasticamente omogenei*, id., vol. XXVII (1918), 2° sem.

([2]) H. Le Chatelier et L. Guillet, *Sur le traitement thermique des obus*, Paris, Min. de la Guerre, 1916.

([3]) V. Volterra, *Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes*, Annales de l'École Normale, 3, XXIV (septembre 1907).

([4]) G. Colonnetti, *Su di una reciprocità tra deformazioni e distorsioni*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. XXIV (1915), 1° sem.; *Principii di statica dei solidi elastici*, Pisa, 1916.

può utilmente prendere le mosse nello studio delle coazioni elastiche più generali.

Denotiamo con V lo spazio, connesso, occupato dal solido, e con $\Sigma$ la superficie (od, occorrendo, il complesso di superficie) lungo cui il solido si intende tagliato.

Siano

$$u \ , \ v \ , \ w$$

le componenti secondo gli assi degli spostamenti che bisogna imprimere ai singoli punti del solido tagliato ed in equilibrio per riportarli nelle posizioni che essi occupavano prima del taglio.

Noi riterremo queste componenti funzioni delle coordinate, soddisfacenti a tutte le abituali restrizioni della teoria classica dell'elasticità in tutti i punti del solido tagliato, vale a dire in tutti i punti dello spazio V eccezion fatta soltanto per quelli che appartengono alla superficie $\Sigma$, attraverso la quale le $u , v , w$ presenteranno in generale delle discontinuità.

Denoteremo con

$$\Delta u = u_\beta - u_\alpha \quad , \quad \Delta v = v_\beta - v_\alpha \quad , \quad \Delta w = w_\beta - w_\alpha$$

queste discontinuità, cioè le differenze fra i valori che alle $u , v , w$ competono in un punto generico della superficie $\Sigma$ considerato come appartenente ad una data faccia del taglio (faccia $\beta$), ed i valori che spettano alle stesse funzioni nel medesimo punto considerato come appartenente all'altra faccia (faccia $\alpha$); e considereremo tali discontinuità come date in ciascun caso concreto; supporremo per esempio di averle rilevate sperimentalmente sotto forma di spostamenti relativi delle singole coppie di punti già affacciati sulle due faccie del taglio.

Tutti sanno che il primitivo stato di equilibrio si può sempre integralmente ripristinare nel solido tagliato, applicando alle due faccie del taglio due distribuzioni di forze ovunque equivalenti alle tensioni interne che nel solido dato inizialmente si trasmettevano attraverso la superficie $\Sigma$; e che, nei riguardi del solido tagliato, queste forze sono da considerarsi come delle vere e proprie forze esterne.

A somiglianza di quanto abbiamo già fatto nelle Note precedenti, noi riterremo le loro tre componenti (riferite all'unità di superficie)

$$P_x \ , \ P_y \ , \ P_z$$

funzioni esse pure delle coordinate, definite in ogni punto di $\Sigma$ e riferite a quella faccia del taglio che abbiamo già designata col nome di faccia $\alpha$,

intendendo che sull'altra faccia (faccia $\beta$) le analoghe componenti siano rispettivamente [1]

$$-P_x \quad , \quad -P_y \quad , \quad -P_z .$$

Calcolare le $P_x, P_y, P_z$ in funzione delle $\Delta u, \Delta v, \Delta w$, ecco il nostro problema; ed esso consiste nel calcolare una distorsione — intesa, sia pure, nel senso più generale della parola — distorsione che, sovrapponendosi allo stato di coazione eventualmente residuo nel solido tagliato, riprodurrà poi identicamente la coazione iniziale data, colla quale essa ha in comune lo stato di tensione relativo alla superficie $\Sigma$.

Resta così acquisito un primo, importante risultato, che si può brevemente enunciare così:

*Data in un solido elastico una qualsiasi coazione — cioè uno stato di tensione interna in equilibrio per forze esterne tutte nulle — e tracciato attraverso ad esso un diaframma $\Sigma$ ad arbitrio, esiste sempre una distorsione la quale riproduce identicamente lo stato di tensione relativo a $\Sigma$, ed è definita da quelle medesime discontinuità di spostamenti che il solido spontaneamente presenta se, praticato un taglio in corrispondenza di $\Sigma$, e liberate le due faccie del taglio da ogni mutua azione, si lascia che il sistema assuma il suo nuovo stato di equilibrio.*

Ciò premesso, faremo un primo passo sulla via della identificazione delle $P_x, P_y, P_z$ dimostrando che:

*il calcolo delle sei caratteristiche (componenti secondo gli assi coordinati, e momenti rispetto agli stessi) di un tale sistema di forze può sempre ricondursi a quello di sei distorsioni elementari di Volterra.*

Invero, per ogni nuovo stato di coazione — i cui parametri, relativi sempre allo stesso diaframma $\Sigma$, contrassegneremo (per distinguerli) con un apice — sussiste il teorema di Betti [2]:

$$\int_\Sigma (P_x \Delta u' + P_y \Delta v' + P_z \Delta w')\, d\Sigma = \int_\Sigma (P'_x \Delta u + P'_y \Delta v + P'_z \Delta w)\, d\Sigma .$$

Supponiamo che la nuova coazione sia semplicemente una distorsione di Volterra, ossia poniamo

$$\begin{aligned} \Delta u' &= l' + q'z - r'y \\ \Delta v' &= m' + r'x - p'z \\ \Delta w' &= n' + p'y - q'x \end{aligned}$$

[1] Cfr. G. A. Maggi, *Dinamica dei sistemi*, Pisa, 1917, § 23.

[2] Cfr. G. A. Maggi, *Dinamica dei sistemi*, Pisa, 1917, § 136 e 137. Una dimostrazione diretta si otterrebbe facilmente procedendo in modo affatto analogo a quello adottato dal Volterra nella sua Nota: *Sulle distorsioni dei solidi elastici più volte connessi*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. XIV (1905), 1° sem.

con $l', m', n', p', q', r'$ (caratteristiche della distorsione) costanti, cioè indipendenti dalle coordinate.

Allora il primo membro dell'equazione di Betti assume la forma:

$$l' \int_\Sigma P_x \, d\Sigma + m' \int_\Sigma P_y \, d\Sigma + n' \int_\Sigma P_z \, d\Sigma +$$

$$+ p' \int_\Sigma (P_z y - P_y z) \, d\Sigma + q' \int_\Sigma (P_x z - P_z x) \, d\Sigma + r' \int_\Sigma (P_y x - P_x y) \, d\Sigma$$

epperò si può ridurre a misurare una qualunque delle componenti secondo gli assi (ovvero dei momenti rispetto agli stessi) del sistema di tensioni incognite $P_x, P_y, P_z$ ove si assumano per caratteristiche della distorsione

$$l' = 1 \quad , \quad m' = n' = p' = q' = r' = 0$$

e successivamente:

$$m' = 1 \quad , \quad l' = n' = p' = q' = r' = 0$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$r' = 1 \quad , \quad l' = m' = n' = p' = q' = 0$$

E quelle componenti (e quei momenti) riusciranno così completamente determinate essendo il secondo membro dell'equazione di Betti da considerarsi come noto nei singoli casi particolari (sempre quando gli spostamenti relativi $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ siano stati, come noi abbiamo supposto, punto per punto sperimentalmente rilevati) se si sanno calcolare le tensioni $P'_x, P'_y, P'_z$ determinate in corrispondenza di $\Sigma$ dalle singole distorsioni elementari sopra indicate.

Occorre appena avvertire che, nel caso particolare in cui, per effetto del taglio, il solido cessasse di essere connesso, ogni distorsione di Volterra degenererebbe necessariamente in un semplice moto rigido relativo di una parte del solido rispetto all'altra, e le $P'_x, P'_y, P'_z$ riescirebbero tutte nulle.

Se ne conclude che, in tal caso, devono essere identicamente nulle anche le sei caratteristiche del sistema di tensioni $P_x, P_y, P_z$ come era del resto facilmente dimostrabile anche per via diretta, dato che questo sistema di tensioni deve per ipotesi sussistere in istato di equilibrio per forze esterne tutte nulle.

Patologia vegetale. — *Nuove vedute sulle cause dell'arricciamento della vite.* Nota di L. Petri, presentata dal Socio G. Cuboni.

Dopo la pubblicazione, da me fatta nel 1912, di un primo contributo di ricerche sulle cause probabili dell'*arricciamento* della vite, lo studio, affidatomi dal Ministero per l'Agricoltura, venne esteso sperimentalmente all'influenza del terreno e del clima.

In attesa che dei risultati ottenuti venga pubblicata la relazione dettagliata, desidero esporre in questa Nota il nuovo indirizzo che oggi queste mie indagini hanno ricevuto in seguito ad alcune osservazioni recenti.

Le esperienze eseguite nel R. Vivaio di Arizzano (Intra) e a Firenze, presso il R. Istituto Forestale, piantando talee sane di *Rupestris du Lot* in terreno proveniente dal R. Vivaio di Palermo, da un appezzamento di *Rupestris* affette dalla malattia da lungo tempo, hanno dimostrato in modo definitivo la possibilità di riottenere con questo mezzo tutti i caratteri specifici dell'*arricciamento* al secondo anno di vegetazione delle talee stesse, mentre il medesimo terreno, sterilizzato a 120° C. non ha provocato alcun accenno di rachitismo nè di deformazioni fogliari, neppure al quarto anno di vegetazione.

L'influenza del terreno *infetto* si rivela sin dal primo anno con una scarsa formazione di radici e con lo sviluppo stentato dei germogli. Nell'originarsi di questi sintomi della malattia nelle condizioni suesposte non hanno alcuna influenza apprezzabile il clima e gli agenti meteorici; l'azione del terreno è in questo caso del tutto sufficiente e nettamente specifica.

Come carattere istologico concomitante ai sintomi macroscopici, appariscono, anche sin dal primo anno, i cordoni endocellulari nel cambio e nei tessuti definitivi che da questo hanno origine. Se tali resultati dimostrano che simili anomalie non sono in necessaria dipendenza dalle condizioni climatiche, forniscono nondimeno una nuova prova dell'intimo rapporto genetico di queste formazioni endocellulari con le deviazioni strutturali e funzionali provocate dall'*arricciamento*, giacchè le viti di controllo, vegetanti nel terreno sterilizzato, non le hanno presentate.

Le esperienze, eseguite su l'azione dei freddi tardivi, hanno dimostrato che nelle viti sane non si provocano, con tal mezzo, sintomi di vero *arricciamento*, ma nelle viti già ammalate si esagerano il rachitismo, le deformazioni fogliari e la formazione di cordoni endocellulari.

La presenza di abbondanti radici vive di viti sane in terreno argilloso, compatto, non riproduce la malattia su viti americane diverse (*Rupestris du Lot, Riparia gloire, Berlandieri* × *Riparia 420 A*), piantate sane e vegetanti nelle condizioni volute dall'esperienza per la durata di 5 anni. Le talee, prelevate da viti ammalate da lungo tempo in Sicilia, fatte radicare in terreno sano, sciolto e *mai* coltivato a vite sul Lago Maggiore (Intra), non risanarono anche dopo 5 anni. Talee di viti americane sanissime, coltivate da lungo tempo nell'Italia settentrionale (Brescia) in zone immuni dalla malattia, piantate in Sicilia in terreno dove altre viti simili si erano ammalate e poi estirpate, vennero rapidamente colpite da *arricciamento*.

In questi ripianti in terreno infetto si mostrarono più resistenti le talee prelevate da viti americane sane, già da molti anni coltivate in Sicilia in zone infette.

Questi resultati ed altri, che qui si omettono per brevità, confermano in massima quanto già era stato affermato (Pantanelli), che cioè la malattia ha la sua causa specifica nel terreno, ma non confermano l'ipotesi, che l'azione patogena di questo sia dovuta a prodotti tossici provenienti da residui di radici di vite.

Il liquido di lavaggio del terreno *infetto* o spremuto da questo con la pressa, conferisce a un terreno, precedentemente sterilizzato, l'azione patogena originaria, ma questa manca se il liquido di lavaggio è filtrato attraverso il filtro Kitasato o simili.

Quest'ultimo resultato è in favore dell'ipotesi che la causa specifica della malattia sia da ricercarsi nella presenza di microrganismi viventi nel terreno.

Le ricerche dirette a stabilire se i presunti microrganismi agiscano indirettamente su le radici o le attacchino direttamente, hanno dimostrato i seguenti fatti:

1°) Sin dal primo anno di vegetazione di una talea di vite sana piantata in terreno infetto, insieme allo stentato sviluppo di tutto l'apparato radicale, gli apici di un certo numero di radichette subiscono più o meno presto un arresto di sviluppo, provocato dall'originarsi di un'iperplasia delle iniziali e di molte cellule dei tessuti meristemali e cioè del caliptrogeno, dermatogeno, periblema e pleroma.

Si arresta per tal fatto l'accrescimento in lunghezza della radice e per la proliferazione, assai limitata, delle cellule embrionali, l'apice radicale perde quasi del tutto il suo piano di struttura caratteristico e si ha la formazione di un rigonfiamento che resta quasi sempre allo stato rudimentale, rivelandosi quindi all'esterno solo nel caso di un accrescimento eccezionalmente prolungato. L'aspetto degli apici radicali così deformati, è rappresentato nella figura n. 1.

2°) L'arresto dell'accrescimento in lunghezza delle radici e il processo iperplastico dei meristemi sono determinati da una medesima causa, costituita dalla penetrazione nell'interno delle cellule embrionali di un microrganismo che presenta i caratteri morfologici di un plasmodio. Solo nei preparati microtomici di apici radicali fissati col liquido di Merkel, Flemming o Kleinemberg, questi caratteri sono riconoscibili, meno facilmente in quelli fissati con liquidi a base di sublimato. In vicinanza dei nuclei delle cellule ospiti il plasmodio forma sempre un grumo di forma rotondeggiante, più colorabile, che in un determinato stadio di sviluppo presenta corpuscoli rotondeggianti fortemente colorabili (organi di riproduzione?). La presenza del plasmodio nelle cellule contribuisce a rendere eccezionalmente numerose le granulazioni colorabili nel citoplasma, giacchè il parassita presenta una affinità pei coloranti quasi eguali a quella del citoplasma. Parti libere del plasmodio assumono la forma di batteroidi, costituiti da una massa fondamentale poco colorabile con uno o più corpuscoli intensamente colorabili.

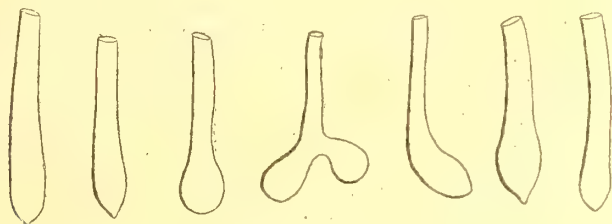



FIG. 1.

3°) La diffusione del plasmodio nelle cellule del pleroma avviene oltre la regione apicale, esso si diffonde nel cilindro centrale, specialmente negli elementi del periciclo e dei fasci procambiali.

Una prova di questo fatto si ha nell'originarsi d'iperplasie secondarie in corrispondenza della formazione di radichette laterali. Nel primo abbozzo di queste ultime, ancora racchiuse nella corteccia primaria della radice madre, si trovano i meristemi apicali completamente invasi dal plasmodio.

4°) Con l'esaurirsi dell'attività vitale delle iperplasie, queste vengono rapidamente invase da un micelio, riferibile al genere *Fusarium*. Da qui il precoce imbrunimento di molti apici radicali nelle viti affette da *arricciamento*, più volte constatato. Il parassita resta però nelle cellule embrionali del cilindro centrale ripetendo le iperplasie già descritte nelle radichette di nuova formazione.

5°) Il microrganismo parassita può vivere libero nel terreno, anzi sembra necessario al normale svolgersi del suo ciclo vitale un certo periodo di sviluppo extraradicale. La penetrazione nell'apice delle radici avviene attraverso le cellule della pilcoriza.

6°) I tentativi fatti recentemente per isolare il microrganismo in questione fanno ritenere possibile la sua coltura su substrati nutritivi artificiali.

I suesposti resultati si riferiscono a ricerche eseguite specialmente su la *Rupestris du Lot*. Sono ora in corso analoghe indagini su altri vitigni americani.

Perchè possa essere più esattamente valutato, in rapporto all'eziologia della malattia, il significato di quanto di nuovo venne trovato, è opportuno richiamare l'attenzione del lettore sulle considerazioni seguenti:

Due fatti principalmente devono richiamare la nostra attenzione:

1°) la persistenza della malattia nelle viti provenienti da talee di una pianta ammalata;

2°) la guarigione delle marze ammalate mediante l'innesto su soggetti sani.

Una spiegazione unica, esauriente, di questi due fatti non si trova nelle conclusioni sino ad ora pubblicate sulla genesi e la natura dell'*arricciamento*.

Si ammette oggi (Pantanelli) che la guarigione di una marza ammalata, innestata su soggetto sano, è dovuta all'influenza indiretta dell'apparato radicale sano, costituendo le anomalie morfologiche e fisiologiche della parte aerea niente altro che il resultato di una correlazione di sviluppo. Questa spiegazione, se può corrispondere al vero pel caso singolo cui si riferisce, ci lascia assai perplessi di fronte all'altro fatto della persistenza della malattia, con tutti i suoi caratteri specifici, in una talea di pianta ammalata, anche quando sia fatta radicare in terreno *mai* coltivato a vite e nelle migliori condizioni di nutrizione. Facendo astrazione ora di alcuni casi eccezionali di guarigione in simili condizioni, dovuta ad attenuazione degli effetti della malattia in vitigni meno sensibili, nel caso tipico, come si verifica nelle *Rupestris*, i caratteri dell'*arricciamento* si conservano effettivamente inalterati in tutte le discendenze vegetative di uno stesso stipite ammalato, qualunque sia la natura del terreno e il clima in cui esse sieno poste. A spiegazione di questo fatto, e ammettendo che le deformazioni e il rachitismo della parte aerea sieno provocati in origine da uno stato patologico delle radici, si potrebbe sostenere che i meristemi aerei subiscono una sorta di variazione più o meno profonda e quindi più o meno stabile, che può persistere anche quando le radici non ricevono più dal terreno alcuna azione nociva o anormalmente stimolante. Una simile spiegazione non regge però di fronte al fatto già menzionato della rapida guarigione delle marze ammalate, innestate su soggetto sano. Ciò infatti dimostra con tutta evidenza la decisiva influenza che nella scomparsa della presunta variazione gemmare ha la normale attività funzionale delle radici. Da tutto questo noi siamo portati a concludere che *nelle radici di una talea proveniente*

*da una pianta ammalata debbono verificarsi i medesimi disturbi funzionali che si presentano nell'apparato radicale della pianta madre.* In questo caso la funzionalità ridotta o abnorme delle radici deve ancora considerarsi come il resultato di una correlazione di sviluppo fra parte epigea ed ipogea della stessa talea? Oppure come una conseguenza postuma della deficienza o tossicità di sostanze accumulate negli internodi?

Ma tanto nell'uno come nell'altro caso riuscirebbe difficile spiegarsi la causa del perpetuarsi della malattia nelle successive discendenze vegetative, mentre essa dovrebbe gradatamente attenuarsi sino alla guarigione completa.

Si è visto infatti che ciò avviene rapidamente quando si sostituisca l'apparato radicale della talea ammalata con uno sano.

L'ipotesi che si tratti di una deviazione dell'attività morfogena dei meristemi non reversibile per un semplice processo di autoregolazione, per quanto sostenibile, non rappresenterebbe che un ultimo rifugio dei nostri infruttuosi tentativi nella ricerca di una spiegazione esauriente.

Il fatto, più volte constatato dai viticultori siciliani e dimostrato da ripetute esperienze, che il ripianto di una vite sana nel luogo da dove venne estirpata una vite ammalata, provoca il ritorno della malattia, il fatto che l'azione patogena del terreno è causata da un *virus* non filtrabile, c'inducono, insieme ai nuovi fatti trovati e alle considerazioni suesposte, ad ammettere che l'agente specifico della malattia sia costituito da un microrganismo vivente e che questo invada i meristemi dell'intera pianta molto più profondamente di quanto si sarebbe disposti a ritenere, oppure che esso, godendo di una diffusione grandissima nei più diversi terreni [1], per condizioni particolari di predisposizione della pianta in seguito agli effetti stessi di una infezione precedente, possa facilmente determinare il ripetersi della infezione nelle discendenze vegetative di uno stesso stipite ammalato.

[1] Contro questa supposizione non può essere invocato il fatto del manifestarsi sporadico della malattia, giacchè senza dubbio sono necessarie, perchè l'infezione si verifichi, altre condizioni complementari che in parte già sono state studiate ed in parte saranno determinate.

## COMUNICAZIONI

Il Socio Volterra delegato alla Conferenza Interalleata sulla organizzazione scientifica riferisce intorno ai lavori di detta conferenza. Le riunioni ebbero luogo a Londra presso la Royal Society, Burlington House, nei giorni 9, 10 e 11 ottobre u. s.

Conversazioni preparatorie private erano avvenute nella precedente primavera a Londra e a queste, d'accordo con l'Ufficio di Segretariato dell'Accademia delle Scienze di Parigi, avevano preso parte i Soci Volterra e Nasini, delegati dalla R. Accademia dei Lincei, ed i membri della presidenza della Royal Society.

Durante l'estate pervennero, sia al segretario dell'Accademia E. Millosevich, sia allo stesso Socio Volterra le proposte del Delegato americano dott. George E. Hale (Socio straniero dei Lincei) circa la costituzione nei varî Paesi alleati di un consiglio nazionale di ricerche, comprese quelle riferentisi alla difesa nazionale, analogo a quello già funzionante negli Stati Uniti e costituito dal Presidente Wilson. Secondo tali proposte questi Consigli nazionali dovrebbero poi costituire con loro delegati un consiglio internazionale. Queste proposte furono in massima accettate dal congresso di Londra (risoluzioni nn. 5 e 6). Poichè il dottore G. E. Hale accennava nella sua lettera alla possibilità di accordi con l'attuale ufficio italiano di Invenzioni e Ricerche, il Socio Volterra si recò a Londra anche per prendere accordi in proposito.

Al Congresso di Londra erano rappresentati oltre l'Italia, il Belgio, il Brasile, la Francia, la Gran Brettagna, il Giappone, il Portogallo, la Serbia, gli Stati Uniti d'America. I rispettivi Capi Missione erano, oltre al Socio Volterra, il prof. Picard per la Francia, il signor de Carvalho per il Brasile, il signor Freire per il Portogallo, il dott. George E. Hale per gli Stati Uniti d'America, il prof. Lecointe per il Belgio, il prof. Sakurai per il Giappone, il prof. B. Popovich per la Serbia. Presiedeva il Presidente della Società Reale di Londra Sir J. J. Thomson.

Il delegato portoghese non fece in tempo a prendere parte alla conferenza.

Il Socio Nasini, altro delegato italiano, non potè intervenire per ragioni di salute.

Alle deliberazioni prese al congresso di Londra fu fatto precedere il seguente preambolo che venne accettato ad unanimità e firmato da tutti i delegati nel testo originale che viene riprodotto quì nella sua traduzione letterale.

« Quando, più di quattro anni fa, lo scoppio della guerra divise l'Europa « in campi nemici, gli uomini di scienza potevano ancora sperare che, a pace « conchiusa, i legami rotti si riannoderebbero e che i nemici d'oggi potrebbero « di nuovo riunirsi in adunanze amichevoli, combinando gli sforzi loro al ser- « vizio degl'interessi scientifici. Fin dal Rinascimento della Scienza dal Medio « Evo in poi, la ricerca del sapere formò legami abbastanza forti per resistere « agli antagonismi nazionali.

« Questi legami andarono crescendo durante l'ùltima parte del secolo « passato, con lo sviluppo di certe scienze che dipendevano nelle loro ricerche « dalla cooperazione di tutte le nazioni civili del mondo. Le associazioni e « conferenze internazionali si andarono moltiplicando, mentre il commercio « amichevole fra gli scienziati dei diversi paesi diventava sempre più intimo, « malgrado le differenze politiche riconosciute, ma non accentuate.

« Nei tempi passati, le guerre interrompevano spesso la cooperazione fra « individui, senza però distruggere la stima reciproca, basata sulla conoscenza « del loro valore, e la pace cancellava poi rapidamente le cicatrici prodotte « dalla guerra finita. Se oggi i delegati delle Accademie scientifiche delle « nazioni alleate sono nella impossibilità di riallacciare delle relazioni « personali, anche in materie scientifiche, cogli scienziati degli Imperi centrali « fino a che questi non siano nuovamente ammessi nel concerto delle na- « zioni civili, essi lo attestano con piena coscienza della loro responsabilità « e si credono in dovere di esporre i motivi che li hanno condotti a questa « decisione.

« La civilizzazione ha imposto, alla condotta delle nazioni, leggi nell'in- « teresse dell'umanità e per il mantenimento d'un alto concetto dell'onore. « Tali sono il riconoscere la santità dei trattati sopratutto di quelli che spet- « tano allo stato di guerra, e l'evitare ogni crudeltà inutile verso le popola- « zioni civili. Le potenze centrali hanno violato questi due principii della « civiltà disprezzando tutte le convenzioni e aizzando le passioni che la fe- « rocia della guerra scatena. La guerra è necessariamente piena di crudeltà ed « atti di barbarie individuali non possono essere evitati ma devono essere « patiti. Noi non parliamo di tali casi, ma delle organizzate atrocità, inco- « raggiate e promosse dalle autorità col solo scopo di terrorizzare comunità « innocue. La distruzione di innumerevoli proprietà private, le violenze, e i « massacri in terra ed in mare, il siluramento di navi ospedali, gl'insulti e « le torture inflitte ai prigionieri di guerra lascieranno nella storia delle na- « zioni colpevoli una macchia che non potrà essere cancellata con la sola « riparazione dei danni materiali. Per restaurare la fiducia senza la quale una « feconda collaborazione è impossibile, gl'Imperi centrali debbono sconfessare « la loro adesione ai metodi politici la cui applicazione ha prodotto le atro- « cità che hanno indignato il mondo civile ».

Le deliberazioni del Congresso furono le seguenti:

1. Appena le circostanze lo permetteranno, le convenzioni relative alle Associazioni scientifiche internazionali saranno denunziate da ciascuno dei gruppi competenti delle nazioni in guerra contro gli Imperi centrali, conformemente agli Statuti o Regolamenti proprii a ciascuna di esse.

Le nuove Associazioni riconosciute utili al progresso delle Scienze e delle loro applicazioni saranno stabilite subito dalle nazioni in guerra contro gli Imperi centrali, con il concorso eventuale dei Neutri.

2. Certe Associazioni che resultano da convenzioni diplomatiche, come la Convenzione del Metro, dovranno fare oggetto di un esame speciale al momento delle negoziazioni della pace.

3. Le misure considerate sopra lasceranno da parte gli accordi relativi solo alle relazioni amministrative indispensabili fra i servizi pubblici, come quelle che regolano la navigazione, i dispacci meteorologici, le strade ferrate, i telegrafi, ecc.

4. È costituita in seno alla Conferenza una Commissione di studii, alla quale potranno aggiungersi i delegati designati dalle Accademie dei paesi in guerra contro le potenze centrali.

Questa Commissione preparerà un piano generale di organizzazioni internazionali per soddisfare ai bisogni dei diversi rami delle ricerche scientifiche e industriali, compresovi quelle relative alla difesa nazionale.

La Commissione si riunirà a Parigi quest'anno stesso, nella seconda quindicina di novembre.

5. Ognuna delle Accademie rappresentate a questa Conferenza sarà invitata a provocare la creazione di un Consiglio nazionale, avente per oggetto l'avanzamento delle ricerche stesse.

6. Un Consiglio Internazionale, avente per nucleo la Commissione creata dall'articolo 4, sarà costituito dalla federazione dei Consigli nazionali.

7. La Conferenza, ritenendo che tutti i progressi industriali, agricoli, medici, riposano sulle scoperte della scienza pura, richiama l'attenzione dei Governi sull'importanza delle ricerche teoriche e disinteressate, i cui bilanci dopo la guerra dovranno esser dotati il più largamente possibile.

Essa insiste pure sulla creazione di grandi laboratorii, privati e nazionali, di scienza sperimentale.

La Conferenza votò inoltre le seguenti risoluzioni:

*a*) La Conferenza rinvia alla Commissione generale, raccomandandole alla sua attenzione, le proposizioni formulate dal signor Massart con le aggiunte presentate dai signori Volterra e Hardy [1].

[1] La proposta del signor Massart (della Delegazione Belga) si riferisce ad accordi internazionali relativi a questioni scolastiche e di cultura. Le osservazioni dei signori Volterra e Hardy riflettono la comunicazione di quanto è già stato fatto in proposito negli stati alleati, degli accordi già avvenuti e dei provvedimenti legislativi in corso di esecuzione.

*b*) La Conferenza rinvia alla Commissione generale, raccomandandola alla sua attenzione, la proposta presentata dal signor Bigourdan ([1]).

A spiegazione e a complemento delle risoluzioni soprariportate il Socio Volterra aggiunge le seguenti comunicazioni e proposte:

Quanto al Consiglio nazionale di cui all'art. 5 propone che il nucleo ne sia costituito dall'attuale Ufficio Invenzioni e Ricerche e che l'Accademia faccia una proposta in tale senso al Ministro competente.

Per quanto riguarda l'art. 7 il Socio Volterra comunica che la sua proposta per la creazione di laboratorî nazionali di scienza sperimentale fu appoggiata vivamente anche dalla Delegazione Francese. Come è noto in Inghilterra e in America esistono siffatti laboratorî che sono assurti in grande fama e hanno già dato risultati importantissimi.

Per quanto riguarda l'ultimo comma dell'art. 4 il Socio Volterra dà lettura della lettera d'invito che fissa la riunione della Commissione a Parigi per il 26 novembre.

Il Socio Volterra accenna inoltre alla necessità che in questa Comissione sieno prese risoluzioni immediate circa gli studî geodetici ed astronomici di carattere internazionale che non possono per la natura loro essere interrotti, o ritardati.

I processi verbali della riunione di Londra saranno redatti nelle tre lingue: inglese, italiana e francese ed inviati all'Accademia a cura della Royal Society.

Dopo discussione cui prendono parte il Presidente e il Socio Paternò, l'Accademia esprime ringraziamenti vivissimi e congratulazioni al Socio Volterra per l'opera da lui esplicata nel congresso di Londra in rappresentanza dell'Accademia stessa e della Scienza Italiana, approva in massima i deliberati fondamentali del congresso stesso, accoglie la proposta del Socio Volterra che il nucleo costitutivo del futuro Consiglio sia l'attuale Ufficio Italiano di Invenzioni e Ricerche e delibera infine di farsi rappresentare dal Volterra stesso ed altri Soci da designare alla prossima riunione di Parigi.

([1]) Si riferisce a questioni inerenti alla letteratura bibliografica scientifica e più specialmente alle notazioni per la classificazione delle Scienze.

## PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente D'Ovidio con vivo rammarico comunica all'Accademia la perdita dei Soci Dini, Todaro e Guareschi, e specialmente del primo parla con affettuosa abbondanza; alle sue parole si associa il sen. Volterra che entra a parlare degli alti meriti scientifici del compianto suo Maestro.

Su proposta del Presidente la Classe delibera di esprimere ai Soci Ciamician, Pincherle, Halberr e Orsi congratulazioni vivissime per la patria recuperata.

## PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Grassi presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando fra queste: una *Relazione* del Corrisp. Fantòli, *al Consiglio Superiore delle Acque intorno all'argomento delle dighe di scogliera ed al problema dei serbatoi in Italia*; alcune pubblicazioni del Corrisp. Silvestri su parassiti delle piante; varie Memorie a stampa riguardanti studî geologici del prof. E. Manasse, e altre contenenti i risultati di osservazioni e ricerche eseguite in gran parte nel Gabinetto di Batteriologia Veterinaria Militare dal prof. M. Carpano. Fa inoltre menzione di un manuale pubblicato per cura del Ministero delle Colonie, intitolato: *Dry Farming, sistema di agricoltura per le regioni dalle pioggie scarse*, di J. A. Widtsoe, traduzione di G. Rosati; del volume: *Treballs de la Institució Catalana de Història natural*; e del vol. 7° dell'opera: *Icones Plantarum Formosanarum di* Bunzō Hayata.

Il Socio Fano offre le seguenti pubblicazioni fatte per cura del « Comitato scientifico per l'alimentazione »: *Programma d'indagini economico-agrarie*, di A. Serpieri e V. Peglion; *Per la migliore utilizzazione dei prodotti vegetali greggi*, di V. Peglion; *Ricerche statistiche sui consumi alimentari in Italia*, di F. Coletti; *Sull'applicazione delle norme per disciplinare il consumo carneo per la popolazione civile*, di A. Pirocchi; *Sull'essiccamento delle patate*, di V. Peglion; *Proposta di nuove norme per disciplinare la macellazione dei giovani bovini*, di A. Pirocchi. Il Socio Fano aggiunge varie notizie sugli scopi che si propone il « Comitato scientifico per l'alimentazione » da lui presieduto, il quale oltre all'esercitare un'azione di utile propaganda, intende disciplinare i consumi e migliorare la produzione del nostro paese.

---

E. M.

# OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
*presentate nella seduta del 3 novembre 1918.*

Atti del Congresso del libro (Milano, 2-5 aprile 1917). Milano, 1918. 8°, pp. I-LXI, 1-196.

Boccardi G. — Le rivelazioni del signor V. Cerulli alla R. Accademia dei Lincei. Torino, 1918. 8°, pp. 1-40.

Carbone A. — Dei vaccini e sieri in terapia oculare. Torino, 1918. 8°, pp. 1-150.

Coletti F. — Ricerche statistiche sui consumi alimentari in Italia (R. Accademia dei Lincei, Comitato scientifico per l'alimentazione). Roma, 1918. 8°, pp. 1-6.

De Astis G. — Studio sugli acidi organici fissi del vino con particolare riguardo all'acido lattico (Estr. dagli « Annali di chimica applicata », volume IX, pp. 155-241). Roma, 1918. 8°.

Del Rio-Hortega P. — Alteraciones de la neuroglia en la intoxicación por pilocarpina. Barcelona, 1918. 8°, pp. 1-8.

Fantoli G. — Relazione al Consiglio Superiore delle acque intorno all'argomento delle dighe-scogliera ed al problema dei serbatoi in Italia. Roma, 1918. 8°, pp. 1-72.

Genuardi G. — Relazione sul tema: ferrovie secondarie, trasporti e comunicazioni (Congresso agrario siciliano). Palermo, 1918. 8°, pp. 1-33.

Girault A. A. — Three new australian Chalcid flies (Estr. dal « Redia », volume XIII, pp. 106-198). Firenze, 1918. 8°.

Hayata B. — Icones plantarum Formosanarum nec non et contributiones ad floram Formosanam, vol. VII Taihoku, 1917. 8°, pp. 1-107.

Manasse E. — Celestina e wurtzite di Spannocchia nel Senese (Estr. dai « Processi verbali della Società toscana di scienze naturali », vol. XXVI, pp. 1-7). Pisa, 1918. 8°.

Manasse E. — Enarcite di Calabona (Sardegna). (Estr. dagli « Atti della Società toscana di scienze naturali », vol. XXXII, pp. 1-18). Pisa, 1918. 8°.

Manasse E. — Idratalcite e piroaurite (Estr. dai « Processi verbali della Società toscana di scienze naturali », vol. XXIV, pp. 1-15). Pisa, 1915. 8°.

Manasse E. — Ilviate ed altri minerali di Perda Niedda nell'Oriddese (Sardegna). (Estr. dai « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », vol. XXIV, pp. 285-288). Roma, 1915. 8°.

Manasse E. — Rocce della Somalia italiana raccolte dalla Missione stientifica Stefanini-Paoli (1913). (Estr. dagli « Atti della Società toscana di scienze naturali », vol. XXXI, pp. 1-73). Pisa, 1916. 8°.

Manasse E. — Scisti a clinocloro serpentinoscisti e scisti a tremolite dell'isola di Gorgona (Estr. dai « Processi verbali della Società toscana di scienze naturali », vol. XXVI, pp. 1-12). Pisa, 1917. 8°.

Manasse E. — Sulla composizione chimica delle terre gialle e bolari del Monte Amiata (Estr. dagli « Atti della Società toscana di scienze naturali », vol. XXX, pp. 1-21). Pisa, 1915. 8°.

Musciacco. A. — Delle illusioni ottiche spaziali in relazione con la retina umana. Lecce, 1918. 8°, pp. 1-40.

Paoli G. Campagna antiacridica in Capitanata nel 1917 (Estr. dal « Bollettino dei Ministeri per l'agricoltura e per l'industria, il commercio e il lavoro », vol. II, pp. 1-5). Roma, 1917. 8°.

Peglion V. — Per la migliore utilizzazione dei prodotti vegetali greggi (R. Accademia dei Lincei. Comitato scientifico per l'alimentazione). Roma, 1918. 8°, pp. 1-4.

Peglion V. — Programma di indagini economico-agrarie (R. Accademia dei Lincei, Comitato scientifico per l'alimentazione). Roma, 1918. 8°, pp. 1-8.

Peglion V. — Sull'essicamento delle patate (R. Accademia dei Lincei, Comitato scientifico per l'alimentazione). Roma, 1918. 8°, pp. 1-11.

Pirocchi A. — Proposta di nuove norme per disciplinare la macellazione dei giovani bovini (R. Accademia dei Lincei, Comitato scientifico per l'alimentazione). Roma, 1918. 8°, pp. 1-12.

Pirocchi A. — Sull'applicazione delle norme per disciplinare il consumo carneo per la popolazione civile (R. Accademia dei Lincei, Comitato scientifico per l'alimentazione). Roma, 1918. 8°, pp. 1-3.

Russo A. — Lavori pubblicati dal prof. Achille Russo dal 1891 al 1918 e lavori dei suoi allievi dal 1902 al 1918. Catania, 1918. 8°, pp. 1-16.

Scala E. — Per la utilizzazione dei combustibili nazionali (Estr. da « La Miniera italiana », n. 5, pp. 1-18). Roma, 1918. 8°.

Serpieri A. — Programma di indagini economico-agrarie (R. Accademia dei Lincei. Comitato scientifico per l'alimentazione). Roma, 1918. 8°, pp. 1-8.

Silvestri F. — Contribuzione alla conoscenza del genere Centrobia Förster (Hymenoptera: Chalcididae) (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore d'agricoltura in Portici », vol. XII, pp. 245-251). Portici, 1918. 8°.

Silvestri F. — Descrizione e notizie biologiche di alcuni imenotteri calcididi parassiti di uova di cicale (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore d'agricoltura in Portici », pp. 252-265). Portici, 1918. 8°.

Silvestri F. — Il genere Thysanus Walker (Hymenoptera: Chalcididae) (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore d'agricoltura in Portici », vol. XII, pp. 266-271). Portici, 1918. 8°.

Treballs de la Institució Catalana d'história natural. Barcelona, 1917. 8°, pp. 1-294.

Turati E. — Variabilità del Parnassius Apollo Pumilus Stich. e ricerche sull'origine dei Parnassius (Estr. degli « Atti della Società italiana di scienze naturali », vol. LVII, pp. 29-89). Pavia, 1918. 8°.

Usai G. — Le funzioni di Lamé dei primi 12 gradi (Estr. dal « Giornale di matematiche di Battaglini », vol. LV, pp. 1-43). Napoli, 1917. 8°.

Ventosa V. — Reflexiones acerca de la resolucián de las ecuaciones algébricas numéricas por el método de Gräffe (Exact. da la « Revista de la Real Academia de ciencias fisicas y naturales », tomo XVI, pp. 1 57. Madrid, 1917. 8°.

Widtsoe A. J. — « Dry farming » sistema di agricoltura per le regioni dalle pioggie scarse, tradotto da Guido Rossati. Roma, 1917. 8°, pp. 1-510.

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

*Seduta del 17 novembre 1918.*

F. D'Ovidio, Presidente.

## MEMORIE E NOTE
## DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *$ds^2$ einsteiniani in campi newtoniani.* VI. *Il sottocaso* $B_2$: *Soluzioni quadrantali* ($\eta = 0$). Nota del Socio Tullio Levi-Civita.

Nella Nota precedente [1] è stata discussa quella particolare categoria di $ds^2$, appartenenti al sottocaso $B_2$), in cui l'incognita $\xi$ si riduce ad una costante (soluzioni longitudinali). Conviene ora esaminare la opposta (e più generale) eventualità che $\xi$ sia una effettiva funzione.

Valendomi di certo gruppo di equazioni cui deve soddisfare $\xi(x_1, x_2)$, sono condotto (§§ 1 e 2) ad esprimere molti elementi incogniti mediante una sola funzione $\Xi(\xi)$, preparandomi così un sistema differenziale direttamente integrabile con mezzi elementari. Ma ancora una volta (§ 3) va staccata dal caso generale una seconda categoria di soluzioni, specializzata (come già la prima nei riguardi di $\xi$) perchè una certa $\eta$ si mantiene costante. La presente Nota si limita a questa seconda categoria. L'integrazione (§ 4) è immediata, e porta a $\infty^3$ soluzioni, di cui però (come già le longitudinali) soltanto $\infty^1$ sono intrinsecamente distinte. La loro esegesi geometrica e statica (§ 5) mette in evidenza la *proprietà quadrantale*, cioè la perpendicolarità fra le linee assiali e le linee di pendenza (veggasi per le

[1] Pp. 241-249 di questo volume.

denominazioni il § 1 della Nota IV) [1]. Si tratta, come si vede, di una proprietà puramente geometrica. A differenza di quanto accade nella prima categoria di soluzioni, non c'è legame semplice fra le linee di forza e le linee caratteristiche della deformazione.

Un caso limite (§ 6) di soluzioni quadrantali è assai prossimo ai campi uniformi dello spazio euclideo, e porge un nuovo esempio (cfr. la prefazione della Nota precedente) di quella poligenesi (a partire da un ordinario potenziale newtoniano) che contraddistingue le soluzioni rigorose dalla prima approssimazione.

### 1. — Le equazioni in $\xi$ (per $\xi$ non costante).

Si tratta delle equazioni [(17) della Nota IV]

$$\xi_{ik} - \tfrac{1}{2}\Delta_2\xi\, a_{ik} = 0 \qquad (i, k = 1, 2), \tag{1}$$

dove le $a_{ik}$, le derivate covarianti della funzione $\xi$ e il parametro si riferiscono alla forma binaria

$$d\sigma^2 = \sum_{1}^{2}{}_{ik}\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k.$$

Le (1) rimangono identicamente soddisfatte nell'ipotesi particolare di $\xi$ costante, ampiamente discussa nella Nota precedente. Vediamo ora le conseguenze dell'ipotesi opposta.

Moltiplicando per $\xi^{(k)}$ e sommando rispetto all'indice $k$, risulta

$$\sum_{1}^{2}{}_{k}\, \xi^{(k)}(\xi_{ik} - \tfrac{1}{2}\Delta_2\xi\, a_{ik}) = 0 \qquad (i = 1, 2). \tag{1'}$$

Soffermiamoci un momento per stabilire che queste equazioni, pur essendo due soltanto, ammettono le originarie (1) come necessaria conseguenza, sicchè c'è equivalenza fra (1) e (1'). Osserviamo all'uopo che (essendo ormai esclusa la costanza di $\xi$) non possono annullarsi identicamente, nè entrambe le derivate $\xi_1, \xi_2$, nè entrambi gli elementi del sistema reciproco $\xi^{(k)} = \sum_{1}^{2}{}_{h}\, a^{(hk)}\xi_h$. Le (1') esigono perciò che si annulli il determinante di elementi

$$b_{ik} = \xi_{ik} - \tfrac{1}{2}\Delta_2\xi\, a_{ik} \qquad (i, k = 1, 2).$$

Per sfruttare questa circostanza, poniamo

$$\sqrt{\pm b_{11}} = b_1 \quad , \quad \pm b_{12} = b_1 b_2 ,$$

adottando il segno superiore per $b_{11}$ positivo, l'inferiore per $b_{11}$ negativo,

[1] Ibidem, pag. 221.

in modo che $b_1$ riesca reale in ogni caso. Dall'annullarsi del determinante $b_{11}b_{22} - b_{12}^2$ segue allora $\pm b_{22} = b_2^2$, e rimane acquisito che ($b_1$, $b_2$ designando acconcie ausiliarie *reali*) sussistono le identità

$$\xi_{ik} - \tfrac{1}{2}\Delta_2\xi\, a_{ik} = \pm\, b_i\, b_k:$$

circa il segno da preporre ai secondi membri, basta ritenere che esso è il medesimo per ogni coppia $i, k$.

Moltiplichiamo per $a^{(ik)}$ e sommiamo. Il primo membro si annulla, talchè

$$\pm \sum_{1}^{2}{}_{ik}\, a^{(ik)}\, b_i\, b_k = 0.$$

Siccome la forma di coefficienti $a^{(ik)}$ è definita positiva (al pari del $d\sigma^2$, di cui è reciproca), la precedente condizione richiede l'identico annullarsi di $b_1, b_2$. Ne consegue

$$\xi_{ik} - \tfrac{1}{2}\Delta_2\xi\, a_{ik} = 0,$$

e quindi l'annunciata equivalenza fra le (1) e le (1').

Ciò premesso, ove si noti che

$$(\Delta\xi)_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{1}^{2}{}_k\, \xi^{(k)}\xi_k = 2\sum_{1}^{2}{}_k\, \xi^{(k)}\xi_{ik} \quad ; \quad \sum_{1}^{2}{}_k\, a_{ik}\,\xi^{(k)} = \xi_i,$$

le (1') assumono l'aspetto

$$(\Delta\xi)_i - \Delta_2\xi\cdot\xi_i = 0 \qquad (i = 1, 2),$$

e si possono quindi compendiare nell'unica equazione ai differenziali totali

$$d(\Delta\xi) - \Delta_2\xi\cdot d\xi = 0.$$

Perchè questa sussista è necessario e basta che i due parametri $\Delta\xi$, $\Delta_2\xi$ sieno entrambi funzioni della sola $\xi$, la prima *a priori* arbitraria, e la seconda eguale alla rispettiva derivata. Attribuiremo a $\Delta\xi$ la forma $K_0\Xi(\xi)$ con $K_0$ costante positiva di dimensione $l^{-2}$ (e quindi interpretabile come curvatura superficiale), che introduciamo per ragione di omogeneità, onde poter riguardare $\Xi$ puro numero al pari di $\xi$.

Escludendo eventuali punti (isolati) in cui potrebbero annullarsi $\xi_1$ e $\xi_2$, il parametro $\Delta\xi$ è positivo; sarà perciò, generalmente, $\Xi(\xi) > 0$. Rimane inteso che noi riferiremo le nostre considerazioni a campi in cui una tale disuguaglianza si trova soddisfatta.

In definitiva le originarie (1) sono sostituibili colle due condizioni

$$(1'') \qquad \Delta\xi = K_0\Xi \quad , \quad \Delta_2\xi = K_0\Xi':$$

va da sè che l'apice apposto ad una funzione di un solo argomento, quale la $\Xi(\xi)$, designa senza ambiguità derivazione rispetto a quell'argomento.

## 2. — Forma canonica del $d\sigma^2$ riferito alle linee $\xi =$ cost. e alle loro traiettorie ortogonali — Curvatura.

Possiamo immaginare riferito il nostro $d\sigma^2$ binario alle linee $\xi =$ cost. e alle loro traiettorie ortogonali. Sia $\varphi^\star$ un qualsiasi parametro di queste linee (che mi riservo di sostituire con una sua conveniente funzione $\varphi$). Potrò intanto porre, in virtù della prima delle (1″),

$$d\sigma^2 = \frac{1}{K_0}\left(\frac{d\xi^2}{\Xi} + \Phi\, d\varphi^{\star 2}\right),$$

essendo $\Phi$ una funzione di $\xi, \varphi^\star$, sottoposta alla condizione di rendere verificata anche la seconda delle (1″). Dacchè si ha, per una generica funzione $f(\xi, \varphi^\star)$,

$$\Delta_2 f = K_0 \sqrt{\frac{\Xi}{\Phi}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\sqrt{\Xi \Phi}\, \frac{\partial f}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi^\star}\left(\frac{1}{\sqrt{\Xi\Phi}}\, \frac{\partial f}{\partial \varphi^\star}\right)\right\},$$

assumendo $f = \xi$, si ricava

$$\Xi' = \sqrt{\frac{\Xi}{\Phi}}\, \frac{\partial}{\partial \xi} \sqrt{\Xi \Phi},$$

ossia

$$\frac{1}{\Phi}\, \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \frac{2}{\Xi}\, \Xi'.$$

Ne consegue

$$\Phi = \Phi^\star\, \Xi,$$

in cui la costante di integrazione $\Phi^\star$ va ritenuta funzione *a priori* arbitraria di $\varphi^\star$. Con un cambiamento di parametro, si rende

$$\sqrt{\Phi^\star}\, d\varphi^\star = d\varphi,$$

talchè risulta

$$d\sigma^2 = \frac{1}{K_0}\left(\frac{d\xi^2}{\Xi} + \Xi\, d\varphi^2\right), \tag{2}$$

che risguarderemo come forma canonica del nostro $d\sigma^2$. Si tratta evidentemente di metrica spettante ad una superficie rotonda, i cui meridiani ($\varphi =$ cost) e paralleli ($\xi =$ cost) costituiscono un reticolato in corrispondenza equivalente (che conserva le aree) col reticolato cartesiano $(\xi, \varphi)$ della metrica euclidea $\frac{1}{K_0}(d\xi^2 + d\varphi^2)$.

È appena necessario aggiungere che, da (2), si passa alla forma geodetica, ponendo

$$du = \frac{d\xi}{\sqrt{\Xi}},$$

con che

$$d\sigma^2 = \frac{1}{K_0} (du^2 + \Xi d\varphi^2) ;$$

e alla forma isometrica, ponendo

$$d\chi = \frac{d\xi}{\Xi} ,$$

con che

$$d\sigma^2 = \frac{\Xi}{K_0} (d\chi^2 + d\varphi^2).$$

La curvatura gaussiana K si calcola nel modo più spiccio dalla espressione geodetica del $d\sigma^2$, in base alla formula

$$K = - K_0 \frac{1}{\sqrt{\Xi}} \frac{d^2 \sqrt{\Xi}}{du^2} .$$

Sostituendo a $du$ la sua espressione $\frac{d\xi}{\sqrt{\Xi}}$, si ricava

$$K = - \tfrac{1}{2} K_0 \Xi'' . \tag{3}$$

3. — Richiamo del sistema da integrare — Caso di $\eta = 0$.

Finora abbiamo considerato le (1) per se stesse, e le abbiamo, per così dire, risolute parametricamente, esprimendo tutto mediante la funzione (positiva) $\Xi(\xi)$, che le (1) stesse lasciano completamente arbitraria. È il momento di riprendere le altre equazioni del problema nella forma loro attribuita alla fine della Nota IV.

Per raccogliere le idee, rammento che, nella classe di $ds^2$ einsteiniani di cui stiamo occupandoci, la metrica spaziale è definita da

$$dl^2 = e^{2\tau} (d\sigma^2 + dx_3^2) ,$$

dove, per quanto precede, il $d\sigma^2$ è della forma (2), mentre

$$e^{-\tau} = \xi + \eta ,$$

con $\eta$ funzione della sola $x_3$. La velocità della luce si esprime per $\xi, \eta$ e un'ulteriore funzione $\zeta$ della sola $x_3$, avendosi

$$V = V_0 \frac{e^{\zeta}}{\xi + \eta} :$$

$V_0$ designa una costante arbitraria, cui spettano le dimensioni di una velocità, mentre le funzioni $\xi, \eta$ e $\zeta$ hanno dimensioni nulle.

Fra $\xi, \eta, \zeta$ e gli elementi del $d\sigma^2$ (coefficienti e curvatura), passano, oltre alle (1) già sfruttate, le equazioni (16), (18), (19) della Nota IV, che dovrei intanto trascrivere, sostituendovi, in luogo di $\Delta\xi, \Delta_2\xi$ e K le loro espressioni (1″) e (3) per mezzo della sola $\Xi$. Riporterò queste formule nella successiva Nota VII, quando mi accingerò a discuterle con referenza al caso generale in cui $\eta$ si suppone una effettiva funzione di $x_3$. Qui mi limiterò al caso, in certo modo singolare, in cui $\eta$ si riduce ad una costante. Si può allora, ragionando come a § 1 della Nota precedente, ritenerla addirittura nulla; la (16) rimane identicamente soddisfatta, e le equazioni (18), (19) (postovi in conformità $e^{-\tau} = \xi$) assumono l'aspetto.

$$(4)\qquad \left(-\tfrac{1}{2}K_0\Xi'' + \zeta'' + \zeta'^2\right)\xi + K_0\Xi' = 0,$$

$$(5)\qquad -\tfrac{1}{2}\Xi''\xi^2 + 2\Xi'\xi - 3\Xi = 0.$$

Il quadrato dell'elemento lineare $e^{2\tau}(d\sigma^2 + dx_3^2)$, esplicitato analogamente in base alla (2), ove si ponga

$$(6)\qquad x_3 = \frac{1}{\sqrt{K_0}}\psi,$$

sostituendosi così alla variabile indipendente $x_3$ (che è una lunghezza) la $\psi$ (che è un puro numero), diviene

$$(7)\qquad dl^2 = \frac{1}{K_0\xi^2}\left\{\frac{d\xi^2}{\Xi} + \Xi\, d\varphi^2 + d\psi^2\right\}.$$

Le curvature principali sono, come in tutte le soluzioni $B_2$), legate dalle relazioni

$$\omega_1 = \omega_2 = -\tfrac{1}{2}\omega,$$

dove $\omega$ corrisponde alle giaciture $x_3 = \text{cost.}$, ossia $\psi = \text{cost.}$, ed è definita in generale dalla equazione (20) della più volte citata Nota IV, equazione che, nel caso presente, si riduce a

$$(8)\qquad \omega = K_0\left(-\tfrac{1}{2}\Xi''\xi^2 + \Xi'\xi - \Xi\right).$$

Rileverò da ultimo che, ponendo $\eta = 0$ nella espressione poc'anzi richiamata di V, si ha

$$(9)\qquad V = V_0\frac{e^{\zeta}}{\xi}.$$

### 4. — Determinazione delle soluzioni per cui $\eta = 0$.

Le nostre variabili indipendenti sono oramai: la $\xi$ *essenzialmente positiva* (in quanto si identifica, per $\eta = 0$, coll'esponenziale $e^{-\tau}$), la $\varphi$ e la $\psi$. Le funzioni incognite si riducono a due, dipendenti entrambe da un

solo argomento: la $\Xi(\xi)$ e la $\zeta(x_3)$, in cui $x_3$ va sostituito con $\psi$ a norma della (6). Facendo apparire $\psi$ come variabile di derivazione in luogo di $x_3$, e ponendo per brevità

$$(10) \qquad \frac{d^2\zeta}{d\psi^2} + \left(\frac{d\zeta}{d\psi}\right)^2 = e^{-\zeta} \frac{d^2 e^\zeta}{d\psi^2} = Z\,,$$

si ha

$$\zeta'' + \zeta'^2 = K_0 Z\,.$$

Con ciò (essendo lecito di dividere senza riserve per $\xi$), la (4) può essere scritta

$$(4') \qquad Z = \tfrac{1}{2}\Xi'' - \frac{1}{\xi}\Xi'\,.$$

Dei due membri, il primo può dipendere soltanto da $\psi$, il secondo soltanto da $\xi$. Perciò essi sono entrambi costanti (e puri numeri). Designandone il valore comune con $-\mu$, la (4') si scinde nelle due:

$$Z = -\mu\,, \quad \tfrac{1}{2}\Xi'' - \frac{1}{\xi}\Xi' = -\mu\,.$$

Ridotta a mezzo di quest' ultima, la (5) diviene

$$\Xi'\xi - 3\Xi = -\mu\xi^2\,,$$

ossia

$$d\left(\frac{1}{\xi^3}\Xi\right) = -\mu\frac{d\xi}{\xi^2}\,.$$

Integrando e attribuendo alla costante la forma $\varepsilon\lambda$, con $\varepsilon = \pm 1$ e $\lambda > 0$, si ha

$$\Xi = \mu\xi^2 + \varepsilon\lambda\xi^3\,.$$

Si verifica immediatamsnte che, con tale espressione di $\Xi$, rimane senz'altro soddisfatta anche la precedente

$$\tfrac{1}{2}\Xi'' - \frac{1}{\xi}\Xi' = -\mu\,;$$

e quindi la (5) per necessaria conseguenza. Va rilevato che $\lambda$ non può essere zero, perchè in tal caso si annullerebbe anche $\omega$ in base alla (8), e si sarebbe ricondotti ad uno spazio euclideo, caso che sempre si esclude, perchè già esaurito nella Nota II. Riconosciuto che $\lambda \neq 0$, diviene lecito senza pregiudizio della generalità supporre addirittura $\lambda = 1$. Infatti, partendo da un valore positivo generico di questa costante, basta porre

$$K_0 = \frac{K_0^\star}{\lambda}\,, \quad \mu = \lambda\mu^\star\,, \quad \Xi = \lambda\Xi^\star = \lambda(\mu^\star\xi^2 + \varepsilon\xi^3)\,, \quad \varphi = \lambda^\star\varphi\,,$$

perchè tutte le formule precedenti rimangano inalterate salvo lo scambio

materiale di $K_0, \mu, \Xi, \varphi, \lambda$ in $K_0^\star, \mu^\star, \Xi^\star, \varphi^\star, 1$ ($K_0^\star$ risultando, ben si intende, positiva al pari di $K_0$). C. D. D.

Possiamo pertanto ritenere

$$\Xi = \mu\xi^2 + \varepsilon\xi^3 \qquad (\varepsilon = \pm 1), \tag{11}$$

con che la (8) si riduce a

$$\omega = -\varepsilon K_0 \xi^3 \text{ [1]}. \tag{8'}$$

La determinazione della funzione $\zeta$ dipende dalla equazione $Z = -\mu$, la quale, badando alla (10), diviene

$$\frac{d^2 e^\zeta}{d\psi^2} + \mu e^\zeta = 0.$$

A prescindere da inessenziali costanti di integrazione [2] (e da un eventuale scambio, pure inessenziale, di $\psi$ in $-\psi$), ne deduciamo:

$$e^\zeta = \begin{cases} \cos\sqrt{\mu}\,\psi & (\mu > 0), \\ \cosh\sqrt{-\mu}\,\psi, \text{ ovvero } e^{\sqrt{-\mu}\psi} & (\mu < 0), \\ \psi, \text{ ovvero } 1 & (\mu = 0). \end{cases} \tag{12}$$

In base alla (11), la metrica spaziale (7) contiene le due costanti $K_0$ e $\mu$; nella V figura inoltre $V_0$. Perciò questa seconda categoria ha lo stesso grado di arbitrarietà delle soluzioni longitudinali (Nota prec., § 3); e consta anch'essa ($K_0$ e $V_0$ dipendendo dalla scelta, *a priori* arbitraria, delle unità di lunghezza e di tempo) di $\infty^1$ soluzioni intrinsecamente distinte.

### 5. — Giustificazione dell'appellativo quadrantale — Comportamento geometrico e meccanico.

La congruenza assiale ($\xi =$ cost. , $\varphi =$ cost. colle attuali notazioni), che corrisponde alla curvatura $\omega$, è isotropa e normale [cfr. Nota IV, § 2] per tutte le $B_2$); nella precedente categoria di soluzioni essa era altresì geodetica; ora non più perchè il coefficiente di $d\psi^2$ nella (7) dipende da $\psi$.

(1) Anche per questa seconda categoria di soluzioni, si ha, come già per la prima [Nota precedente, § 3], un controllo diretto della condizione generale di integrabilità [Nota IV, § 2] $\omega = \omega_0 e^{-3\tau}$ con $\omega_0$ costante. Ora $e^{-\tau} = \xi$ , $\omega_0 = -\varepsilon K_0$, mentre, per la prima categoria, si aveva $e^{-\tau} = \eta$ , $\omega_0 = \varepsilon K_0$.

(2) Queste sarebbero infatti: o moltiplicativa nell'espressione di $e^\zeta$; o additiva rispetto alla variabile indipendente $\psi$. La prima è superflua perchè si congloberebbe nella $V_0$ che compare nella espressione (9) di V (sola formula per cui ci interessa $e^\zeta$); la seconda è pure inessenziale, perchè $\psi$ compare nelle formule soltanto pel tramite di $d\psi^2$, e quindi si può, senza alterare le formule stesse, sostituire $\psi$ con $\pm\psi +$ cost.

Inoltre è diverso nei due casi il modo di variare di $\omega$. Nelle soluzioni longitudinali le linee assiali erano traiettorie ortogonali delle superficie $\omega = \text{cost.}$, e quindi coincidevano colle linee di pendenza. Qui, a norma della (8′), le linee di pendenza sono le $\xi$ ($\varphi = \text{cost.}$, $\psi = \text{cost.}$), ortogonali alle linee assiali $\psi$. Le soluzioni di cui stiamo occupandoci si chiamano *quadrantali* appunto per il fatto che si tagliano ad angolo retto le due congruenze di linee, intrinsecamente caratteristiche, assiali e di pendenza.

Giova rilevare che le superficie $\varphi = \text{cost.}$, e così pure le $\psi = \text{cost.}$, sono *piani geodetici*, nel senso che ogni loro linea geodetica è anche geodetica rispetto alla metrica dello spazio ambiente [1]; all'incontro non si tratta di superficie a curvatura gaussiana nulla: per es. le $\psi = \text{cost.}$, in base alla stessa definizione di curvatura riemanniana secondo una data giacitura, hanno la curvatura $\omega$.

Le linee assiali (su cui varia la sola $\psi$) appartengono evidentemente ai piani geodetici $\varphi = \text{cost.}$ e ne costituiscono le linee $\xi = \text{cost.}$ Esse risultano geodeticamente parallele nella metrica superficiale subordinata dalla (7) per $\varphi = \text{cost.}$ La loro curvatura geodetica $\gamma$, in base a nota formula [2], vale

$$\gamma = -\,K_0 \xi^2 \sqrt{\Xi}\, \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\sqrt{K_0 \xi^2}}\right) = \sqrt{K_0 \Xi}\,,$$

e si mantiene manifestamente costante lungo una stessa linea $\xi = \text{cost.}$ *Le linee assiali possono pertanto riguardarsi come circoli geodetici* (linee piane a curvatura costante) *della metrica* (7).

Se si fa convergere $\xi$ a zero (come già $\eta$, a § 3 della Nota preced.), ci si allontana indefinitamente nella varietà, tendendo all'$\infty$ la distanza da una generica superficie $\xi = \text{cost.}$, contata sulle geodetiche ad essa ortogonali; ecc.

Le superficie equipotenziali $-\frac{1}{2}V^2 = \text{cost.}$, o, ciò che è lo stesso, $V = \text{cost.}$, non coincidono più, come nell'altra categoria, colle $\omega = \text{cost.}$, ma dipendono da $\xi$ e da $\psi$ a norma delle (9) e (12). Perciò le linee di forza non coincidono colle linee assiali (su cui varia la sola $\psi$), nè colle linee di pendenza (su cui varia la sola $\xi$); e nemmeno le incontrano sotto angolo retto. Ne consegue, considerando intuitivamente l'andamento delle linee di forza come causa meccanica e la distorsione geometrica dello spazio, cioè l'andamento delle linee principali di curvatura (e, per esse, assiali e di pendenza), come effetto, che il comportamento delle soluzioni in discorso non è longitudinale, nè trasversale; ma misto.

[1] Si può rendersene conto sia, direttamente, in base alle equazioni di Lagrange per le geodetiche, sia invocando un risultato specifico dovuto al sig. Hadamard. Cfr. *Sur les éléments linéaires à trois dimensions*, Bull. des sciences math., tomo XXV, 190:, pp. 37-40.

[2] Cfr. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. I [Pisa, Spoerri, 190?], pag. 1c4.

6. — Caso limite.

Supponiamo in particolare che la costante (numerica) $\mu$ abbia un valore positivo molto grande. L'ipotesi si intenderà precisata, convenendo di riferirsi a valori moderati della variabile $\xi$, tali cioè che $\xi^3$ riesca trascurabile di fronte a $\mu\xi^2$.

Noto anzi tutto che l'incondizionata trascurabilità di $\xi^3$ implica, in causa della (8'), l'annullarsi di $\omega$, e con essa di $\omega_1 = \omega_2 = -\frac{1}{2}\omega$, ossia l'euclideità dello spazio. La stessa conclusione sussiste sotto l'ipotesi più lata che si possa prescindere da $\xi^3$ di fronte a $\mu\xi^2$. Infatti $\Xi$ si riduce allora a $\mu\xi^2$, e l'espressione (7) del quadrato dell'elemento lineare, ponendo

$$r = \frac{1}{\sqrt{K_0 \mu}} \frac{1}{\xi} \quad , \quad z = \sqrt{\frac{\mu}{K_0}}\, \varphi \quad , \quad \theta = \sqrt{\mu}\, \psi ,$$

diviene

$$dl^2 = dr^2 + dz^2 + r^2 d\theta^2 ,$$

in cui si ravvisa la nota forma euclidea riferita a coordinate cilindriche.

La (9), in virtù della (12) per $\mu > 0$, porge

$$\text{(13)} \qquad V = V_0 \sqrt{K_0 \mu}\, r \cos\theta ,$$

e mostra per conseguenza che le superficie $V = \text{cost.}$ si identificano coi piani (paralleli tra loro e all'asse delle $z$) $r\cos\theta = \text{cost.}$ Le linee di forza sono le perpendicolari a questi piani, mentre la forma limite delle linee assiali (su cui varia la sola $\psi$, ossia la sola $\theta$) è costituita dai circoli paralleli, e la forma limite delle linee di pendenza (su cui varia la sola $\xi$, ossia la sola $r$) è offerta dai raggi incidenti all'asse delle $z$ sotto angolo retto. Come si vede, le linee di forza incontrano sia le linee assiali che le linee di pendenza sotto angoli variabili da punto a punto, anzi suscettibili di qualsivoglia determinazione.

A tenore della (13), ove si ponga $r\cos\theta = x - x_0$ ($x_0$ costante), V varia linearmente colla distanza $x$ dal piano $r\cos\theta = -x_0$; perciò l'aspetto limite della forza è quello del caso $B_3$) (Nota II, § 7), ossia, si può dire, il campo uniforme [1].

Per quanto precede, le linee caratteristiche della deformazione spaziale presentano, anche al limite, un comportamento obliquo (non longitudinale, nè trasversale) rispetto alle linee di forza.

[1] Va notato che l'espressione *rigorosa* del potenziale statico $-\frac{1}{2}V^2$ sarebbe quadratica in $x$, e la forza avrebbe quindi carattere di forza elastica di richiamo (verso il piano $x = x_0$). Però, come si vide a proposito di $B_3$), le condizioni che interessano praticamente sono quelle in cui è trascurabile il quadrato del rapporto $\frac{x}{x_0}$. Allora è lecito prescindere dal termine quadratico in $-\frac{1}{2}V^2$, con che si ricade nei campi uniformi,

c. d. d.

## Chimica vegetale. — *Sull'azione degli enzimi vegetali sopra alcune sostanze organiche.* Nota del Socio G. Ciamician e di C. Ravenna.

Nella presente Nota riassumiamo brevemente i risultati ottenuti in questi ultimi tre anni dalle nostre esperienze sull'azione che gli enzimi contenuti nelle piante possono esercitare sopra certe sostanze organiche. Questi studî sono stati fatti quale seguito di quelli sul contegno di alcune sostanze organiche nelle piante, che ci occupano da molto tempo. Nel corso di queste esperienze eseguite segnatamente colle piante di mais avevamo trovato che i composti organici da noi finora esaminati, se inoculati nel mais o nel tabacco ed anche nei bulbi dei giancinti, non si rinvengono che in assai scarsa misura nell'estratto acquoso delle piante così trattate. Si poteva però supporre che i composti inoculati venissero eliminati per un processo di ossidazione e tale supposizione era confermata dalle esperienze di uno di noi sulla nutrizione delle piante verdi per mezzo di sostanze organiche (¹). Era poi logico ammettere che questi processi dovuti agli enzimi ossidanti presenti nei vegetali, potessero compiersi non soltanto negli individui viventi, ma anche con le poltiglie ottenute triturando le piante in cui quei principî enzimatici potevano conservarsi attivi. A questo proposito avevamo osservato fino dal 1909 (²), che, come nelle piante vive, anche in contatto con le piante triturate, si effettuano le sintesi di alcuni glucosidi e che le sostanze introdotte vengono del pari in parte distrutte.

Per le nostre nuove esperienze ci siamo serviti quasi sempre della poltiglia ottenuta triturando le foglie di spinaci, che si possono avere fresche anche durante i mesi invernali. Da principio avevamo tentato di impiegare l'estratto acquoso filtrato delle piante, ma tanto questo che quello ottenuto con la glicerina si mostrarono senza effetto; convenne però usare la poltiglia tutta intera, malgrado le maggiori difficoltà che ne derivavano per la ulteriore ricerca dei prodotti di ossidazione.

Le sostanze, sciolte per lo più in mezzo litro d'acqua, venivano lasciate in contatto per un mese con la poltiglia ottenuta ordinariamente da mezzo chilogr. di foglie di spinaci a cui si aggiungeva un poco di toluolo per evitare la putrefazione; il tutto era posto in un pallone ed attraverso alla poltigli si faceva passare per l'intera durata dell'esperienza una lenta corrente

(¹) Ciro Ravenna. Questi Rendiconti, vol. 25, I, pag. 649 (1916).
(²) Questi Rendiconti, vol. 18, II, pag. 594.

di ossigeno; per le sostanze volatili, il miscuglio veniva invece rinchiuso alla lampada in matracci riempiti di ossigeno di una capacità sufficiente per la ossidazione delle sostanze impiegate.

Ci siamo assicurati che l'azione ossidante è dovuta realmente ad enzimi, perchè sterilizzando la poltiglia in autoclave non si ha più nessun effetto. Allo scopo di accertare che lo scomparire delle materie impiegate nei singoli casi dipendesse da un processo di ossidazione non abbiamo tralasciato di eseguire prove di confronto in atmosfera di anidride carbonica. Per il dosamento delle sostanze, veniva anzitutto preparato l'estratto acquoso del contenuto dei palloni o dei matraci e portato ad un noto volume, che era spesso di due litri. Su tutto o sopra una parte aliquota del liquido si procedeva poi alla determinazione quantitativa delle sostanze ancora presenti con appropriati metodi di cui non daremo qui la descrizione, rimandando alle nostre più particolareggiate pubblicazioni nella Gazzetta chimica. Sebbene l'estratto acquoso della poltiglie venisse fatto con le maggiori cure, pure era impossibile evitare delle perdite; però abbiamo fatto sempre la prova di controllo: a questo scopo mescolavamo la sostanza esaminata, sciolta in mezzo litro d'acqua. con la poltiglia preparata da mezzo chilogr. di spinaci, facendo subito l'estratto e su questo poi il dosamento. In molti casi ci siamo per ora accontentati di determinare la quantità della materia rimasta inalterata, senza ricercare la natura dei prodotti dell'ossidazione avvenuta, problema che presenta spesso notevoli difficoltà; per questa parte i nostri attuali studi devono essere considerati ancor preliminari. Nei casi in cui poterono essere approfonditi, abbiamo comparato l'azione ossidante delle piante con quella catalitica della luce.

Abbiamo incominciato le nostre esperienze con alcune sostanze aromatiche. A questo proposito diremo subito che il *toluolo* $C_6H_5CH_3$, il quale per autossidazione alla luce (1) dà l'acido benzoico, non viene alterato dagli enzimi delle foglie di spinaci: però lo si può impiegare, come abbiamo fatto, per mantenere sterile la poltiglia senza temere di introdurre fra i prodotti dell'ossidazione delle sostanze esaminate, elementi loro estranei.

Ci sembrò poi opportuno di comparare il contegno dell'*acido benzoico*, $C_6H_5 . COOH$, con quello dell'*acido salicilico*, $C_6H_4(OH) . COOH$. Il primo resta inalterato, perchè la prova di controllo dette 1,64 gr. in confronto di 1,60 gr. ottenuti da quella coll'ossigeno. L'acido salicilico invece viene abbastanza largamente ossidato: si ebbero 1,08 gr. in confronto dei 1,48 gr. della prova di controllo. Analoghi risultati si ottennero impiegando i relativi sali sodici.

L'*alcool salicilico* o *saligenina*, $C_6H_4(OH) . CH_2OH$, che ci interessava per le esperienze fatte su larga scala negli anni scorsi relativamente alla

(1) Vedi G. Ciamician e P. Silber, *Azioni chimiche della luce*, XXI Nota. Questi Rendiconti, vol. 20, II, pag. 674.

sua trasformazione nel glucoside salicina, è assai più ossidabile: da 1,50 gr. della prova di controllo ne rimasero soltanto 0,50; si notò inoltre la formazione di piccole quantità di acido salicilico. Assai rimarchevole è poi il fatto che invece in atmosfera di anidride carbonica la saligenina si trasforma in gran parte in quella specie di polianidride, che è chiamata saliretina. Impiegando invece degli spinaci la poltiglia di mele, la trasformazione della saligenina in saliretina ha luogo assai prontamente ed anche in corrente di ossigeno; l'acido salicilico viene invece ossidato come con gli spinaci.

Va messo in rilievo il fatto che tanto l'acido salicilico quanto la saligenina non si autossidano alla luce. Accade dunque per queste due sostanze l'opposto di quanto avviene col toluolo.

Appariva interessante lo studio dell'*acido cinnamico*, $C_6H_5 — CH = CH — COOH$, perchè poteva essere intaccato al doppio legame. Alla luce realmente accade parzialmente così, perchè si formano l'aldeide e l'acido benzoico, la parte maggiore si trasforma peraltro nel dimero acido $\alpha$-trussilico [1]. Con gli enzimi degli spinaci in atmosfera di ossigeno l'acido cinnamico resta invece quasi tutto inalterato e solo in piccole tracce si trasforma nell'isomero acido isocinnamico. È strano che questa isomerizzazione non ha luogo in atmosfera di anidride carbonica.

Anche la *cumarina*, che alla luce [2] si polimerizza, e meglio in presenza di ossigeno che da sola, non viene alterata dagli enzimi.

L'*acido mandelico*, $C_6H_5.CHOH.COOH$, che per azione della luce [3] si autossida e dà analogamente al lattico l'aldeide benzoica ed inoltre quella salicilica, dagli enzimi viene convertito in un composto non estraibile con l'etere e che deve scindersi per ebollizione con acido solforico diluito, perchè così si riottiene l'acido impiegato. Dall'estratto acquoso di 10 gr. se ne ebbero da prima soltanto 0,5 e dopo l'idrolisi 7. È curioso che in atmosfera di anidride carbonica l'acido mandelico resta invece inalterato. L'esame ulteriore di questa reazione va ripreso.

Anche lo studio del contegno di alcuni acidi della serie grassa con gli enzimi è stato fatto in comparazione con le ossidazioni alla luce.

L'*acido ossalico*, COOH-COOH [4], viene ossidato quasi completamente tanto per azione della luce che con gli enzimi. In quest'ultimo caso da 10 gr. se ne riottennero soltanto 1,9.

Assai diverso è invece il contegno dell'*acido succinico* [5], $COOH-CH_2-CH_2-COOH$; mentre alla luce esso dà in piccola parte il gliossale, l'aldeide

[1] Vedi G. Ciamician e P. Silber, *Azioni chimiche della luce*, Nota XXV. Questi Rendiconti, vol. 22, I, pag. 546.

[2] Gli stessi. Nota XXVIII. Ibid. vol. 23, I, pag. 116.

[3] Gli stessi. Nota XXV. Ibid. vol. 22, pag. 540.

[4] Gli stessi. Nota XXVIII. Ibid. vol. 23, I, pag. 114.

[5] Gli stessi. Nota XXVIII. Ibid. vol. 23, I, pag. 115.

acetica e gli acidi acetico e forse propionico, con gli enzimi non dà che l'aldeide acetica, mentre una parte si trasforma in un composto scindibile dall'emulsina. La quantità di acido succinico libero, presente nell'estratto di 10 gr., era solo di 2,35 gr.; dopo l'azione dell'emulsina se ne trovarono 3,37.

L'*acido lattico*, $CH_3.CHOH.COOH$, che per antossidazione alla luce da analogamente al mandelico, l'aldeide e l'acido acetico [1], non ci fornì con gli enzimi che la prima.

Coll'*acido malico*, $COOH.CH_2.CHOH.COOH$. si ebbe alla luce [2] oltre a prodotti non bene definiti, le aldeidi formica ed acetica ed i relativi acidi formico ed acetico. Con gli enzimi soltanto la seconda.

L'*acido tartarico*, $COOH.CHOH.CHOH.COOH$, ha un contegno che ricorda quello dell'acido succinico. Alla luce [3] esso si autossida per dare segnatamente il gliossale CHO-CHO, un composto probabilmente della formola CHO-CO-COOH ed accanto a questi acido formico. Con gli enzimi la metà circa dell'acido sparisce, nel senso che non è più dosabile direttamente; la prova di controllo dette gr. 8,27, mentre nell'estratto della poltiglia in corrente di ossigeno, se ne ritrovarono solo 4,51; siccome un simile fatto si ripetè anche in atmosfera di anidride carbonica, così la perdita assai rilevante non potè venire attribuita soltanto ed un processo di ossidazione. Le prove fatte per accertare se si fossero formate sostanze simili a quelle ottenute alla luce, non dettero risultati bene definiti. Facendo poi agire sull'estratto l'emulsina, risultò una quantità di acido tartarico maggiore di quella determinata direttamente: nell'esperienza in atmosfera di anidride carbonica, se ne ebbero dai 10 gr. introdotti, direttamente solo 4, dopo l'azione dell'emulsina 6,7. Sembrerebbe dunque anche in questo caso che gli enzimi determinassero la formazione di un composto che, come i glucosidi, è scindibile dall'emulsina.

Appariva interessante esaminare il contegno di alcuni acidi amidati anche per vedere se le piante, in caso di accumulo di questi prodotti nel metabolismo delle proteine, fossero in grado di disfarsene per mezzo degli enzimi ossidanti. Abbiamo fatto la prova con la *glicocolla*, $CH_2NH_2.COOH$, l'*alanina*, $CH_3.CHNH_2.COOH$, e l'*asparagina*, $COOH.CHNH_2.CH_2.CONH_2$, ed abbiamo trovato che le due prime restano inalterate, mentre la terza viene ossidata: dei 2 gr. non se ne rinvennero che 0,55. Il fatto non è senza interesse perchè l'asparagina è uno di quei composti amidati che più frequentemente si forma nelle piante e che però esse sanno proteggere dagli agenti ossidanti.

(1) Vedi G. Ciamician e P. Silber, *Azioni chimiche della luce*. Nota XXV, vol. 22, I, pag. 540.

(2) Ibid. pag. 541.

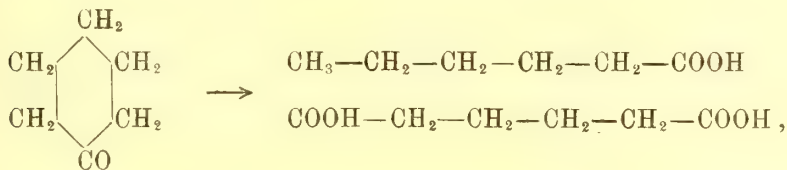
(3) Ibid. pag. 542.

Passando agli alcooli, alle aldeidi ed ai chetoni, abbiamo trovato anzitutto che tanto l'*alcool etilico*, $CH_3CH_2.OH$, che la *mannite*, $C_6H_{14}O_6$ restano pressochè inalterati: dei 10 gr. impiegati, se ne riottennero rispettivamente 8.9 e 8,35. Coll'alcool si ebbero tracce di acido acetico, con la mannite nessun accenno a riduzione. Del pari inalterata restò anche l'aldeide acetica. È stato dimostrato che anche alla luce i due primi non si ossidano ([1]), mentre lo fanno in presenza di sostanze autossidabli, ciò che starebbe a provare che il meccanismo delle ossidazioni nelle piante per mezzo degli enzimi è di altra specie.

Il *glucosio*, $C_6H_{12}O_6$, che alla luce resta del pari ([2]) inalterato, viene distrutto per azione degli enzimi in corrente di ossigeno, senza subire peraltro il processo della fermentazione. In atmosfera di anidride carbonica una parte resta intatta, mentre il resto si trasforma in una sostanza, che per idrolisi con acido solforico diluito si converte nuovamente in glucosio; dei 10 gr. impiegati, se ne dosarono direttamente 6 e dopo l'idrolisi 10,52; siccome la poltiglia di mezzo chilogr. di spinaci contiene l'equivalente di 1.58 gr. di glucosio, così si ha nell'estratto dopo l'idrolisi un totale di circa 9 gr. Non siamo per ora riusciti a riconoscere quale sia la natura del composto fermatosi che per idrolisi ritorna a glucosio.

Dei chetoni alifatici abbiamo sperimentato l'*acetone*, $CH_3.CO.CH_3$, ed il *metiletilchetone*. $CH_3.CO.C_2H_5$. Il primo viene autossidato come per azione della luce ([3]): si ottengono gli acidi acetico e formico ed inoltre l'aldeide formica. Il secondo subisce un'analoga ossidazione dando l'acido propionico e l'acido formico. Alla luce questo chetone si comporterà probabilmente nello stesso modo, ma l'esperienza non è stata fatta.

Nei ciclochetoni invece l'azione degli enzimi non corrisponde che in parte a quella della luce ([4]); mentre in quest'ultimo caso oltre all'idrolisi, che conduce ai rispettivi acidi grassi, si ottengono sempre gli acidi bibasici o chetonici corrispondenti al chetone impiegato, per cui ad esempio dal cicloesanone si formarono per autossidazione alla luce l'acido capronico e l'acido adipico:

$$\begin{array}{ccc} & CH_2 & \\ CH_2 & & CH_2 \\ CH_2 & & CH_2 \\ & CO & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} CH_3-CH_2-CH_2-CH_2-CH_2-COOH \\ COOH-CH_2-CH_2-CH_2-CH_2-COOH \end{array},$$

([1]) Vedi G. Ciamician e P. Silber, *Azioni chimiche della luce*. Nota XXVII. Questi Rendiconti, vol. 22, II, pag. 470 e seguenti.

([2]) Ibid.

([3]) Vedi G. Ciamician e P. Silber, *Azioni chimiche della luce*. Nota XXVI. Questi Rendiconti, vol. 22; II, pp 339 e seguenti.

([4]) Ibid.

con gli enzimi non abbiamo in nessun caso potuto ottenere gli acidi interi corrispondenti al chetone impiegato, ma invece sempre gli acidi grassi inferiori e qualche volta l'acido succinico.

Il *cicloesanone*, $C_6H_{10}O$, partendo da 10 gr., restò per 2 gr. inalterato e si ebbe oltre all'acido formico un miscuglio di acidi volatili, che, all'analisi dei sali argentici, dette numeri che stanno fra il butirrico ed il propionico.

L'*o-metilcicloesanone*, $C_6H_9OCH_3$, si comportò analogamente: dei 20 gr. impiegati se ne riottennero 5; fra i prodotti di ossidazione furono riconosciuti gli acidi propionico e formico.

Col *m-metilcicloesanone*, $C_6H_9OCH_3$, restò inalterata la metà dei 20 gr. impiegati; dai prodotti di ossidazione si potè in questo caso separare l'acido succinico; gli acidi volatili furono l'acido formico ed un miscuglio degli acidi propionico ed acetico.

Il *p-metilcicloesanone*, $C_6H_9OCH_3$, venne ossidato in tale misura che ne restarono 8 dei 20 gr. impiegati; gli acidi volatili erano formati oltre che dal formico, da un miscuglio il quale all'analisi dette numeri che stavano fra il propionico e l'acetico.

Il *mentone*, $C_6H_8O(CH_3)C_3H_7$, si comportò analogamente al m-metilcicloesanone; dei 10 gr. introdotti nel matraccio se ne riebbero 2,5. Dalla parte non volatile degli acidi si è potuto separare l'acido succinico; quelli volatili erano formati dal formico, acetico e probabilmente anche dal propionico. Alla luce il mentone si comporta analogamente agli altri ciclochetoni e dà l'acido chetonico corrispondente [1].

Da queste esperienze risulta dunque che gli enzimi delle foglie di spinaci esercitano sui ciclochetoni un'azione ossidante, che va oltre a quella determinata dalla luce e dagli ossidanti minerali moderati.

In fine abbiamo esaminato la *piridina* e la *piperidina* ed alcuni alcaloidi vegetali. Le due prime restano inalterate. Il contegno degli altri fu il seguente: la *nicotina* non venne ossidata e così pure la *stricnina* e la *caffeina*; per queste due ultime le prove di confronto dettero rispettivamente 1,8 e 1,72 gr. e quelle di ossidazione tutte e due 1,70 gr. Invece la *morfina* con 1,9 gr. rispetto a 0,62 e la *chinina* e la *cinconina* con 1,82 gr. e 1,70 gr. nelle prove di controllo e rispettivamente 0,70 e 0,70 nelle altre, dimostrarono di subire in larga misura l'ossidazione determinata dagli enzimi vegetali.

---

Queste esperienze dimostrano dunque che anche nelle piante morte esistono degli enzimi capaci di determinare delle ossidazioni elettive, che possono essere anche molto energiche, ed inoltre degli effetti sintetici, come la tra-

[1] Vedi G. Ciamician e P. Silber, *Azioni chimiche della luce*. Nota XIV. Questi Rendiconti, vol 18, I, pag. 310.

sformazione della saligenina in saliretina e quelli di composti scindibili dell'emulsina o dagli acidi diluiti osservati col glucosio e con gli acidi succinico, tartrico e mandelico. Per ora non ci è riuscito di riconoscere quali composti si formino in questi casi; ci ripromettiamo di ritornare, come s'è detto, segnatamente sull'acido mandelico, che subisce a quanto sembra la trasformazione più completa.

Con questi risultati stava peraltro in disaccordo il fatto che alcune sostanze come l'acido benzoico, la piridina, la piperidina e la nicotina, che resistono all'azione degli enzimi della poltiglia di spinaci, spariscono, se introdotti per inoculazione nel mais o nel tabacco, in modo da non ritrovarne che piccole quantità nei rispettivi estratti delle piante esaminate. Per la piridina e la nicotina abbiamo dimostrato l'anno scorso [1] che queste basi, se inoculate nel mais allo stato di tartarati, vengono almeno in parte eliminate con la traspirazione per mezzo delle foglie, ma un esperienza eseguita quest'anno col benzoato sodico sempre nel mais, ci ha insegnato che l'acido benzoico non subisce la stessa sorte. Si poteva però supporre che nelle piante vive avesse luogo un'ossidazione più energica.

Per chiarire questo punto assai importante abbiamo inoculato in 25 piante di mais, complessivamente 36 gr. di benzoato sodico. L'estrazione venne eseguita nello Stabilimento Carlo Erba di Milano e sentiamo l'obbligo di esprimere al dott. Giovanni Morselli, procuratore generale della Ditta, la nostra riconoscenza per la grande gentilezza con cui volle anche questa volta venire in nostro aiuto. Determinando l'acido benzoico in una parte aliquota, risultarono presenti nell'estratto totale soltanto 8,9 gr., per cui dei 30,5 gr. di acido benzoico, corrispondenti ai 36 gr. di benzoato sodico, inoculati, 21,6 gr. erano scomparsi. L'acido benzoico greggio riottenuto, dava la reazione dell'acido salicilico, ma ciò naturalmente non bastava a dimostrare che la scomparsa era dovuta ad un processo di ossidazione. Se ne ebbe la prova, dosando ed esaminando gli acidi volatili formatisi. Mentre le piante di mais per se stesse dànno un distillato appena acido, da quelle inoculate si ebbe un'acidità complessiva corrispondente a 25 gr. di acido acetico. Gli acidi rinvenuti nel distillato dell'estratto, acidificato con acido solforico, furono il *formico*, l'*acetico* ed il *propionico*. Se si calcola a quanto acido acetico, che rappresenterebbe in certo modo la media dei tre, corrisponda l'acidità proveniente dall'ossidazione di 21,6 gr. di acido benzoico, si trova 31,86 gr., numero non molto discosto dai 25 gr. trovati. Però è lecito affermare che la parte mancante dell'acido benzoico inoculato nel mais, era stata distrutta per ossidazione e trasformata precipuamente nei tre acidi su menzionati.

Questo risultato è analogo a quelli avuti coi ciclochetoni sopra ricordati che, essendo meno resistenti, vengono ossidati già dalla poltiglia di spinaci.

[1] Vedi la nostra Nota *Sulla influenza di alcune sostanze organiche sullo sviluppo delle piante*. Nota II. Questi Rendiconti, vol. 27, I, pag. 42.

L'energico potere ossidante delle piante e massime di quelle vive, non deve essere determinato dalle solite ossidasi, ma più probabilmente da enzimi protoplasmatici, insolubili nell'acqua ed a quanto sembra anche nella glicerina.

Questi fatti confermano ciò che abbiamo detto in via di supposizione in un altro nostro lavoro [1], cioè che le piante possiedono mezzi assai efficaci per eliminare i rifiuti organici: quello dell'ossidazione. È però se in alcune di esse si rinvengono quelle così dette sostanze accessorie, come i glucosidi, gli alcaloidi ecc., queste non possono essere riguardate esclusivamente come materie escrementizie, perchè alle piante non mancherebbero al caso i mezzi per eliminarle.

Ringraziamo infine le signorine dott. Angela Puricelli e Paolina Cicognari, che ci hanno assai assiduamente ed efficacemente coadiuvati in queste ricerche.

## Chimica. — *Sopra un nuovo modo di formazione del nero di pirrolo.* Nota del Socio A. Angeli e di A. Pieroni.

È ben conosciuta la proprietà del pirrolo di colorarsi all'aria; per tal modo esso subisce senza dubbio dei processi di ossidazione e lentamente assume colorazioni che vanno dal giallo al bruno a seconda che l'ossidazione è più o meno progredita. Ma per tal modo non si arriva a prodotti che si possano chiamare materie coloranti: anche esaminando campioni che avevano subìto per qualche anno l'azione dell'aria e perciò dell'ossigeno, mai si è constatato che la tinta assumesse notevole intensità. Solamente per azione prolungata di qualche mese, dell'ossigeno in presenza della luce è possibile arrivare ad un prodotto nero bruno, quasi insolubile in tutti i solventi e la cui composizione e comportamento si accosta molto a quella del nero di pirrolo ottenuto nei modi precedentemente descritti [2]. Sarebbe stato nostro desiderio anche di studiare il comportamento del pirrolo rispetto all'ozono, nei diversi solventi, ma non ci fu possibile eseguire l'esperienza per mancanza del voluto dispositivo. Ma d'altra parte era prevedibile, che nelle opportune condizioni, l'aria stessa avesse potuto agire sopra alcuni derivati molto semplici del pirrolo, in modo da dare origine ai neri corrispondenti. Frankland [3] nel corso delle sue classiche esperienze sopra lo zincoetile, ha studiato anche l'azione dell'ossigeno sopra questa sostanza ed ha trovato che in tal modo si forma un prodotto che egli considerava come etilato di

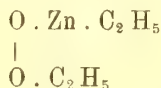
[1] Vedi la nostra Nota *Sulla influenza di alcune sostanze organiche sullo sviluppo delle piante.* Nota I. Questi Rendiconti, vol. 26, I, pag. 3.

[2] Angeli e Alessandri, Questi Rendiconti, *25* (1916), 1° semestre, pag. 772.

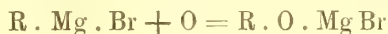
[3] Ann. Chem. Pharm., *95*, 46.

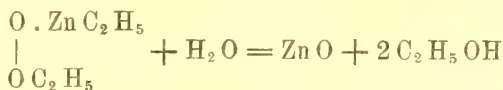
zinco $Zn(OC_2H_5)_2$. Le esperienze di Frankland sono state ripetute più tardi da R. Demuth e Victor Meyer [1]; a questi autori è sembrato poco verosimile che in tal modo potesse ingenerarsi un alcolato, e studiando meglio i caratteri del composto, che in tal modo si forma, hanno trovato che esso possiede proprietà dei perossidi; per riscaldamento esplode e mette in libertà iodio dalle soluzioni di ioduro di potassio.

Per questa ragione essi ammettono che il composto di Frankland sia in gran parte costituito da un prodotto della forma

$$\begin{array}{l} O \,.\, Zn \,.\, C_2H_5 \\ | \\ O \,.\, C_2H_5 \end{array}$$

isomero dell'alcoolato di zinco: $Zn\begin{array}{l} \diagup O\,C_2H_5 \\ \diagdown O\,C_2H_5 \end{array}$

Abbiamo giudicato perciò opportuno prendere in esame anche il comportamento dei composti metallici del pirrolo. Le esperienze eseguite sopra il pirrolpotassico non sono ancora compiute e perciò in questa breve comunicazione ci limiteremo ad accennare ai risultati ottenuti per azione dell'aria sopra il derivato alogenomagnesiaco del pirrolo; come è noto, al pari delle basi azotate primarie e secondarie [2], anche il pirrolo reagisce con tutta facilità con il reattivo di Grignard; si elimina idrocarburo e rimane una soluzione del composto magnesiaco [3]. Da quanto a noi risulta, finora non è stato oggetto di studio speciale l'azione dell'ossigeno sopra i composti organomagnesiaci. Secondo L. Bouveault si formano derivati degli alcool:

$$R\,.\,Mg\,.\,Br + O = R\,.\,O\,.\,MgBr$$

perchè trattando il prodotto della reazione con acqua si ha l'alcool corrispondente. In modo analogo impiegando i composti organomagnesiaci dei derivati aromatici, F. Bodroux [4] ha potuto pervenire ai fenoli corrispondenti. Ciò però non dimostra che le vedute di Bouveault siano esatte, giacchè come hanno dimostrato Demuth e Victor Meyer, anche il composto di Frankland, senza essere un alcolato, per azione di acido solforico diluito viene idrolizzato e fornisce con tutta facilità alcool:

$$\begin{array}{l} O\,.\,Zn\,C_2H_5 \\ | \\ O\,C_2H_5 \end{array} + H_2O = ZnO + 2\,C_2H_5OH$$

Ora se anche dai derivati pirrolici in una prima fase per azione dell'ossigeno si formano perossidi, data la grande facilità dell'anello pirrolico,

[1] Berliner Berichte, XXIII (1890), pag. 394.

[2] L. Meunier, Compt. Rend., *136* (1903), pag. 758.

[3] B. Oddo, Gazzetta Chimica, *29* (1909), pag. 649.

[4] Compt. Rend., *136*, 158 (1903).

come ha posto in rilievo uno di noi [1] di agire con gli ossidanti per formare prodotti intensamente colorati, era da aspettarsi che anche in tal modo avessero potuto prendere origine dei neri di pirrolo. L'esperienza ha subito verificato che le nostre previsioni erano esatte.

Gr. 7 di pirrolo vengono trattati con la quantità calcolata di ioduro di etilmagnesio in soluzione eterea molto diluita, e nel liquido raffreddato con acqua si fa passare una debole corrente di aria purificata con potassa e successivamente con acido solforico.

Il liquido dapprima quasi incoloro, va assumendo una tinta verdognola che si fa sempre più intensa tanto che dopo qualche ora è diventato quasi nero. Siccome la corrente d'aria esporta una notevole quantità di etere, così di quando in quando è necessario aggiungere nuovo solvente. Contemporaneamente va separandosi una polvere nerissima, tanto che dopo alcune ore il liquido appare così inspessito da assumere la forma di poltiglia. Dopo 24 ore di passaggio d'aria la reazione si può considerare come terminata. Si tratta allora il prodotto poco per volta con piccole quantità di acqua ghiacciata; in tal modo il liquido si divide in due strati: uno etereo sovrastante che si separa ed uno acquoso che si raccoglie su filtro alla pompa. Si ottiene così una polvere nera che si lava con acqua fino a che questa non presenta più la reazione degli alogeni e successivamente con acido acetico. Il prodotto, infine, si pone in un mortaio, si tritura con acido solforico diluito e si lascia ancora per alcune ore a contatto dell'acido allo scopo di asportare la quasi totalità del magnesio. Si lava in seguito con acqua e si secca in stufa a 100° fino a costanza di peso.

Si ottiene così una polvere nerissima, che trattiene ancora circa il 0,3 % di ceneri, che non ci riuscì di esportare malgrado tutti i lavaggi cui venne sottoposta. Siccome tale residuo porta un errore di circa 0,2 % sul carbonio e minore ancora sull'idrogeno, così esso venne trascurato senz'altro.

I. gr. 0.2190 di sostanza diedero gr. 0.4712 di $CO_2$ e gr. 0.0665 di acqua
II. gr. 0.1330 » » gr. 0.2860 di $CO_2$ e gr. 0.0425 »
III. gr. 0.2385 di sostanza, secondo Kjeldahl, richiesero cc. 27,65 di HCl $^{N}/_{10}$
da cui si calcola in 100 parti:

| | I | II | III |
|---|---|---|---|
| C . . . . . . | 58.68 | 58.64 | — |
| H . . . . . . | 3.38 | 3.54 | — |
| N . . . . . . | — | — | 16.11 |

Le due combustioni vennero eseguite nel Laboratorio di Firenze dal prof. G. Cusmano.

Il prodotto ha un nero molto più intenso di quello ottenuto coi metodi prima descritti, tanto che ha l'aspetto del nero di acetilene. Al pari degli

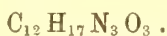
(1) Questi Rendiconti, *24* (1915), 2° semestre, pag. 3.

altri neri e di tutte le melanine naturali, esso non fonde, ma fornisce vapori che arrossano fortemente un fuscello di legno bagnato con acido cloridrico; è insolubile in tutti gli ordinarî solventi, come gli altri neri di pirrolo; ma, a differenza di quello ottenuto per mezzo dell'acido peracetico, esso non si scioglie nemmeno negli alcali. Anche esso viene ossidato lentamente dalla soluzione acetica di acqua ossigenata, oppure dalle soluzioni acquose e diluite di permanganato di potassio, ovvero dalla soluzione di bicromato in acido solforico diluito, come fanno tutti i neri di pirrolo e le melanine naturali. Esso, come fanno gli altri neri precedentemente descritti, e in modo del tutto simile ad una ippomelanina ottenuta dai tumori dei cavalli secondo il metodo di Fürth e Jerusalem [1] e del pari insolubile negli alcali. viene facilmente ossidato dalle soluzioni alcaline di acqua ossigenata, ovvero anche dal perossido di sodio. Per tale trattamento il liquido acquoso si riscalda fortemente ed il prodotto passa in soluzione con intensa colorazione giallo-bruna. Acidificando con acido solforico diluito si ha un precipitato che non abbiamo ancora esaminato: senza dubbio si tratta di prodotti di ossidazione e di idrolisi, vale a dire di termini di demolizione successiva dei neri di pirrolo e che ci riserviamo di studiare.

Riuniamo in questa tabella le composizioni centesimali ricavate dalle analisi di alcuni dei colori che finora abbiamo esaminati: ci siamo limitati alla prima cifra decimale, e siccome ci mancano molti altri dati, abbiamo giudicato superfluo calcolare formule dai dati ottenuti.

| Colori | C | H | N | O |
|---|---|---|---|---|
| Nerissimi . . . . | 58.6 | 3.4 | 16.0 | 22.0 |
| Neri . . . . . . | 60.0 | 4.8 | 15.9 | 19.3 |
| Bruni . . . . . . | 58.2 | 4.8 | 15.2 | 21.1 |
| Rosso-marrone . . | 55.2 | 4.9 | 14.2 | 25.7 |
| Giallo bruni . . . | — | — | — | — |
| Bianco giallognolo | 57.7 | 6.9 | 16.8 | 18.6 |

I colori giallo bruni non vennero ancora esaminati; e, come si è detto, essi sono costituiti da quei prodotti che si ottengono dai neri per azione dell'acqua ossigenata in presenza di alcali. L'ultimo prodotto, quello bianco giallognolo, molto probabilmente è un derivato del tripirrolo e la sua composizione concorda con quella voluta dalla formula

$$C_{12}H_{17}N_3O_3 .$$

Come si è già detto, esso si forma assieme ai neri di pirrolo quando si opera

[1] Ringrazio il chiarissimo prof. F. Angelico dell'Università di Messina che mi ha regalato una notevole quantità di questo interessante prodotto da lui stesso preparato.
A. Angeli.

con acido peracetico ed è caratteristico per la facilità con cui fornisce prodotti colorati in azzurro.

Accenneremo, infine, che i neri di pirrolo, a somiglianza dei neri di anilina, reagiscono con tutta facilità anche con la fenilidrazina; sopra i prodotti che in tal modo si formano riferiremo in altre comunicazioni.

## Geometria. — *Fondamenti della geometria proiettivo-differenziale dei complessi e delle congruenze di rette.* Nota I del Corrispondente Guido Fubini.

1. Scopo della presente ricerca è di dare un sistema di forme differenziali del primo ordine invarianti per collineazioni, e di significato *intrinseco* (cioè indipendente dalla scelta delle variabili coordinate) per individuare una congruenza od un complesso di rette, di interpretare geometricamente i risultati ottenuti, di scrivere le equazioni differenziali che dalle forme citate permettono di risalire alla congruenza o complesso; le condizioni di integrabilità relative sono nella geom. proiettiva dei sistemi di rette *l'analogo delle equazioni di Gauss e Codazzi* nella geom. metrica delle superficie. Tali forme sono tre di secondo grado, legate da certe condizioni di coniugio (apolarità), o, se si vuole, sono nel caso di congruenze due sole forme, una di secondo, ed una di quarto grado. *La ricerca di tutti gli invarianti proiettivi di una congruenza o complesso è così ridotta alla ricerca,* che si sa eseguire con metodi classici, *degli invarianti di un tale sistema di forme.* Le prime due forme relative a un complesso si conservano non solo per collineazioni, ma anche *per deformazioni proiettive* e possono definire delle geometrie metriche *completamente determinate dal complesso e che si conservano in tali trasformazioni.* Queste due forme quadratiche determinano tre sistemi di $\infty^1$ rigate del complesso, che sono l'analogo delle linee di curvatura di una superficie; non sarebbe difficile estendere sia ai complessi che alle congruenze le nozioni di geodetiche, di curvatura, ecc., svolgendo per essi una teoria analoga a quella che si svolge per le superficie. I metodi che io espongo in una mia Memoria in corso di stampa negli Annali di Matematica potrebbero servire p. es. a determinare tutti i complessi con un gruppo continuo di Lie di deformazioni proiettive in se stessi, ecc. ecc.

Uso l'algoritmo del calcolo assoluto di Ricci e i differenziali controvarianti (¹); a proposito dei quali ci basti ricordare che, se $x$ è una funzione delle $u_r$, allora la formula elementare $d^2x = \Sigma x_i\, d^2 u_i + \Sigma x_{rs}\, du_r\, du_s$ con-

(¹) Cfr. una mia Nota in corso di stampa negli Atti della R. Accad. d. Scienze di Torino.

tinua a valere se al posto delle $x_{rs}$ e delle $d^2u$ si scrivono le derivate covarianti, e i differenziali controvarianti.

I metodi qui esposti si possono applicare a *tutti i problemi relativi ad enti geometrici, le cui coordinate sono legate da una relazione quadratica*: p. es. alle ipersuperficie, e ai sistemi di sfere o ipersfere rispetto al gruppo conforme di uno spazio euclideo [1].

2. *Sistemi di rette.* Indicheremo le coordinate proiettive di rette con $x, y, z, p, q, r$ supposte legate dalla [2]

$$(1) \qquad \mathrm{S}x^2 = x^2 + y^2 + z^2 + p^2 + q^2 + r^2 = 0 .$$

Non si introdurranno però inutilmente quantità complesse, perchè avremo cura di far comparire soltanto quadrati delle $p, q, r$, e delle loro derivate.

Un sistema di rette si definirà dando le $x$, ecc. (cioè le $x, y, \dots, r$) in funzione di $n$ parametri $u_i$ $(i = 1, \dots, n)$. È $n = 1$ per le superficie rigate, che noi qui non studiamo; è $n = 2$ per le congruenze; $n = 3$ per i complessi. Evidentemente da (1) segue

$$(2) \qquad \mathrm{S}x\, x_j = 0 \qquad (j \leq n).$$

Porremo

$$(3) \qquad \varphi = \Sigma a_{js}\, du_j\, du_s = \mathrm{S}dx^2 ;$$

ne supporremo *il discriminante* $\Delta \neq 0$ (col che escludiamo le congruenze a falde focali coincidenti, e i complessi delle tangenti a una superficie); indicheremo con $\mathrm{A}_{js}$ il complemento algebrico di $a_{js}$ in $\Delta$, diviso per $\Delta$, con $\left\{ {ik \atop l} \right\}$ i simboli di Christoffel di seconda specie. Da (2), (3) si deduce, usando derivate covarianti secondo $\varphi$:

$$(4) \quad a_{js} = \mathrm{S}x_j\, x_s = -\mathrm{S}x\, x_{js} \;;\; \mathrm{S}x_j\, x_{st} + \mathrm{S}x_s\, x_{jt} = -\mathrm{S}x_t\, x_{js} - \mathrm{S}x\, x_{jst} = a_{jst} = 0$$

(perchè le derivate covarianti di $a_{js}$ sono nulle). Se ne deduce tosto:

$$(5) \qquad \mathrm{S}x_j\, x_{st} = \mathrm{S}x\, x_{jst} = 0 .$$

Porremo:

$$(6) \qquad \Delta_2 x = \Sigma \mathrm{A}_{js}\, x_{js} \;;\; \Delta_1 x = \Sigma \mathrm{A}_{js}\, x_j\, x_s \;;\; \mathrm{D}_2 x = \Sigma x_{js}\, du_j\, du_s \;;$$
$$\mathrm{D}_3 x = \Sigma x_{jst}\, du_j\, du_s\, du_t .$$

[1] Per le superficie dello spazio ordinario non si troverebbe nulla di nuovo. Cfr. l'ultimo paragrafo della mia Mem.: *Applicabilità proiettiva di due superficie* (Rend. del Circ. Matem. di Palermo, 1916, tomo 41).

[2] Una somma sarà indicata con S, o con $\Sigma$ secondo che i suoi addendi si ottengono l'uno dall'altro sostituendo alla $x$ le $y, z$, ecc., oppure facendo variare gli indici.

Per (5) sarà

$$-\,S x_{jh}\, x_{st} = S x_j\, x_{sth}\,, \tag{7}$$

donde

$$-\,S\,(D_2 x)^2 = S dx\, D_3 x\,. \tag{8}$$

Le coordinate $x\,,y\,,\ldots$ sono *determinate a meno di un fattore*: che cosa avviene se ad esse sostituiamo le $\overline{x} = \varrho x\,, \overline{y} = \varrho y$ ecc.? Il nuovo valore $\overline{\varphi}$ della (3) è evidentemente $\varrho^2 \varphi$; le $\overline{x}_{rs}$ saranno le derivate covarianti di $\overline{x} = \varrho x$ rispetto non più alla $\varphi$, ma alla $\overline{\varphi} = \varrho^2 \varphi$. Si trova facilmente, ponendo $\varepsilon_{hh} = 1\,, \varepsilon_{hk} = 0$ per $h \neq k$, e indicando con un soprassegno i nuovi valori delle nostre espressioni, che:

$$\left\{\begin{aligned}
&\overline{x} = \varrho x\ ;\ \overline{\varphi} = \varrho^2 \varphi\ ;\ \overline{A}_{hk} = \frac{1}{\varrho^2} a_{hk}\ ;\ \overline{\Delta} = \varrho^3 \Delta\ ;\ \overline{a}_{rs} = \varrho^2 a_{rs}\\
&\overline{\begin{pmatrix} hk \\ l \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} hk \\ l \end{pmatrix} + \varepsilon_{hl} (\log \varrho)_k + \varepsilon_{hl} (\log \varrho)_k - a_{hk} \sum_m A_{lm} (\log \varrho)_m\\
&\overline{x}_{rs} = \varrho\, x_{rs} + x\left(\varrho_{rs} - \frac{2}{\varrho}\, \varrho_r\, \varrho_s + \frac{1}{\varrho}\, a_{rs}\, \Delta_1 \varrho\right) + a_{rs} \sum_{l,m} A_{lm}\, \varrho_l\, x_m\\
&\overline{\Delta_2 x} = \frac{1}{\varrho}\, \Delta_2 x + x\left(\frac{1}{\varrho^2}\, \Delta_2 \varrho + \frac{n-2}{\varrho}\, \Delta_1 \log \varrho\right) + \frac{n}{\varrho^2} \Sigma A_{lm}\, \varrho_l\, x_m\\
&\overline{D_2 x} = \varrho\, D_2 x + x\left(D_2 \varrho - \frac{2}{\varrho}\, d\varrho^2\right) + \frac{\varphi}{\varrho}\, x\, \Delta_1 \varrho + \varphi\, \Sigma A_{lm}\, \varrho_l\, x_m
\end{aligned}\right. \tag{9}$$

(e analoghe in $y$, ecc.; si noti che $\varrho_{rs}$ è calcolato secondo $\varphi$).

Ne deduciamo subito alcune conseguenze. Si ponga:

$$X = \frac{1}{n}\, \Delta_2 x \qquad \text{donde } S X x = -1 \qquad S X x_j = 0\,. \tag{10}$$

*Per ogni valore di $r\,,s$, il complesso lineare di coordinate $\overline{x}_{rs} - \overline{a}_{rs} \overline{X}$, ecc., varia nel fascio di complessi determinato dal complesso di coordinate $x_{rs} - X a_{rs}$ ecc. e dal complesso* (speciale) *di coordinate $x$*, ecc. (Con l'ecc. indico le quantità dedotte sostituendo $y\,,z\,,p\,,\ldots$ alla $x$).

$$\overline{x}_{rs} - \overline{a}_{rs} \overline{X} = \varrho\,(x_{rs} - a_{rs} X) + x\left[\varrho_{rs} - \frac{2}{\varrho}\, \varrho_r\, \varrho_s + \frac{2}{n}\, a_{rs}\, \Delta_1 \varrho - \frac{a_{rs}}{n}\, \Delta_2 \varrho\right]. \tag{11}$$

*Il complesso di coordinate $\overline{X}$*, ecc. *varia nel sistema lineare individuato dai complessi $x\,, x_s\,, X$. Questo sistema lineare è proprio $\infty^{n+1}$, perchè le $x\,, x_s\,, X$ formano $n+2$ sistemi linearmente indipendenti.* Se infatti fosse

$$a x + \sum_s b_s\, x_s + c X = 0 \quad \text{(e analoghe in } y\,,\ldots)$$

moltiplicando per $x$, sommando con le analoghe, se ne deduce per (2) e (10) che $c = 0$; moltiplicando per $x_t$ e sommando con le analoghe, si ha: $\sum_s b_s a_{st} = 0$ per ogni valore della $t$; e, poichè $\Delta \neq 0$, anche $b_s = 0$; donde segue $a = 0$.

*Il complesso di coordinate*

$$\xi = D_2 x + x\, S\, X\, D_2 x \quad \text{(e analoghe in } \eta, z, \pi, x, \varrho) , \tag{12}$$

*ove le $du_i$ siano considerate come parametri legati dalla $\varphi = 0$ resta immutato*; *e per le sue coordinate vale semplicemente la* $\bar{\xi} = \varrho \xi$. È per (2), (5), (10):

$$S \xi x = S \xi x_r = S \xi X = 0 . \tag{13}$$

*Ogni complesso $\xi$ è in involuzione col sistema lineare $\infty^{n+1}$ precedentemente considerato. Se $n = 2$, di tali complessi $\xi$ ce ne sono perciò due che indicheremo con $\xi$ e con $\xi'$; se $n = 3$ di tali complessi $\xi$ ce n'è uno solo*, come resterà confermato dai calcoli seguenti (mentre parrebbe che ce ne fossero $\infty^1$, dipendenti dai tre parametri $du_s$ legati dalla $\varphi = 0$). Che per $n = 2$ ci siano due complessi $\xi$ è evidente per il fatto che $\varphi = 0$ è un'equazione di secondo grado; siano infatti $R_1 : R_2$ ed $R'_1 : R'_2$ i due valori di $du : dv$, che annullano $\varphi$. Noi potremo ammettere che tanto le $R_i$ quanto le $R'_i$ si trasformino come le $du_i$, cioè che formino sistemi controvarianti. Le $R, R'$ sono determinate a meno di un fattore; e noi, lasciando ancora una indeterminazione, osservando che $\sqrt{\Delta}\,(R_1 R'_2 - R_2 R'_1)$ resta invariato per cambiamenti di variabili coordinate $u_j$, imporremo che tale espressione valga $i = \sqrt{-1}$ [1]. Con questa convenzione segue subito che:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\Delta}\,(R_1 R'_2 - R_2 R'_1) = i \;;\; R_s R'_s = \frac{1}{2} A_{ss} \;;\; R_1 R'_2 + R_2 R'_1 = A_{12} \\ \Sigma a_{hk} R_h R'_k = 1 \;;\; A_{11} R_2 R'_2 - 2 A_{12} (R_1 R'_2 + R_2 R'_1) + A_{22} R_1 R'_1 = \frac{1}{\Delta} . \end{array} \right. \tag{14}$$

3. *Complessi di rette.* Le (13) determinano le $\xi$, ecc. a meno di un fattore comune. Per determinare queste coordinate in modo *intrinseco*, noi le potremo porre uguali rispettivamente ai complementi delle stesse $\xi$ nel determinante $(x, x_1, x_2, x_3 . X, \xi)$ (di cui tra parentesi abbiamo scritto la prima riga, e le altre se ne deducono sostituendo alla $x$ le $y, z, \ldots$) divisi per $\sqrt{\Delta}$. (Se $\Delta < 0$, e il complesso fosse reale, otterremmo enti reali dividendo per $\sqrt{-\Delta}$). Si noti che: *Le $\xi, \eta, \ldots$. così definite restano inva-*

[1] Tale espressione è immaginaria se $\Delta > 0$, perchè $R_1 : R_2$ ed $R'_1 : R'_2$ sono in tal caso complessi coniugati; non mi occupo qui di ridurmi ad enti reali; tanto più che, come vedremo, la parte essenziale di questo studio riguarda espressioni sempre *reali* per congruenze *reali*.

*riate non solo cambiando le variabili* $u_s$, *ma anche moltiplicando le* $x, y, \ldots$ *per un qualsiasi fattore.*

Per la regola del quadrato di una matrice è per (2), (4), (10)

$$(15)\qquad S\xi^2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & SX^2 \end{vmatrix} = -1,$$ che rende evidente la $\bar{\xi} = \xi$.

*Nelle nostre ipotesi* $\Delta \neq 0$ *il nostro complesso* $\xi$ *non è mai speciale.* Ne vedremo ben presto il significato geometrico. I complessi di coordinate $x, x_r, X, \xi$ sono linearmente indipendenti. Perchè se fosse $ax + bX + c\xi + \Sigma h_r x_r = 0$ e analoghe in $y, \ldots$, allora moltiplicando per $\xi$ e sommando con le analoghe, si troverebbe per (13), (15) che $c = 0$; e quindi anche $a = b = h_r = 0$, perchè abbiamo già visto che le $x, X, x_r$ formano sistemi indipendenti. Perciò 6 quantità qualunque, in particolare le $x_{rs}$, $y_{rs}$, ecc. si possono scrivere nella forma:

$$x_{rs} = \alpha_{rs} X + b_{rs} x + c_{rs}\xi + \sum_t l^t_{rs} x_t \quad \text{(e analoghe in } y, \ldots)$$

ove le $\alpha, b, l$ sono quantità da determinare. Moltiplicando per $x$, sommando con le analoghe, si trova per (1), (4), (10), (13) $\alpha_{rs} = a_{rs}$. Moltiplicando per $x_h$ e sommando, si trova per (5) che $\sum_t l^t_{rs} a_{ht} = 0$, qualunque siano $r$, $s, h$. Poichè $\Delta \neq 0$, sarà $l^t_{rs} = 0$. Perciò

$$(16)\qquad x_{rs} = a_{rs} X + b_{rs} x + c_{rs}\xi \quad \text{ossia} \quad D_2 x = \varphi X + x\psi + \xi\chi, \text{ ove}$$

$$(16)_{bis}\qquad \chi = \Sigma\, c_{rs}\, du_r\, du_s = -\frac{1}{\sqrt{\Delta}}(x, x_1, x_2, x_3, X, D_2 x);$$

$$\psi = \Sigma\, b_{rs}\, du_r\, du_s.$$

Queste sono *le formole fondamentali*, che p. es. dalle forme $\varphi, \psi, \chi$ permettono di risalire al complesso. Moltiplicando le $x, y, \ldots$ per uno stesso fattore $\varrho$, le (9), (11), (15), (16) provano che:

$$(17)\qquad \bar{\varphi} = \varrho^2\varphi\,;\ \bar{\chi} = \varrho\chi\,;\ \bar{\psi} = \varrho\psi + D_2\varrho - \frac{2}{\varrho}d\varrho^2 + \varphi\left(\frac{2}{3\varrho}\Delta_1\varrho - \frac{1}{3}\Delta_2\varrho\right).$$

Vedremo come si possa *togliere tale indeterminazione* alle $\varphi, \psi, \chi$. La $\psi$, che ha il comportamento più complicato, è *la meno importante*, come vedremo. *Essa del resto si può rendere*, volendo, *proporzionale* a $\chi$, scegliendo uguale ad 1 una delle coordinate di retta. (Se p. es. $x = 1$, è $x_{rs} = D_2 x = X = 0$; e per (16) la $\psi$ vale $\lambda\chi$ ove $\lambda = -\xi$). Molti-

plicando (16) per $A_{rs}$ e sommando coi risultati ottenuti facendo variare gli indici $r, s$, si trova *che le forme* $\psi, \chi$ *sono coniugate alla reciproca della* $\varphi$, *cioè che*:

$$\Sigma A_{rs} b_{rs} = \Sigma A_{rs} c_{rs} = 0 . \tag{18}$$

Ma non pare opportuno rendere p. es. la $x = 1$, perchè tale uguaglianza non si conserva per trasformazioni proiettive. Consideriamo invece l'equazione di terzo grado in $\omega$ ottenuta uguagliando a zero il determinante $| \omega a_{rs} - c_{rs} |$, (discriminante di $\omega\varphi - \chi$). Se le tre radici di questa equazione sono nulle, allora, pensate le $du_r$ come coordinate omogenee di punto in un piano $\sigma$, le $\varphi = 0$, $\psi = 0$ rappresentano due coniche $C_\varphi, C_\chi$, di cui la seconda *coniugata* alla prima pensata come inviluppo. Perciò, *se le tre radici* $\omega_s$ *sono tutte e tre nulle*, *allora o la forma* $\chi$ *è identicamente nulla* (nel qual caso proveremo che il complesso *è lineare*), *oppure la* $C_\chi$ *si scompone in una retta tangente alla* $C_\varphi$, *e in un'altra retta passante per il punto di contatto.* Questo caso, che chiameremo il caso *anormale*, è da studiare a parte. Nel caso generale (caso *normale*), le radici $\omega_i$ si mutano in $\overline{\omega}_2 = \frac{\omega_r}{\varrho}$, se si moltiplicano le $x, y, \ldots$ per $\varrho$. Noi potremo determinare $\varrho$ in modo *razionale ed intrinseco*, imponendo che una funzione simmetrica delle $\omega_r$ [p. es. quella che si presenta come denominatore nelle formole di risoluzione delle seguenti equazioni (19)] *valga l'unità. Le altre due funzioni simmetriche*, indipendenti dalla precedente, *sono due invarianti proiettivi del complesso*, che credo non osservati finora, e che potremo chiamare *le curvature proiettive* del complesso. Fissato $\varrho$, restano determinate in modo intrinseco le *coordinate*, che diremo *normali*, di una retta del complesso, *le quali per una collineazione subiscono soltanto una trasformazione ortogonale a coefficienti costanti a determinate unità.* **Restano** anche determinate le forme $\varphi, \psi, \chi$, ciascuna delle quali definisce una *geometria metrica, completamente individuata dal complesso ed invariante per collineazioni* (finora era stata generalizzata la sola nozione di *angolo*: quello definito dalla metrica che ha $\varphi$ per elemento lineare).

Escludiamo, oltre al caso *anormale*, quello in cui le coniche $C_\varphi, C_\chi$ *siano bitangenti*: casi molto semplici, ma che si debbono studiare a parte. Negli altri casi proveremo che le (16) equivalgono ad *un sistema di equazioni ai differenziali totali.* Infatti, indicati con $(st, rp)$ i simboli a 4 indici di Riemann per $\varphi$, le condizioni di integrabilità di (16) sono per una formola di Ricci di calcolo assoluto

$$x_{rst} - x_{rts} = - \sum_{p,q} (st, rp) A_{pq} x_q$$

che diventano nel caso attuale:

$$(19)\quad a_{rs}X_t - a_{rt}X_s + c_{rs}\xi_t - c_{rt}\xi_s =$$
$$= (c_{rts} - c_{rst})\xi + (b_{rts} - b_{rst})x - b_{rs}x_t + b_{rt}x_s - \sum_{p,q}(st, rp)A_{pq}x_q$$

che, risolute rispetto alle $\xi_s, \xi_t, X_s\ X_t$, dànno queste *come combinazioni lineari delle* $x, x_p, \xi$ (¹). *Le* (16), (19) *costituiscono perciò un sistema di equazioni ai differenziali totali, che permettono di determinare un complesso di date forme* $\varphi, \psi, \chi$. *Le condizioni di integrabilità* (che non scrivo, anche per ragioni di spazio) *sono nella geometria proiettiva dei complessi l'analogo delle equazioni di Gauss e Codazzi nella geometria metrica delle superficie.* La

$$(16)_{bis}\qquad \chi = -\frac{1}{\sqrt{\Delta}}(x, x_1, x_2, x_3, X, D_2x)$$

dà, innalzando al quadrato, una semplice espressione per $\chi^2$, che si può dedurre anche da (16), ricordando (15):

$$(20)\quad \chi^2 = -S(D_2x - \varphi X - x\psi)^2 =$$
$$= -S(D_2x - \varphi X)^2 = -S(D_2x)^2 + 2\varphi SX D_2x - \varphi^2 SX^2$$

perchè $0 = Sx^2 = Sx(D_2x - \varphi X)$.

Si noti, per il confronto con la teoria delle congruenze che, posto

$$(21)\quad \begin{cases} h_{rspq} = -Sx_{rs}x_{pq}, \text{ si ha: } -S(D_2x)^2 = \Sigma h_{rspq}du_r du_s du_p du_q \\ -\Sigma X^2 = 1/9\, \Sigma h_{rspq}A_{rs}A_{pq}\ ;\ SX D_2x = -1/3\, \Sigma A_{rs}h_{rspq}du_p du_q\,. \end{cases}$$

4. *Interpretazione geometrica. Deformazione proiettiva di un complesso.* Sia $ax + by + cz + lp + mq + sr = 0$ $(a, b, c, l, m, s = \text{cost.})$ un complesso $\Gamma$ lineare tangente al complesso dato C lungo una certa retta $r$. Ivi sarà non solo $S\alpha x = 0$ (che è soltanto un modo conciso di scrivere la equazione del complesso $\Gamma$), ma anche $S\alpha r_r = 0$. Il complesso $\Gamma$ taglia il complesso dato C in altre rette infinitamente vicine alla $r$, determinate

(¹) Per riconoscere che le (19) sono risolubili *nella retta generica* $u_i = u_i^0$ si può p. es. ridurre per $u_i = u_i^0$ le $\varphi, \chi$ ad una qualche forma canonica. Se le coniche $C_\varphi, C_\chi$ hanno un solo punto comune, p. es. il punto $du_1 = du_2 = 0$, ridotta la $\varphi$ alla forma $du_2^2 + 2du_1du_3$, la $\chi$ sarebbe del tipo $\beta(du_2^2 + 2du_1du_3) + \alpha du_1^2$; ove, per (18), $\beta = 0$; e saremmo nel caso *anormale.* Se le due coniche hanno comune anche il punto $du_2 = du_3 = 0$, la $\chi$ sarà del tipo $\alpha du_2^2 + 2\beta du_1du_2 + 2\gamma du_1du_3 + 2\lambda du_2du_3$. Se il punto $du_1 = du_2 = 0$ è punto di contatto, la retta $\frac{1}{du_2}(\chi - \gamma\varphi) = 0$, cioè $(\alpha - \gamma)du_2 + 2\beta du_1 + 2\lambda du_3 = 0$ dovrà passare per esso; e quindi $\lambda = 0$. Poichè per (18) $\alpha + 2\gamma = 0$ (mentre nè siamo nel caso anormale, nè le due coniche sono bitangenti) è $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Si riconosce facilmente che in tal caso le (19) sono risolubili; ciò che avviene anche se $C_\varphi, C_\chi$ hanno quattro intersezioni distinte; come si vede, osservando che in tal caso si può supporre (per $u_i = u_i^0$) $\varphi = du_1^2 + du_2^2 + du_3^2$ ; $\psi = \alpha du_1^2 + \beta du_2^2 + \gamma du_3^2$ con $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \delta$.

dalla $S\Sigma\alpha x_{rs}\,du_r\,du_s=0$, cioè $\varphi S\alpha X+\chi S\alpha\xi=0$. Pensate le $u$ come coordinate di punto in uno spazio $\sigma$ a tre dimensioni, questa equazione determina un fascio di coni quadrici col vertice nel punto immagine di $r$. Ognuno di questi coni corrisponde a un complesso lineare $\Gamma$ tangente a C in $r$, e viceversa. *Il complesso $\xi$ è geometricamente il complesso cui corrisponde un cono quadrico $\chi=0$ apolare o coniugato al cono $\varphi=0$, pensato come inviluppo. Il sistema lineare di complessi definito dai complessi $x$, $x_r$, X è il sistema dei complessi in involuzione col complesso $\xi$.*

Vogliamo ora occuparci dell'applicabilità proiettiva di due complessi, che noi definiremo in modo analogo a quello usato per le superficie e ipersuperficie nella mia Memoria citata al § 1 di questa Nota.

Se abbiamo un altro complesso $C^0$, luogo della retta $x^0, y^0, \ldots$, funzioni degli stessi parametri $u_r$, cioè in corrispondenza biunivoca con C, i due complessi saranno in una coppia di rette omologhe $r, r^0$ proiettivamente applicabili se potremo trasformare con opportuna collineazione uno di essi in guisa che lungo le $r, r^0$ valgano le

$$(22)\qquad x=\varrho x^0\ ;\ x_s=\varrho(x^0_s+m_s x^0)\ ;$$
$$\frac{\partial^2 x}{\partial u_i\,\partial u_j}=\varrho\left(\frac{\partial^2 x^0}{\partial u_i\,\partial u_j}+\mu_i\frac{\partial x^0}{\partial u_j}+\mu_j\frac{\partial x^0}{\partial u_i}+h_{ij}x^0\right)$$

con opportuni valori delle $\varrho, m, \mu, h$. Se ne deduce tosto che lungo le rette $r, r^0$ *le forme $\varphi, \varphi^0$ dei due complessi sono proporzionali.* Supposto che *questa condizione sia soddisfatta per tutti i valori $u$* (cosicchè, *moltiplicando le $x^0$ per un conveniente fattore, si possa supporre identicamente $\varphi=\varphi^0$*), *condizione necessaria e sufficiente affinchè C, $C^0$ siano proiettivamente applicabili in due rette omologhe $r, r^0$ è che le due forme $\chi, \chi^0$ siano ivi uguali.*

Infatti, essendo $\varphi=\varphi^0$ identicamente, le (22) diventano in coordinate covarianti

$$(22)_{bis}\quad x=x^0\ ,\ x_s=x^0_s+m_s x_0\ ;\ x_{ij}=x^0_{ij}+\mu_i x^0_j+\mu_j x^0_i+h_{ij}x\,.$$

Basta ricordare il valore $(16)_{bis}$ di $\chi$ per riconoscere che $\chi=\chi^0$.

Viceversa, se identicamente $\varphi=\varphi^0$, e se nelle rette $r, r^0$ è $\chi=\chi^0$, noi potremo trasformare $C^0$ con una tale collineazione che per la retta considerata sia $x=x^0$, $x_r=x^0_r$, $\xi=\xi^0$, perchè le espressioni $Sx^3$, $Sx_r x_s$, $S\xi^2$, $S\xi x$, $S\xi x_r$, $Sx\xi$ hanno valori uguali per i due complessi; il complesso $X^0$ apparterrà al fascio dei due complessi X, $x$. Scrivendo le (16) per i due complessi, si riconosce che nelle rette $r, r^0$ valgono le $(22)_{bis}$ con $\varrho=1$, $m_r=\mu_r=0$. c. d. d.

Le forme $\varphi, \chi$ costituiscono insieme l'*elemento lineare proiettivo* del complesso, il problema della deformazione proiettiva di un complesso, cioè di determinare le forme $\psi$ compatibili con le $\varphi, \chi$ si riduce allo studio delle condizioni di integrabilità delle (16), (19).

Studieremo dapprima il caso che $\chi$ sia identicamente nullo.

Idromeccanica. — *Equazione caratteristica dei piccoli moti ondosi in un canale di qualunque profondità.* Nota II [1] di Umberto Cisotti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

3. *Canali poco profondi* (*Lagrange*). — Si supponga così piccola la profondità $h$ del canale, da potersi trattare come infinitesimo di primo ordine. Si ha allora, applicando alla $f(t;z)$ lo sviluppo tayloriano, rispetto all'argomento $z$:

$$f(t;z+ih)=f(t;z)+ih\frac{\partial}{\partial z}f(t;z).$$

$$f(t;z-ih)=f(t;z)-ih\frac{\partial}{\partial z}f(t;z);$$

per cui, colla voluta approssimazione l'equazione caratteristica (9) diviene, scrivendo brevemente $f$ in luogo di $f(t;z)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}-gh\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0.$$

Posto

$$c^2=gh,$$

e indicando $f_1$ e $f_2$ due funzioni arbitrarie, la soluzione completa della precedente è:

$$f=f_1(z+ct)+f_2(z-ct), \tag{10}$$

ed $f$ sarà reale sull'asse reale se reali sono $f_1$ e $f_2$ per valori reali dei rispettivi argomenti.

Sopra il pelo imperturbato $y=h$ si ha allora colla solita approssimazione:

$$f(t;x+ih)=f_1(x+ct)+f_2(x-ct)+ih\{f_1'(x+ct)+f_2'(x-ct)\},$$

designando gli apici derivazione rapporto agli argomenti rispettivamente indicati; in particolare per la parte reale si ricava

$$\varphi=f_1(x+ct)+f_2(x-ct),\quad \text{per } y=h.$$

Poichè la (6) porge

$$\eta=-\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial t},\quad \text{per } y=h.$$

[1] Vedi la Nota I in questi Rendiconti, pag. 256.

così per la precedente si ottiene

$$(11)\qquad \eta = -\frac{c}{g}\left\{ f_1'(x+ct) - f_2'(x-ct) \right\}, \quad \text{per } y = h.$$

Questa relazione definisce il sopraelevamento del pelo libero $l$, e quindi la forma di $l$ in ogni istante quando sieno assegnate le funzioni $f_1$ e $f_2$. L'assegnazione di queste funzioni dipende dalle circostanze iniziali. Per es., se si ammette che la provocazione iniziale abbia carattere impulsivo, allora per $t=0$ dev'essere $\varphi=0$ in S e quindi $f=0$; dalla (10) scende allora la seguente condizione:

$$f_1 + f_2 = 0.$$

Per questa la (11) diviene

$$\eta = -\frac{c}{g}\left\{ f_1'(x-ct) + f_1'(x+ct) \right\}.$$

È facile ora di rilevare il significato della funzione $f_1'$. Ponendo nella precedente $t=0$ e chiamando $\eta_0$ il sovraelevamento iniziale si ottiene

$$\eta_0 = -\frac{2c}{g} f_1'(x),$$

per cui la precedente può scriversi:

$$2\eta = \eta_0(x-ct) + \eta_0(x+ct),$$

che definisce ad ogni istante la forma di $l$ nota la sua forma iniziale.

Come si vede, si tratta di onde che si propagano colla medesima legge che regola la propagazione del suono. qualunque sia la perturbazione iniziale: la velocità di propagazione è $c=\sqrt{gh}$. Ciò era già stato messo in rilievo da Lagrange (1).

4. *Canali infinitamente profondi* (*Poisson-Cauchy*). — Immaginiamo di trasportare gli assi $Oxy$ parallelamente a se stessi coll'origine nel punto $x=0$, $y=h$: ciò equivale a cambiare $z$ in $z+ih$. L'equazione caratteristica (9) diviene con tale referenza:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{ f(t;z+2ih) + f(t;z) \right\} + ig\frac{\partial}{\partial z}\left\{ f(t;z+2ih) - f(t;z) \right\} = 0.$$

Ciò premesso, supporremo che tanto $f$ quanto la sua derivata rispetto a $z$ (che, come è noto, definisce la velocità) si annullino all'$\infty$; allora facendo crescere $h$ indefinitamente, il primo e il terzo termine della equazione che precede hanno per limite zero e l'equazione diviene:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t;z) - ig\frac{\partial}{\partial z} f(t;z) = 0,$$

(1) Lagrange, loc. cit.; oppure Lamb, loc. cit., pag. 248.

che, come per primo fece rilevare Levi-Civita [1], è l'equazione caratteristica delle onde di Poisson-Cauchy.

5. *Canali molto profondi* (*Palatini*). — Il caso di un canale considerevolmente profondo, senza esserlo infinitamente, è stato studiato da Palatini [2]. L'ipotesi specifica viene tradotta analiticamente nella circostanza che si può ritenere

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^2\, \partial y} + g\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0\,, \quad \text{per } y = h \text{ [3]}. \tag{12}$$

Questa condizione al contorno può facilmente trasformarsi in una equazione indefinita. Si noti infatti che, essendo per la (3) e per la prima delle (1)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\,, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}\,,$$

la precedente può scriversi:

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial t^2\, \partial x} + g\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0\,, \quad \text{per } y = h\,,$$

e, per le (8),

$$\frac{\partial^3}{\partial t^2\, \partial x}\left\{ f(t\,;x+ih) - f(t\,;x-ih)\right\} + \\ + ig\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{ f(t\,;x+ih) + f(t\,;x-ih)\right\} = 0\,,$$

la quale — trattandosi di funzione analitica — vale anche quando a $x$ si sostituisca $z$, essendo $z$ l'affissa di un punto generico del campo di esistenza. Pertanto la condizione (12) relativa alla retta $y = h$ è sostituibile colla seguente:

$$\frac{\partial^3}{\partial t^2\, \partial z}\left\{ f(t\,;z+ih) - f(t\,;z-ih)\right\} + \\ + ig\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left\{ f(t\,;z+ih) + f(t\,;z-ih)\right\} = 0\,,$$

entro S.

Ciò premesso, derivando due volte rispetto a $t$ l'equazione caratteristica (9), si ottiene

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4}\left\{ f(t\,;z+ih) + f(t\,;z-ih)\right\} + \\ + ig\frac{\partial^3}{\partial t^2\, \partial z}\left\{ f(t\,;z+ih) - f(t\,;z-ih)\right\} = 0\,.$$

[1] Cfr. Tonolo, *Nuova risoluzione del problema delle onde di Poisson-Cauchy* [Atti del R. Ist. Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, tomo LXXIII (1913), pag. 545 sgg.].

[2] Palatini, loc. cit.

[3] Palatini, loc. cit., 1° § 1, n. 3, ipotesi *c*).

Eliminando in questa i due ultimi termini, per mezzo della precedente, si ricava

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4}\Big\{ f(t\,;z+ih)+f(t\,;z-ih)\Big\}+$$
$$+g^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big\{ f(t\,;z+ih)+f(t\,;z-ih)\Big\}=0\,.$$

Immagino ora di riferirmi, come nel numero precedente, a una coppia di assi paralleli ai prefissati e con l'origine nel punto $x=0\,,y=h$; la equazione corrispondente si ottiene dalla precedente cambiando $z$ in $z+ih$:

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4}\Big\{ f(t\,;z+2ih)+f(t\,;z)\Big\}+g^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big\{ f(t\,;z+2ih)+f(t\,;z)\Big\}=0\,.$$

Se si ammette che per $h$ molto grande si annulli $f$ e le sue due prime derivate rispetto a $z$, per qualunque $t$, il primo e il terzo termine della precedente relazione tendono a zero e si ottiene

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4}f(t\,;z)+g^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}f(t\,;z)=0,$$

che è l'equazione stabilita dal Palatini per i moti ondosi in discorso (¹).

6. *Onde progressive di tipo permanente.* — Immagino ora che il moto ondoso abbia carattere permanente rispetto ad una coppia di assi dotata di traslazione uniforme di velocità $c$ nel senso delle $x$ negative; la $f$ dipende allora da $t$ pel tramite dell'argomento

$$\zeta=z-ct\,.$$

Con ciò l'equazione caratteristica (9) si trasforma nella seguente:

$$\frac{\partial^2}{d\zeta^2}\Big\{ f(\zeta+ih)+f(\zeta-ih)\Big\}+i\,\frac{g}{c^2}\,\frac{d}{d\zeta}\Big\{ f(\zeta+ih)-f(\zeta-ih)\Big\}=0\,.$$

Pongo

$$w=\frac{df}{d\zeta}\,, \tag{13}$$

con che, come è noto, la parte reale di $w$ e il coefficiente di $-i$ sono le componenti della velocità rispetto agli assi mobili; la precedente può allora scriversi:

$$\frac{d}{d\zeta}\Big\{ w(\zeta+ih)+w(\zeta-ih)\Big\}+\frac{ig}{c^2}\Big\{ w(\zeta+ih)-w(\zeta-ih)\Big\}=0\,.$$

(¹) Palatini, loc. cit., 1°, § 4.

Si noti che si tratta di piccoli moti (assoluti) ondosi per cui posto

$$w = c(1 + \varepsilon), \tag{14}$$

$\varepsilon$ è quantità di primo ordine; la precedente equazione si trasforma allora nella seguente relativa alla funzione $\varepsilon$:

$$\frac{d}{d\zeta}\left\{\varepsilon(\zeta + ih) + \varepsilon(\zeta - ih)\right\} + \frac{ig}{c^2}\left\{\varepsilon(\zeta + ih) - \varepsilon(\zeta - ih)\right\} = 0 .$$

che è equazione caratteristica dei moti ondosi in discorso.

È facile di constatare la sua equivalenza con quella stabilita da Levi-Civita [1]. Basta riferirsi, come fa il Levi-Civita, alla striscia

$$-q \leq \psi \leq q \quad , \quad -\infty \leq \varphi \leq \infty$$

del piano $f$, che è rappresentazione conforme della striscia $S + S'$ del piano $\zeta$. Infatti avendosi allora dalle (13) e (14), colla cennata approssimazione

$$\frac{d\varepsilon}{d\zeta} = c\,\frac{d\varepsilon}{df},$$

la precedente equazione caratteristica diviene

$$\frac{d}{df}\left\{\varepsilon(f + iq) + \varepsilon(f - iq)\right\} + \frac{ig}{c^3}\left\{\varepsilon(f + iq) - \varepsilon(f - iq)\right\} = 0 ,$$

che è appunto l'equazione di Levi-Civita.

## Matematica. — *Sulle equazioni integrali*. Nota V di Pia Nalli, presentata dal Socio S. Pincherle.

18. Passiamo ora alla ricerca delle costanti caratteristiche $\mu$ per ognuna delle quali esiste un numero positivo $\delta$ tale che sia quasi dapertutto

$$k^2(s) - \delta > \mu^2 , \tag{34}$$

e delle corrispondenti funzioni caratteristiche.

Perchè la (34) possa essere soddisfatta occorre che $|k(s)|$ si mantenga quasi dapertutto superiore ad una quantità positiva fissa. Supporremo questa condizione soddisfatta.

Supponiamo prima che zero sia una costante caratteristica propria relativa a $K(s, t)$ e $k(s)$ e sia $\Gamma(s, t)$ la corrispondente funzione fondamentale: si potrà porre

$$\Gamma(s, t) = -\sum_{i=1}^{m} k(t)\, \varphi_i(s)\, \varphi_i(t) ,$$

[1] Levi-Civita, loc. cit., pag. 787, formola (13).

le $\varphi_i(s)$ formando un sistema ortogonale come le $k(s)\,\varphi_i(s)$, moltiplicate per opportune costanti [1].

La più generale funzione $\varphi(s)$ soddisfacente all'eguaglianza

$$k(s)\,\varphi(s) + \int_a^b \mathrm{K}(s\,,t)\,\varphi(t)\,dt = 0$$

è una combinazione lineare delle $\varphi_i(s)$: queste costituiscono dunque un sistema completo di soluzioni dell'equazione omogenea di Fredholm

$$\varphi(s) + \int_a^b \frac{\mathrm{K}(s\,,t)}{k(s)}\,\varphi(t)\,dt = 0\,.$$

È allora noto che, perchè si possa risolvere l'equazione

$$f(s) = \psi(s) + \int_a^b \frac{\mathrm{K}(s\,,t)}{k(s)}\,\psi(t)\,dt \tag{35}$$

nella funzione incognita $\psi(s)$ [$f(s)$ essendo una funzione sommabile in $(a\,,b)$ insieme col suo quadrato] è necessario e sufficiente che $f(s)$ soddisfi alle seguenti condizioni: $\int_a^b f(s)\,\chi_i(s)\,ds = 0$ $(i = 1\,,2\,,\ldots m)$, dove le $\chi_i(s)$ costituiscono un sistema completo di soluzioni dell'equazione omogenea

$$\chi(s) + \int_a^b \frac{\mathrm{K}(s\,,t)}{k(t)}\,\chi(t)\,dt = 0\,. \tag{36}$$

Ma questa è soddisfatta prendendo $\chi(t) = k(s)\,\varphi_i(s)$, e siccome le $k(s)\,\varphi_i(s)$ sono linearmente indipendenti, costituiscono un sistema completo di soluzioni della (36), quindi perchè la (35) ammetta soluzione è necessario e sufficiente che $f(s)$ soddisfi alle seguenti condizioni:

$$\int_a^b f(s)\,k(s)\,\varphi_i(s)\,ds = 0 \qquad (i = 1\,,2\,,\ldots m)\,.$$

Data dunque una funzione reale $f_0(s)$, sommabile in $(a\,,b)$ insieme col suo quadrato, potremo determinarne un'altra $f_{-1}(s)$ soddisfacente all'eguaglianza

$$f_0(s) = k(s)\,f_{-1}(s) + \int_a^b \mathrm{K}(s\,,t)\,f_{-1}(t)\,dt \tag{37}$$

quando e solamente quando $f_0(s)$ soddisfa alle condizioni $\int_a^b f_0(s)\,\varphi_i(s)\,ds = 0$, cioè alla condizione: $\int_a^b \Gamma(t\,,s)\,f_0(t)\,dt = 0$.

[1] Le $\varphi_i(s)$ sono in numero finito, perchè $|k(s)|$ si mantiene superiore ad una quantità positiva fissa.

Supposta soddisfatta questa condizione la (37) ammette infinite soluzioni che differiscono per una combinazione lineare delle $\varphi_i(s)$: noi fisseremo quella soluzione soddisfacente alla condizione $\int_a^b \Gamma(t, s) f_{-1}(t)\, dt = 0$ e chiameremo $f_{-1}(s)$ *prima iterata inversa di* $f_0(s)$ *relativamente a* $K(s, t)$ *e* $k(s)$.

Potremo dunque formare la successione di funzioni

$$f_0(s), f_{-1}(s), f_{-2}(s), \dots f_{-n}(s), \dots \tag{38}$$

ciascuna delle quali è la prima iterata inversa della precedente: chiameremo $f_{-n}(s)$ $n^{esima}$ *iterata inversa di* $f_0(s)$ *relativa a* $K(s, t)$ *e* $k(s)$.

Le iterate di $f_0(s)$ definite al n. 2 della Nota I le chiameremo più propriamente *iterate dirette*.

Supponiamo ora che zero non sia una costante caratteristica propria relativa a $K(s, t)$ e $k(s)$: allora la (37) ammette una ed una sola soluzione $f_{-1}(s)$, qualunque sia $f_0(s)$ sommabile in $(a, b)$ insieme col suo quadrato, e potremo ancora definire la successione (38) delle iterate inverse.

Le iterate inverse di $f_0(s)$ sono dunque definite in ogni caso dalle relazioni di ricorrenza

$$f_{-(n-1)}(s) = k(s) f_{-n}(s) + \int_a^b K(s, t) f_{-n}(t)\, dt \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

alle quali, nel caso in cui zero sia una costante caratteristica propria, bisogna aggiungere $\int_a^b \Gamma(t, s) f_{-n}(t)\, dt = 0$ per qualunque $n \geq 0$.

Se $g_0(s)$ è un'altra funzione sommabile in $(a, b)$ insieme col suo quadrato, $m, n, r$ tre interi non negativi ed $r \leq n$, si avrà

$$\int_a^b g_{-m}(s) f_{-n}(s)\, ds = \int_a^b g_{-(m+r)}(s) f_{-(n-r)}(s)\, ds. \tag{39}$$

19. Premesse queste definizioni, siano $\mu_1, \mu_2, \dots$ costanti caratteristiche proprie e distinte relative a $K(s, t)$ e $k(s)$ e $\Gamma_1(s, t), \Gamma_2(s, t), \dots$ le corrispondenti funzioni caratteristiche.

Se tra le costanti caratteristiche proprie c'è lo zero, lo supporremo incluso tra le $\mu_n$: potrebbe anche la successione delle $\mu_n$ non contenere nessun termine oltre questo eventuale termine nullo.

Definite le funzioni $C_r(s, t)$ come al n. 12, poniamo

$$B_1(s, t) = K(s, t) - C_1(s, t) \text{ [1]}.$$

[1] La $B_1(s, t)$ è la stessa funzione $D_1(s, t)$ della Nota III.

Essendo, per qualunque $n$,

$$\int_a^b r_n(v, s)\, B_1(v, t)\, dv = 0\,, \tag{40}$$

possiamo formare le iterate inverse di $B_1(s, t)$, considerata come funzione di $s$, relativamente a $K(s, t)$ e $k(s)$.

Denotiamo con $B_n(s, t)$ la iterata inversa di ordine $n-1$; sarà

$$B_{n-1}(s, t) = k(s)\, B_n(s, t) + \int_a^b K(v, s)\, B_n(v, t)\, dv\,.$$

Per la (40) si può anche scrivere

$$B_{n-1}(s, t) = k(s)\, B_n(s, t) + \int_a^b B_1(v, s)\, B_n(v, t)\, dv\,,$$

e da questa, per la (39), si ottiene

$$B_{\mu+\nu-1}(s, t) = k(s)\, B_{\mu+\nu}(s, t) + \int_a^b B_\mu(v, s)\, B_{\nu+1}(v, t)\, dv\,,$$

se $\mu$ e $\nu$ sono due interi, positivo il primo, non negativo il secondo.

Se $B_n(s, t) = 0$ è anche $B_{n-1}(s, t) = 0$, quindi $B_1(s, t) = 0$: questo caso è stato già esaminato al n. 12.

In particolare, se la successione delle $\mu_n$ non contiene nessun termine si ha $B_1(s, t) = K(s, t)$, quindi nessuna delle $B_n(s, t)$ è nulla.

Supposto $B_1(s, t) \neq 0$, poniamo

$$X_n = \int_a^b \int_a^b B_n^2(s, t)\, ds\, dt:$$

sarà, per la (39),

$$\int_a^b B_n^2(s, t)\, ds = \int_a^b B_{n-1}(s, t)\, B_{n+1}(s, t)\, ds\,,$$

e perciò

$$X_n^2 \leq X_{n-1}\, X_{n+1}\,.$$

Ponendo $h_n = \dfrac{X_n}{X_{n-1}}$, la successione delle $h_n$, crescente e limitata, tende ad un limite $h > 0$.

Si dimostra che *se $\mu$ è una costante caratteristica propria diversa dalle $\mu_n$ si ha $\mu^2 \geq \dfrac{1}{h}$.*

Ricordiamo che si era trovato $\mu^2 \leq d$.

In particolare, se la successione delle $\mu_n$ non contiene nessun termine, tranne eventualmente lo zero, si ha $d = c^{(1)}$ ed $h$ ha un certo valore che

chiamiamo $h^{(1)}$. *Per qualunque costante caratteristica propria* $\mu$ *diversa da zero si ha* $\mu^2 \leq c^{(1)}$ *e* $\mu^2 \geq \frac{1}{h^{(1)}}$.

La successione decrescente $\frac{X_n}{h^n}$ tende ad un limite $X \geq 0$, e la successione delle funzioni $A_n(s, t) = \frac{B_{2n}(s, t)}{h^n}$ converge in media verso una funzione $B(s, t)$ per la quale si ha: $\int_a^b \int_a^b B^2(s, t)\, ds\, dt = X$. Questa funzione non è identicamente nulla quando e solo quando è $X > 0$.

Supposto $X > 0$, dalla relazione

$$\frac{1}{h} A_{n-1}(s, t) = k^2(s)\, A_n(s, t) + \int_a^b K^{(2)}(v, s)\, A_n(v, t)\, dv,$$

per la convergenza in media di $A_n(s, t)$ verso $B(s, t)$, si conclude

$$\frac{1}{h} B(s, t) = k^2(s)\, B(s, t) + \int_a^b K^{(2)}(v, s)\, B(v, t)\, dv,$$

quindi $B(s, t)$, considerata come funzione di $s$, è fondamentale relativamente a $K^3(s, t)$ e $k^2(s)$ e corrisponde alla costante $\frac{1}{h}$.

Ed allora, al solito, si possono dare due casi: 1°) $B(s, t)$, considerata come funzione di $s$, è fondamentale relativamente a $K(s, t)$ e $k(s)$, ad allora soddisfa alla seguente equazione

$$\frac{1}{\sqrt{h}} B(s, t) = k(s)\, B(s, t) + \sqrt{h} \int_a^b B(v, s)\, B(v, t)\, dv,$$

e per qualunque funzione fondamentale $\varphi(s)$ corrispondente alla costante $\frac{1}{\sqrt{h}}$ si ha

$$\left(\frac{1}{\sqrt{h}} - k(s)\right) \varphi(s) = \sqrt{h} \int_a^b B(t, s)\, \varphi(t)\, dt,$$

cioè $\sqrt{h}\, B(s, t)$ è la funzione caratteristica corrispondente a $\frac{1}{\sqrt{h}}$, e questa è una costante caratteristica propria.

2°) $B(s, t)$ non è funzione fondamentale relativamente a $K(s, t)$ e $k(s)$, ed allora lo sono le due funzioni $N_1(s, t)$, $N_2(s, t)$, considerate come funzioni di $s$, definite dalle relazioni

$$N_i(s, t) = \frac{1}{2} B(s, t) + \frac{(-1)^{i-1} \sqrt{h}}{2} \left[ k(s)\, B(s, t) + \int_a^b K(v, s)\, B(v, t)\, dv \right]$$
$$(i = 1, 2),$$

e $(-1)^{i-1}\sqrt{h}\,N_i(s, t)$ è la funzione caratteristica corrispondente alla costante propria $\frac{(-1)^{i-1}}{\sqrt{h}}$.

Si ha per qualunque $n$ e qualunque sia $X \geq 0$:

$$\int_a^b \Gamma_n(v, s)\, B(v, t)\, dv = 0 ,$$

quindi, in ogni caso, $\frac{1}{h} \neq \mu_n^2$, qualunque sia $n$.

20. Si può dimostrare il seguente teorema: *se esiste un numero* $\varepsilon > 0$ *tale che sia quasi dapertutto* $k^2(s) - \varepsilon > \frac{1}{h}$ *si ha* $X > 0$, quindi *condizione necessaria e sufficiente perchè esista una costante caratteristica propria* $\mu$, *diversa dalle* $\mu_n$, *soddisfacente alla* (34), *è che si possa trovare un numero* $\varepsilon > 0$ *tale che sia quasi dapertutto* $k^2(s) - \varepsilon > \frac{1}{h}$.

Ed allora si possono determinare tutte le costanti caratteristiche soddisfacenti alla (34), e le corrispondenti funzioni caratteristiche. Basta formare dapprima la successione delle $\mu_n$ col solo termine $\mu_1 = 0$, se questa è una costante caratteristica propria o con nessun termine nel caso contrario: si viene a determinare un $h$ che chiamiamo $h_1$, ed esistono costanti caratteristiche soddisfacenti alla (34) quando e solo quando questa è soddisfatta per $\mu = \frac{1}{\sqrt{h_1}}$, ed $\frac{1}{|\sqrt{h_1}|}$ è il minimo valore assoluto delle costanti soddisfacenti alla (34).

Col metodo esposto al num. precedente si determina la funzione caratteristica corrispondente alla costante $\pm\frac{1}{\sqrt{h_1}}$.

Formando ora la successione delle $\mu_n$ con l'eventuale termine $\mu_1 = 0$ e con uno o due termini (secondo i casi) aventi per valore assoluto $\frac{1}{|\sqrt{h_1}|}$, si determinano le costanti caratteristiche soddisfacenti alla (34) che hanno minimo valore assoluto maggiore di $\frac{1}{|\sqrt{h_1}|}$ e le corrispondenti funzioni caratteristiche, e così via: si vengono a trovare tutte le costanti caratteristiche soddisfacenti alla (34), ordinate per modulo crescente, e le corrispondenti funzioni caratteristiche.

Se le costanti sono infinite, i loro valori assoluti hanno per punto limite il punto $l'$ tale che l'insieme dei punti nei quali è $|k(s)| < l'$ è di misura nulla, mentre, qualunque sia $\varepsilon > 0$, l'insieme dei punti nei quali è $|k(s)| < l' + \varepsilon$ ha misura non nulla. Inoltre, se $\mu$ è una costante caratteri-

stica soddisfacente alla (34), $|k(s) - \mu|$ si mantiene quasi dapertutto superiore ad una quantità positiva fissa; e se $\Gamma(s, t)$ è la funzione caratteristica corrispondente a tale costante si ha $\Gamma(s, t) = (\mu - k(t)) \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(s) \varphi_i(t)$.

La più generale funzione fondamentale corrispondente a $\mu$ è una combinazione lineare delle $\varphi_i(s)$.

Fisica. — *Sulla costante capillare del mercurio puro e delle amalgame liquide di potassio in contatto con soluzioni di ioduro di potassio* [1]. Nota del prof. V. Polara, presentata dal Socio A. Riccò.

Le ricerche del Gouy [2] provano che la costante capillare del mercurio in contatto con soluzioni in acqua di KJ assume un valor massimo alquanto inferiore a quello che la costante capillare di tale metallo acquista al contatto con soluzioni $^1/_6$ in volume di $H^2So^4$: si ha così un caso notevole di deviazione dalla legge formulata dal Lippmann [3], secondo la quale la costante capillare dovrebbe essere funzione *unicamente* della differenza di potenziale al contatto e quindi il suo massimo indipendente dalla natura dei corpi in contatto.

Mi son proposto prima di tutto di ricercare l'eventuale influenza della concentrazione della soluzione di KJ sul valor massimo della costante capillare del mercurio al suo contatto e sulla polarizzazione occorrente per determinare tale massimo.

Mi son servito dell'apparecchio di Quincke [4], composto di due tubi comunicanti, uno largo e l'altro capillare della sezione di mm. 0,74, contenenti mercurio puro, distillato nel vuoto. Il tubo capillare conteneva, al di sopra del mercurio, la soluzione di KJ che volevo studiare, e la sua estremità codata pescava in un bicchiere contenente mercurio nella parte inferiore, e la medesima soluzione di KJ nella parte superiore. Due elettrodi di platino pescavano uno nel mercurio del tubo largo e l'altro nel mercurio del bicchiere, ed erano collegati rispettivamente il primo ad un estremo del filo di un compensatore di Du Boys Reymond — e precisamente all'estremo che era connesso con il polo negativo dell'elemento Daniel che alimentava il circuito —, e l'altro con il cursore mobile sul filo, spo-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto fisico della R. Università di Catania.

(2) Gouy, Comptes Rendus, 1892, tome 114, pag. 211.

(3) Chwolson, *Traité de Physique*, tomo CXIV, 1° fascicolo, pag. 231.

(4) Ibidem, tomo IV, 1° fascicolo, pag. 226.

stando il quale si poteva polarizzare il mercurio nel capillare, come catodo, con f. e. m. progressivamente crescente da 0 ad 1 Volta.

Per ogni valore della polarizzazione si collimava la posizione del culmine del menisco nel tubo capillare, mediante un piccolo Catetometro che apprezzava nettamente il centesimo di millimetro, e quando si era raggiunta la polarizzazione per la quale si notava la massima depressione del menisco, si collimava la superficie libera del mercurio nel tubo largo.

La seguente tavola contiene i valori medî delle varie misure eseguite con soluzioni di KJ diversamente concentrate e, per il confronto, con una soluzione d'$H^2 So^4$ $^1/_6$ in volume.

Tavola I.

| Soluzione adoperata | Lettura al Catetometro quando si collima il menisco nel capillare polarizzando con f. e. m. in Volta di | | | | | | | | | | Lettura al Catetometro quando si collima il mercurio nel tubo largo | Dislivello in mm. del mercurio fra i due rami nell'istante della massima depressione |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,8 | 1 | 1,1 | | |
| $H^2 So^4$ — $^1/_6$ in Volume. | 51.71 | — | 51.04 | — | 50.72 | — | 50.22 | 48.33 | 47.20 | 47.25 | 65.30 | 18.10 |
| KJ — $^1/_{10}$ normale . . . | 50.52 | 49.30 | 48 04 | 47.37 | 47.32 | 47.32 | 47.34 | — | — | — | 65.32 | 18 00 |
| » — $^1/_4$ » . . . | 51.27 | 50.84 | 50 20 | 48.71 | 48.19 | 48.18 | 48.20 | — | — | — | 66.08 | 17.90 |
| » — 1 » . . . | 51.69 | 50.57 | 49.25 | 49.04 | 48.99 | 48 98 | 49.01 | — | — | — | 66.78 | 17.80 |
| » — 4 » . . . | 50.76 | 50.60 | 50.54 | 48.37 | 48.24 | 48.23 | 48.25 | — | — | — | 65.66 | 17.43 |
| » — 10 » . . . | 51.17 | — | 49.35 | 48.95 | 48.81 | 48.80 | 48.82 | — | — | — | 65.94 | 17.14 |

Al crescere della concentrazione si riscontra un progressivo abbassamento nel valor massimo della costante capillare, la differenza per i due casi estremi importando la variazione di un millimetro circa nel dislivello fra i due rami dell'apparecchio: la polarizzazione occorrente per avere la massima depressione non appare invece influenzata dalla concentrazione, nei limiti di sensibilità del metodo, che apprezza i decimi di Volta della polarizzazione.

Ho voluto poi ricercare se, facendo variare la tensione superficiale della soluzione con l'aggiunta di alcool etilico in diversa percentuale, si osservano vaziazioni nel valor massimo della costante capillare al contatto.

Nella tavola seguente sono indicati alcuni risultati ottenuti con l'aggiunta di una percentuale di alcool variabile dallo 0 all'80 $^0/_0$.

TAVOLA II.

| SOLUZIONE ADOPERATA | LETTURA AL CATETOMETRO quando si collima il menisco nel capillare polarizzando con f. e. m. in Volta di | | | | | | | | | | Lettura al Catetometro quando si collima il mercurio nel tubo largo | Dislivello in mm. del mercurio fra i due rami nell'istante della massima depressione |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,8 | 1 | 1 | | |
| $H^2SO^4$ — 1/6 in Volume | 51.71 | — | 51.04 | — | 50.72 | — | 50.22 | 48.33 | 47.21 | 47.25 | 65.30 | 18.10 |
| KJ normale . . . . . . | 51.69 | 51.02 | 49.25 | 49.04 | 49.01 | 48.99 | 49.04 | — | — | — | 66.78 | 17.79 |
| » + alcool 20 % . . | 52.00 | 51.35 | 50.96 | 50.11 | 49.49 | 49.49 | 49.53 | — | — | — | 66.13 | 16.64 |
| » + » 40 » . . | 52.73 | 52.18 | 51.31 | 50.86 | 50.84 | 50.84 | 50.90 | — | — | — | 67.32 | 16.48 |
| » + » 60 » . . | 52.70 | 52.08 | 51.72 | 50.58 | 50.57 | 50.57 | 50.62 | — | — | — | 67.70 | 17.13 |
| » + » 80 » . . | 52.94 | 52.12 | 51.63 | 51.05 | 51.01 | 51.01 | 51.04 | — | — | — | 68.21 | 17.20 |

L'aggiunta di alcool etilico abbassa quindi notevolmente il massimo della costante capillare del mercurio in contatto, specialmente per percentuali di alcool non superiori al 40 %, mentre per percentuali maggiori l'abbassamento appare meno notevole.

I risultati precedentemente indicati, come già quelli ottenuti dal Gouy [1] e dal Christiansen [2], provano che la costante capillare non può ritenersi funzione della sola differenza di potenziale al contatto. E poichè lo Schmidt [3] ha constatato che il mercurio puro per l'aggiunta di piccolissime quantità di metalli alcalini subisce nel vuoto una graduale diminuzione nella costante capillare, mi è parso interessante studiare la costante capillare di amalgame liquide di potassio di diversa concentrazione al contatto con soluzioni normali di KJ.

Ho disposto nell'apparecchio precedentemente descritto amalgame di potassio contenenti il 2, 1, 0.4, 0.1 per mille di potassio e fatto rapidamente le letture al Catetometro perchè non fosse molto sensibile la variazione di concentrazione delle amalgame per reazione del potassio con l'acqua della soluzione.

Per tale causa d'incertezza e per non disporre di mezzi adatti ad un'analisi rigorosa quantitativa, la percentuale di potassio contenuta nel mer-

(1) Gouy, Ann. Chemie physique, 29, 1903, pag. 145.
(2) Christiansen, Wid. Ann., XVI, 1905, pag. 382.
(3) Schmidt, Wid. Ann., XXXIX, 1912, pag. 1108.

curio che figura nella seguente tavola deve ritenersi determinata solo approssimativamente: tuttavia l'andamento qualitativo del fenomeno si palesa nettamente dai risultati contenuti nella tavola stessa.

TAVOLA III.

| Percentuale di K sciolta nel Hg | Lettura al Catetometro quando si collima il menisco nel capillare | Lettura al Catetometro quando si collima la superficie nel tubo largo | Dislivello in mm. |
|---|---|---|---|
| 2 per mille | 54.61 | 61 33 | 6.72 |
| 1 » | 55 71 | 62 74 | 7.13 |
| 0.5 » | 51.32 | 59.14 | 7.82 |
| 0.1 » | 46.73 | 62.75 | 16.02 |

Se si tien presente che il massimo della costante capillare del mercurio puro in contatto con soluzione d' $H^2 So^4$ $^1/_6$ in volume corrisponde, nell'apparecchio descritto, ad un dislivello di mm. 18.10 fra il menisco nel capillare e la superficie libera nel tubo largo, si vede chiaramente che le amalgame di potassio in contatto con soluzioni normali di KJ presentano una costante capillare alquanto inferiore al valor massimo della costante capillare del mercurio puro in contatto con soluzione d' $H^2 So^4$: essa decresce inoltre sensibilmente con l'aumentare della percentuale di potassio sciolta nel mercurio, più lentamente per le amalgame più concentrate che per le più diluite.

E poichè, almeno per le amalgame di K più concentrate, la differenza di potenziale al contatto con un sale di potassio deve ritenersi molto piccola (e conseguentemente il massimo della costante capillare deve differire poco dai valori trovati), anche tali risultati provano che la costante capillare non può ritenersi funzione della sola differenza di potenziale al contatto.

Ma questo risultato non implica necessariamente che la relazione di Lippmann

$$X = -\frac{dA}{dp} \tag{1}$$

(X densità del doppio strato, A costante capillare, $p$ polarizzazione), non valga per le soluzioni che, come quella di KJ, conferiscono al mercurio un massimo di costante capillare alquanto diverso da quello che esso assume al contatto con soluzioni d' $H^2 So^4$.

Avendo già dimostrato [1] che la relazione (1) si verifica nel caso del mercurio a contatto con soluzioni d' HCl $^1/_6$ in volume — mentre il Pellat [2]

[1] Polara, Atti Accademia Giovenia, serie V, vol. XI. Memoria XIV, 1918.

[2] Pellat, *Cours d'Electricité*, tome III, pag. 151.

l'ha verificata per il caso del mercurio in contatto con soluzioni d'$H^2 So^4$ $^1/_6$ in volume —, ho voluto sottoporre al controllo dell'esperienza la relazione stessa nel caso anomalo delle soluzioni normali di KJ. E poichè dai precedenti risultati (Tavola II) appare che la costante capillare in tale caso cresce progressivamente con l'aumentare della polarizzazione da 0 a 0,5 Volta e diminuisce successivamente, ho studiato le variazioni della densità del doppio strato elettrico al contatto con la polarizzazione, facendo accrescere meccanicamente, per ogni valore della polarizzazione adoperata, l'estensione del contatto, ed osservando le deviazioni di un Galvanometro intercalato fra il cursore mobile sul filo del compensatore di Du Boys-Reymond e l'estremo di tale filo collegato con il polo negativo dell'Elemento Daniel.

L'apparecchio adoperato è quello stesso che mi ha servito alla verifica nel caso di soluzioni d'HCl, e le varie osservazioni fatte mi han dimostrato che mentre per polarizzazione compresa fra 0 e 0.5 Volta il Galvanometro devia verso i numeri rossi della scala in misura progressivamente decrescente (la deviazione essendo di 40 piccole divisioni per polarizzazione nulla e di 2 piccole divisioni per polarizzazione di 0.5 Volta), per polarizzazione maggiore esso devia invece verso i numeri neri della scala.

La relazione (1) appare quindi verificata entro i limiti di sensibilità del metodo che risente la variazione di $^1/_{10}$ di Volta nella polarizzazione.

La condizione

$$X = -\frac{dA}{dp}$$

può conciliarsi con la circostanza che la costante capillare non dipende unicamente dalla differenza di potenziale al contatto se si imagina la funzione A della forma

$$A = S - T(V - p),$$

dove S, che si dirà tensione superficiale ordinaria, è indipendente dalla differenza di potenziale al contatto e dipende invece dalle particolari condizioni del contatto, conformemente ai risultati ottenuti, e $T(V-p)$ è il simbolo d'una funzione della sola differenza di potenziale $V-p$ esistente al contatto per ciascun valore della polarizzazione adoperata (essendo V la differenza di potenziale dovuta al contatto e $p$ la polarizzazione adoperata), e soddisfacente inoltre alle condizioni

$$\frac{dT}{dp} = X \qquad \left(\frac{dT}{dp}\right)_{p=V} = 0.$$

L'espressione

$$A = S - \tfrac{1}{2} C (V - p)^2$$

dedotta dal Whetham [1] considerando il doppio strato elettrico al contatto

[1] Whetham, *Teory of Solution*, pag. 284.

come un condensatore piano di capacità C per unità d'area, soddisfa alle condizioni indicate, essendo

$$X = C(V - p) = -\frac{dA}{dp},$$

e rende tuttavia conto, dato il significato della costante capillare ordinaria S, della variazione nel massimo della costante capillare in diversi casi osservata.

Il calcolo della costante capillare in dine per centimetro, desunto nel modo noto dal raggio del capillare e dal dislivello fra i due rami dell'apparecchio conduce ai risultati segnati a sinistra della seguente tavola, mentre a destra sono indicati i valori ottenuti dallo Schmidt per la costante capillare del mercurio puro e della amalgama di potassio nel vuoto.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Amalgama di potassio 0,1 ‰ in contatto con soluzione normale di KJ | 383,6 | Amalgama di potassio 0,13 ‰ . . . | 388,4 |
| Mercurio puro in contatto con soluzione d'$H^2 So^4$ — (Valore massimo) | 434 6 | Mercurio puro . . . . . . . . . . . . . | 435,5 |
| Rapporto . . . | 0,88 | Rapporto . . . | 0,89 |

La concordanza dei valori, mentre avvalora la formula

$$A = S - \tfrac{1}{2} C(V - p), \tag{2}$$

per la quale il massimo di A è uguale ad S, induce a ritenere che le variazioni nella costante capillare riscontrate nelle amalgame al contatto con soluzione di KJ siano l'effetto delle variazioni osservate nel vuoto e non dipendenti da fenomeni elettrici.

## Chimica. — *Sul valore termochimico dei legami che uniscono gli atomi nei cristalli.* Nota di M. Padoa, presentata dal Socio G. Ciamician.

In una precedente Nota [1], da esperienze sulla velocità di cristallizzazione, trovavo argomenti per concludere che il collegamento degli atomi nei reticoli cristallini avviene per mezzo di valenze. Se questo è vero, deve esistere una relazione fra i dati termochimici ed i valori di tali legami [2];

[1] Questi Rendiconti, 1918, II, 59.

[2] È stato tentato da tempo di calcolare i calori di combustione dei corpi organici dalla composizione e costituzione molecolare (Thomsen, *Systematische durchführung Thermochemischer Untersuchungen* (1906); vedi anche P. Lémoult, J. de Ch. Phys. 1913, 805; Elmer B. Vliet, Chem. News, 1918, 118; ma si può osservare che i dati ricavati per il valore termochimico dei vari atomi ed aggruppamenti nei vari tipi di composti sono finora empirici; soltanto la conoscenza e la considerazione della posizione relativa, del collegamento e delle distanze reali degli atomi nelle molecole potranno darci dei valori termochimici calcolati con base veramente teoretica.

se poi si riesce a dimostrare che questi valori corrispondono in modo soddisfacente a quelli delle affinità nei composti propriamente detti, si ha un nuovo appoggio in favore della sopracitata conclusione.

Ho ottenuto qualche risultato che sembrami soddisfacente, a questo proposito, prendendo in esame i composti del carbonio, che, allo stato elementare, sia sotto forma di grafite che di diamante, ha una struttura reticolare delle più semplici e meglio individuate [1].

I. Il calore di combustione del diamante è, secondo le determinazioni di Berthelot e Petit [2] di calorie 94,32 per gr. atomo; nella reazione $CO + O \longrightarrow CO_2$ si sviluppano 68,22 calorie; ammettendo, come sembra lecito per la dimostrata equivalenza termochimica delle quattro valenze del carbonio [3] che la stessa quantità di calore si svolga nella formazione dell'ossido di carbonio partendo da un atomo *libero* di carbonio, la differenza $94{,}32 - 68{,}22 = 26{,}10$ sarebbe il calore di formazione dell'ossido di carbonio da un atomo dello stesso elemento *legato* nel diamante e finalmente la differenza $68{,}22 - 26{,}10 = 42{,}12$ sarebbe il *calore di disintegrazione* dell'atomo di carbonio, cioè l'equivalente in calore dell'energia occorrente a spezzare i legami che lo trattengono nel reticolo cristallino. Ora, data la struttura del diamante, ad ogni atomo di carbonio competono quattro *mezze valenze*, ossia due intere, e però ogni legame vale $42{,}12 : 2 = 21{,}06$ calorie.

II. Ragionando analogamente per la grafite, si trova, per ogni legame fra atomi di carbonio, un valore assai poco diverso, cioè 20,81 calorie.

Accettando come buoni i dati più recenti di Roth e Wallasch [4] secondo i quali il carbonio allo stato di diamante darebbe 94,43 calorie per gr. atomo, valore assai concordante con quello di Berthelot e Petit, la grafite anzichè più darebbe meno calore del diamante, e cioè, a seconda della provenienza, 94,37 (grafite $\beta$) oppure 93,96 (grafite $\alpha$), si otterrebbero, per ogni legame semplice tra atomi di carbonio, i valori di 21,06 calorie per il diamante e rispettivamente di 21,03 e 21,24 per le due qualità di grafite.

III. Il valore assoluto del legame C—H si può ottenere come segue: ogni atomo di carbonio libero darebbe, per ciò che precede, bruciando completamente, $94{,}32 + 42{,}12 = 136{,}44$ calorie. Gli atomi componenti del metano darebbero bruciando isolatamente:

[1] Per il diamante vedi W. L. e W. H. Bragg, *X Rays and Cristal Structure* (1915); e per la grafite vedi Debye e Scherrer, Gött. Nachr. ecc., 1917.

[2] Tutti i dati termochimici qui utilizzati sono presi dal Landolt, Phys. Chem. Tabellen (1912) scegliendo i valori più recenti ed attendibili.

[3] Thomsen, loc. cit., pag. 299-301.

[4] Berichte der Deutsch. Chem. Gesellsch. XLVI, 896; Zeitschr. für Elektrochemie, XXI (1915), I.

| | | |
|---|---|---|
| per un atomo di carbonio . . . . . . . | calorie | 136,44 |
| per $4H : 4 \times 34.35 + 2 \times 95$ (1) e cioè . | " | 327.40 |
| e quindi in tutto . . . | " | 463,84 |
| che diminuite del calore di combustione osservato, che è . . . . . . . . . . . | " | 212,70 |
| ci dà . . . | " | 251,14 |

che costituiscono il calore di formazione del metano dagli atomi liberi, suoi componenti; ne consegue che il valore di ogni legame C—H corrisponde alla quarta parte di questo calore di formazione, e cioè a 62,78 calorie. Facendo il calcolo dal calore di combustione della grafite, si trova, come è facile vedere, lo stesso valore.

IV. Partendo da quest'ultimo dato, si può calcolare il valore dei legami C—C negli idrocarburi normali saturi a catena aperta, e si trova che questo valore è di circa 16 calorie per i termini inferiori, ed è maggiore per i termini superiori, nei quali oscilla intorno alle 18 calorie, pure non presentando un andamento regolare, forse a causa di alcune determinazioni non troppo precise.

V. Per gli idrocarburi a catena chiusa, che più interessano per la loro struttura simile a quella del diamante e della grafite, si possono dedurre dei valori interessanti.

Per il benzolo si può istituire il calcolo come segue:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6H bruciando isolatamente darebbero | $6 \times 81.8$ cioè | 490,8 | calorie |
| 6C " " " | $6 \times 136,4$ " | 818,4 | " |
| e quindi in tutto, per gli atomi costituenti la mol. $C_6H_6$ | | 1309,2 | " |

Ora il calore di combustione del benzolo è di 783,3 cal. e quindi la differenza $1309,2 - 783,3 = 525,9$ cal. rappresenta il valore termochimico di sei legami C—H e di tutti i legami fra gli atomi di carbonio nella molecola del benzolo; ma, per i calcoli precedenti, i sei legami C—H valgono 376,68 cal., e però la differenza $525,9 - 375,68 = 149,22$ cal. costituisce il valore dei soli legami fra gli atomi di carbonio (2). Secondo le conclusioni ottenute per altra via con esperienze termochimiche dal Thomsen (3) il benzolo si comporta, almeno termochimicamente, come se contenesse nove legami semplici, ciò che corrisponde alla formola centrica. Ognuno dei detti nove legami rappresenta dunque un valore di 16,6 calorie.

(1) 34,35 è il calore di combustione del gr. atomo d'idrogeno molecolare e 95 è il calore di dissociazione di una molecola d'idrogeno, secondo le misure di Isnardi (Zeitschr. für Elektrochemie, XXI, 405).

(2) È facile vedere che questo risultato è indipendente da un eventuale errore nella determinazione del calore di dissociazione della molecola $H_2$.

(3) Thomsen, loc. cit., pag. 312.

Ragionando analogamente per altri idrocarburi ciclici, si ottengono i risultati raggruppati nel seguente specchio:

| Composto | Formula | Numero dei legami | | Valore di ogni legame |
|---|---|---|---|---|
| | | Per ogni C | Totale | |
| Benzolo . . . . | $C_6H_6$ | 1,5 | 9 | 16,6 |
| Naftalina . . . | $C_{10}H_8$ | 1,6 | 16 | 17.5 |
| Antracene . . . | $C_{14}H_{10}$ | 1,64 | 23 | 17.6 |
| Fenantrene. . . | $C_{14}H_{10}$ | 1,64 | 23 | 17,6 |
| Crisene . . . . | $C_{18}H_{12}$ | 1,66 | 30 | 18.0 |
| Decacilene . . . | $C_{36}H_{18}$ | 1,75 | 63 | 18,7 |
| Grafite . . . . | $(C_6)_n$ | 2,00 | — | 21,0 |

Dei dati termochimici impiegati per questi calcoli, non rinvenni nella letteratura il valore relativo al decaciclene, che interessava di avere essendo questo l'idrocarburo polinucleare più complesso e più povero d'idrogeno (ne contiene all'incirca come l'antracite); ne determinai perciò il calore di combustione, aiutato dal laureando capitano E. Laudati, che qui ringrazio. Il valore medio di parecchie determinazioni è (a pressione costante) di calorie 4072,8 per molecola.

Nella tabella precedente si rileva che, con l'aumentare del numero dei nuclei, cresce il numero medio dei legami che competono ad ogni atomo di carbonio, con tendenza al limite 2; in pari tempo cresce il valore medio di ogni legame fra atomi di carbonio, con tendenza ad avvicinarsi a quello calcolato per la grafite.

Negli idrocarburi idrogenati questo valore medio sembra superiore a quello che si ha per i corrispondenti non idrogenati, come si rileva dai seguenti dati, che starebbero in buon accordo con quelli relativi all'ottano normale, che è l'idrocarburo saturo elevato ed a catena aperta pel quale finora si hanno le determinazioni più attendibili:

| Composto | Formula | Numero dei legami | | Valore di ogni legame |
|---|---|---|---|---|
| | | Per ogni C | Totale | |
| Cicloesano . . . | $C_6H_{12}$ | 1 | 6 | 18.2 |
| Decaidronaftalina | $C_{10}H_{18}$ | 1,10 | 11 | 18,3 |
| Ottano normale . | $C_8H_{18}$ | 0,87 | 7 | 18,6 |

Naturalmente gli idrocarburi ciclici meno idrogenati sono quelli meglio paragonabili alla grafite ed i risultati suesposti si accordano singolarmente con quello che è stato detto da Debye e Scherrer (loc. cit.) sulla costituzione della grafite: questa sarebbe formata da reticoli esagonali posti in tanti piani paralleli collegati fra loro per mezzo di valenze. Il lato di questi

esagoni è, secondo i detti autori, più piccolo di quello delle molecole, pure esagonali, del benzolo, e di conseguenza si comprenderebbe come gli atomi di carbonio siano nella grafite più strettamente legati che nel benzolo (21,0 calorie in luogo di 16,6); così si intravede anche la possibilità di trovare una relazione fra il valore dell'affinità e la distanza degli atomi nei composti.

## Meccanica. — *Sul problema delle coazioni elastiche.* Nota II di GUSTAVO COLONNETTI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Volendo ulteriormente approfondire l'analisi della distorsione a cui nella Nota precedente abbiamo ricondotto il problema generale delle coazioni elastiche, introduciamo nelle nostre considerazioni le sei componenti di deformazione

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}$$

nonchè le sei componenti speciali di tensione

$$\sigma_x \ , \ \sigma_y \ , \ \sigma_z \ , \ \tau_{yz} \ , \ \tau_{zx} \ , \ \tau_{xy}$$

alle quali le prime sono legate dalle relazioni

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_y} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_z}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{yz}} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{zx}} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{xy}}$$

essendo

$$\varphi(\sigma_x , \sigma_y , \sigma_z , \tau_{yz} , \tau_{zx} , \tau_{xy})$$

l'energia potenziale elastica elementare.

E proponiamoci di determinare quale variazione subirebbe l'energia potenziale elastica totale

$$\Phi = \int_V \varphi(\sigma_x , \sigma_y , \sigma_z , \tau_{yz} , \tau_{zx} , \tau_{xy})\, dV$$

qualora si attribuissero idealmente alle $P_x , P_y , P_z$ e conseguentemente alle $\sigma_x , \sigma_y , \sigma_z , \tau_{yz} , \tau_{zx} , \tau_{xy}$, delle variazioni compatibili colle leggi dell'equilibrio; tali cioè che per esse il primitivo sistema di forze, per ipotesi equilibrato, si trasformi in un altro sistema, pure equilibrato.

Per il che occorre e basta che si abbia identicamente

$$(a)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(\delta\sigma_x)}{\partial x} + \dfrac{\partial(\delta\tau_{xy})}{\partial y} + \dfrac{\partial(\delta\tau_{zx})}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial(\delta\tau_{xy})}{\partial x} + \dfrac{\partial(\delta\sigma_y)}{\partial y} + \dfrac{\partial(\delta\tau_{yz})}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial(\delta\tau_{zx})}{\partial x} + \dfrac{\partial(\delta\tau_{yz})}{\partial y} + \dfrac{\partial(\delta\sigma_z)}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

$$(b)\qquad \begin{cases} \delta\sigma_x \cos(n.x) + \delta\tau_{xy}\cos(n.y) + \delta\tau_{zx}\cos(n.z) = 0 \\ \delta\tau_{xy}\cos(n.x) + \delta\sigma_y \cos(n.y) + \delta\tau_{yz}\cos(n.z) = 0 \\ \delta\tau_{zx}\cos(n,x) + \delta\tau_{yz}\cos(n.y) + \delta\sigma_z \cos(n.z) = 0 \end{cases}$$

rispettivamente in tutto lo spazio V occupato dal solido tagliato, e sulla superficie esterna che lo limita (sulla quale $n$ indica come d'uso la normale in un punto generico rivolta verso l'interno di V); mentre sulle due faccie del taglio dovranno riuscir verificate delle equazioni del tipo

$$(c)\qquad \begin{cases} \pm\,\delta P_x + \delta\sigma_x \cos(n.x) + \delta\tau_{xy}\cos(n.y) + \delta\tau_{zx}\cos(n.z) = 0 \\ \pm\,\delta P_y + \delta\tau_{xy}\cos(n.x) + \delta\sigma_y \cos(n.y) + \delta\tau_{yz}\cos(n.z) = 0 \\ \pm\,\delta P_z + \delta\tau_{zx}\cos(n.x) + \delta\tau_{yz}\cos(n.y) + \delta\sigma_z \cos(n.z) = 0 \end{cases}$$

intendendosi che il segno superiore si riferisce alla faccia $\alpha$, e l'inferiore alla faccia $\beta$, conformemente a ciò che si è detto in proposito nella Nota precedente.

Poichè $\varphi$ è una forma quadratica, si ha

$$\int_V \varphi(\sigma_x + \delta\sigma_x, \sigma_y + \delta\sigma_y, \dots \tau_{xy} + \delta\tau_{xy})\, dV - \int_V \varphi(\sigma_x, \sigma_y, \dots \tau_{xy})\, dV =$$

$$= \int_V \left[\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_x}\delta\sigma_x + \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_y}\delta\sigma_y + \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_z}\delta\sigma_z + \frac{\partial\varphi}{\partial\tau_{yz}}\delta\tau_{yz} + \frac{\partial\varphi}{\partial\tau_{zx}}\delta\tau_{zx} + \frac{\partial\varphi}{\partial\tau_{xy}}\delta\tau_{xy}\right] dV +$$

$$+ \int_V \left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma_x^2}\overline{\delta\sigma_x}^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma_x . \partial\sigma_y}\delta\sigma_x . \delta\sigma_y + \cdots + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_{xy}^2}\overline{\delta\tau_{xy}}^2\right] dV .$$

Prescindendo dal gruppo dei termini di second'ordine — del quale mi preme soltanto rilevare che è essenzialmente positivo — scriveremo la proposta variazione sotto la forma:

$$\delta\Phi = \int_V [\varepsilon_x\, \delta\sigma_x + \varepsilon_y\, \delta\sigma_y + \varepsilon_z\, \delta\sigma_z + \gamma_{yz}\, \delta\tau_{yz} + \gamma_{zx}\, \delta\tau_{zx} + \gamma_{xy}\, \delta\tau_{xy}]\, dV$$

Ma

$$\int_V \varepsilon_x \delta\sigma_x dV = \int_V \frac{\partial u}{\partial x} \delta\sigma_x dV = \int_V \frac{\partial}{\partial x}(u \cdot \delta\sigma_x) dV - \int_V u \frac{\partial(\delta\sigma_x)}{\partial x} dV =$$

$$= -\int_S u \cdot \delta\sigma_x \cos(n \cdot x) dS - \int_V u \frac{\partial(\delta\sigma_x)}{\partial x} dV$$

(con S indico qui, come già altrove, l'intiera superficie del solido tagliato, cioè il complesso costituito dalla superficie esterna propriamente detta, che separa V dallo spazio circostante, e dalle due faccie del taglio praticato lungo $\Sigma$).

Similmente

$$\int_V \gamma_{yz} \delta\tau_{yz} dV = \int_V \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \delta\tau_{yz} dV =$$

$$= \int_V \left[\frac{\partial}{\partial y}(w \cdot \delta\tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z}(v \cdot \delta\tau_{yz})\right] dV - \int_V \left[w \frac{\partial(\delta\tau_{yz})}{\partial y} + v \frac{\partial(\delta\tau_{yz})}{\partial z}\right] dV =$$

$$= -\int_S \left[w \cdot \delta\tau_{yz} \cos(n \cdot y) + v \cdot \delta\tau_{yz} \cos(n \cdot z)\right] dS -$$

$$- \int_V \left[w \frac{\partial(\delta\tau_{yz})}{\partial y} + v \frac{\partial(\delta\tau_{yz})}{\partial z}\right] dV.$$

Operando queste sostituzioni e le loro analoghe, ed ordinando, si ottiene facilmente:

$$\delta\Phi = -\int_V \left\{ \left[\frac{\partial(\delta\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\delta\tau_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(\delta\tau_{zx})}{\partial z}\right] u + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\partial(\delta\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(\delta\sigma_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\delta\tau_{yz})}{\partial z}\right] v + \left[\frac{\partial(\delta\tau_{zx})}{\partial x} + \frac{\partial(\delta\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(\delta\sigma_z)}{\partial z}\right] w \right\} dV -$$

$$- \int_S \left\{ \left[\delta\sigma_x \cos(n \cdot x) + \delta\tau_{xy} \cos(n \cdot y) + \delta\tau_{zx} \cos(n \cdot z)\right] u + \right.$$

$$+ \left[\delta\tau_{xy} \cos(n \cdot x) + \delta\sigma_y \cos(n \cdot y) + \delta\tau_{yz} \cos(n \cdot z)\right] v +$$

$$\left. + \left[\delta\tau_{zx} \cos(n \cdot x) + \delta\tau_{yz} \cos(n \cdot y) + \delta\sigma_z \cos(n \cdot z)\right] w \right\} dS.$$

Tenuto poi conto delle condizioni $(a)$, $(b)$ e $(c)$ imposte da principio, questa espressione si riduce subito a

$$\delta\Phi = \int_{\Sigma\,(\text{faccia}\ \alpha)} (\delta P_x \cdot u_\alpha + \delta P_y \cdot v_\alpha + \delta P_z \cdot w_\alpha)\, d\Sigma -$$

$$- \int_{\Sigma\,(\text{faccia}\ \beta)} (\delta P_x \cdot u_\beta + \delta P_y \cdot v_\beta + \delta P_z \cdot w_\beta)\, d\Sigma =$$

$$= -\int_\Sigma (\delta P_x \cdot \Delta u + \delta P_y \cdot \Delta v + \delta P_z \cdot \Delta w)\, d\Sigma.$$

Ma le discontinuità $\Delta u, \Delta v, \Delta w$, lo abbiamo già detto più di una volta nella Nota precedente, sono nella presente trattazione da considerarsi come delle costanti — esse sono infatti nè più nè meno che i dati del problema — sicchè si può scrivere addirittura

$$\delta\Phi = -\delta \int_{\Sigma} (P_x \Delta u + P_y \Delta v + P_z \Delta w)\, d\Sigma$$

o, ciò che fa lo stesso,

$$\delta \left[ \Phi + \int_{\Sigma} (P_x \Delta u + P_y \Delta v + P_z \Delta w)\, d\Sigma \right] = 0 .$$

Si può esprimere questo risultato dicendo che:

*lo stato di tensione incognito, proprio della considerata distorsione, è quello che rende minima la funzione*

$$\Phi + \int_{\Sigma} (P_x \Delta u + P_y \Delta v + P_z \Delta w)\, d\Sigma$$

*compatibilmente coi valori dati delle discontinuità su* $\Sigma$.

Non sarà inutile, a questo punto, un'osservazione.

L'espressione testè scritta misura evidentemente l'energia potenziale che, operando la proposta distorsione, si viene a comunicare al solido tagliato, supposto sollecitato sulle due faccie del taglio dalle forze

$$\pm P_x \quad \pm P_y\ , \ \pm P_z\ .$$

È dunque quella stessa espressione che si dovrebbe rendere minima quando, per identificare la configurazione di equilibrio di un tal solido, si volesse ricorrere al procedimento classico che fa capo al teorema dei lavori virtuali.

Senonchè questo procedimento, presupponendo date le forze deformatrici ed incogniti i parametri geometrici della deformazione, caratterizza la configurazione risolvente come la sola, tra tutte quelle che il solido tagliato potrebbe assumere, alla quale corrisponda uno stato di tensione in equilibrio colle forze date.

Il ragionamento che io sono venuto sviluppando procede invece, in certo qual modo, in senso opposto; le $P_x$, $P_y$, $P_z$ sono, come ho dichiarato esplicitamente fin da principio, variabili insieme collo stato interno di tensione, col quale si mantengono sempre in equilibrio; il minimo della espressione scritta si stabilisce pertanto per rispetto a tutti gli stati di tensione equilibrati, tra i quali si viene a caratterizzare quello risolvente come il solo a cui corrisponda una configurazione del solido tagliato compatibile colle condizioni geometriche (discontinuità $\Delta u$, $\Delta v$, $\Delta w$ degli spostamenti in corrispondenza del taglio) che costituiscono i dati del nostro problema.

È intanto assai facile rendersi conto del modo con cui il nuovo teorema potrà venire in pratica utilizzato. Si può infatti dimostrare che:

*l'identificazione dello stato di tensione incognito può farsi dipendere dalla risoluzione di un sistema di $r$ equazioni lineari fra $r$ incognite tutte le volte che si sa in precedenza che esso appartiene ad una classe di stati equilibrati tale che si possano riferire i singoli stati della classe ai singoli sistemi di valori di $r$ parametri indipendenti*

$$X_1 , X_2 , \ldots X_r$$

*biunivocamente e linearmente, cioè in modo che tanto le forze $P_x , P_y , P_z$ come le componenti speciali di tensione $\sigma_x , \sigma_y , \sigma_z , \tau_{yz} , \tau_{zx} . \tau_{xy}$ risultino funzioni lineari di quegli $r$ parametri.*

Infatti, nelle ipotesi fatte, la funzione $\Phi$, che è notoriamente quadratica nelle $\sigma_x , \sigma_y , \ldots \tau_{xy}$, risulterà tale anche nelle $X_1 , X_2 , \ldots X_r$; mentre

$$\int_\Sigma (P_x \Delta u + P_y \Delta v + P_z \Delta w)\, d\Sigma$$

che è lineare nelle $P_x , P_y , P_z$, risulterà necessariamente lineare anche nelle nuove variabili.

Le $r$ equazioni in cui si scinde la imposta condizione di minimo:

$$\frac{\partial}{\partial X_1}\left[\Phi + \int_\Sigma (P_x \Delta u + P_y \Delta v + P_z \Delta w)\, d\Sigma\right] = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial}{\partial X_r}\left[\Phi + \int_\Sigma (P_x \Delta u + P_y \Delta v + P_z \Delta w)\, d\Sigma\right] = 0$$

saranno quindi certamente lineari, non omogenee, negli $r$ parametri, i cui valori risulteranno per conseguenza completamente determinati.

Non è senza interesse avvertire che l'accennato riferimento lineare ad un numero finito di parametri indipendenti si presenta immediato nei più interessanti casi particolari; esso fu dal Volterra illustrato nella sua già citata trattazione dei *sistemi ciclici di elementi elasticamente pieghevoli*; esso viene d'altra parte correntemente utilizzato dai tecnici nello studio di quelle particolari distorsioni che si generano nelle costruzioni in seguito a difetti di esecuzione, ad errori di montaggio od a cedimenti dei vincoli.

Chè anzi le equazioni con cui si perviene a risolvere questi problemi mediante la replicata applicazione del teorema di Castigliano, altro non sono che un caso molto particolare di quelle testè ottenute [1].

[1] Cfr. G. Colonnetti, *Applicazione a problemi tecnici di un nuovo teorema sulle coazioni elastiche.* Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. LIV (in corso di stampa).

## PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente dà il cordiale benvenuto al Socio prof. Emilio Borel, il quale assiste alla seduta colla divisa di capitano francese.

Il Socio Volterra ricorda che oggi a Torino, allievi e Colleghi presentano al Socio senatore prof. Enrico D'Ovidio un volume pubblicato in di lui onore, per rendergli omaggio nell'occasione che egli lascia la cattedra avendo raggiunto i limiti d'età; e a nome dell'Accademia invia al D'Ovidio i più fervidi augurî perchè la sua attività sia conservata agli studî e al bene della scuola.

E. M.

## *Seduta del 17 novembre 1918.*



### PERSONALE ACCADEMICO

# INDICE

## Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 3 novembre 1918.*



(*Segue in terza pagina*)

E. Mancini *Segretario d'ufficio responsabile.*

Pubblicazione bimensile. N. 11-12.

# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

## RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Sedute del 1° e del 15 dicembre* 1918.

**Volume XXVII.° — Fascicoli 11°-12°**

**e Indice del volume.**

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

# ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

## PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

---

### I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 9 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità sono portate a pagine 4 $^1/_2$.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 50 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 30 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

### II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a)* Con una proposta a stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b)* Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c)* Con un ringraziamento all'autore. - *d)* Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta, pubblica nell'ultimo in seduta segreta

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 50 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 30 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messo a carico degli autori.

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

*Seduta del 1° dicembre 1918.*

A. Ròiti, Vicepresidente.

## MEMORIE E NOTE
## DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

### Analisi. — *Sull'iterazione della funzione* $x^2 - a$. Nota del Socio S. Pincherle.

Il problema dell'iterazione, all'infuori del caso ovvio della convergenza, è stato così poco studiato e presenta d'altra parte tali nuovi aspetti, anche in casi particolari, che non sembra inutile trattare dettagliatamente un esempio speciale, elementare quanto si vuole, ma istruttivo per la discussione cui dà luogo ed anche perchè dà indicazioni per la trattazione di casi più complessi. Questo esempio consiste nell'iterare la funzione quadratica semplicissima $x^2 - a$, dove $x$ è variabile complessa ed $a$ un numero positivo, che verrà detto *base*.

1. Per brevità, indicherò con $\alpha(x)$ la funzione $x^2 - a$, e con $\alpha_2(x)$, $\alpha_3(x)$, ... le sue iterate, per modo che è

$$\alpha_1(x) = \alpha(x), \dots \alpha_n(x) = \alpha_{n-1}^2(x) - a. \tag{1}$$

Applicando ad un punto $x$ del piano $x$ complesso l'operazione $\alpha(x)$ ripetutamente, si ottengono i punti

$$x_1 = \alpha(x), \; x_2 = \alpha_2(x) = \alpha(x_1), \dots x_n = \alpha_n(x) = \alpha(x_{n-1}), \dots$$

che sono i *conseguenti* di $x$, mentre le radici delle equazioni in $t$

$$\alpha(t) = x, \; \alpha_2(t) = x, \dots \alpha_n(t) = x, \dots$$

ne sono gli *antecedenti*; uno degli antecedenti $n^{simi}$ di $x$, cioè una qualunque delle radici di $\alpha_n(t) = x$, potrà indicarsi con $x_{-n}$. La totalità dei

conseguenti, degli antecedenti, e degli antecedenti dei conseguenti darà l'insieme dei punti *congruenti* ad $x$. Questo insieme è invariante per l'operazione $\alpha(x)$.

Si noti in particolare l'insieme dei conseguenti di $x=0$:

$$-a\ ,\ a^2-a\ ,\ (a^2-a)^2-a\ ,\ldots \tag{2}$$

e degli antecedenti di $x=0$, che si diranno *fuochi*:

$$\pm\sqrt{a}\ ,\ \pm\sqrt{a\pm\sqrt{a}}\ ,\ \pm\sqrt{a\pm\sqrt{a\pm\sqrt{a}}}\ ,\ldots \tag{3}$$

2. I punti del piano $x$ che rimangono invariati per applicazione di $\alpha(x)$ sono, oltre ad $x=\infty$, le radici

$$\tfrac{1}{2}(1\pm\sqrt{1+4a})$$

dell'equazione $x^2-a=x$. Esse sono reali per $a$ positivo, e si indicherà con $z$ la radice positiva, con $z'$ la negativa.

Poichè tutti i conseguenti di $z$ coincidono con $z$, così l'insieme dei punti congruenti a $z$ consta di $z$ e dei suoi antecedenti, fra cui vi è $-z$. A $z$ e ai suoi antecedenti daremo il nome di *vertici*. Il punto $z'$ è punto di convergenza regolare se è $a<\frac{3}{4}$; il punto $z$ non è mai tale.

3. Indicherò con $\Omega$ l'insieme dei punti $x$ pei quali è

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n(x)=\infty\,.$$

È facile dimostrare che questo insieme comprende tutti i punti pei quali è $|x|>z$. Si può pure dimostrare che $\Omega$ non ha punti isolati, che è connesso, che un punto limite di antecedenti di un qualunque punto $x$ non può appartenere ad $\Omega$. Perciò, gli antecedenti dei punti di $\Omega$, i quali appartengono quindi tutti ad $\Omega$, hanno i loro punti limiti al contorno $\Gamma$ di $\Omega$. Questo contorno è chiuso; è invariante rispetto ad $\alpha(x)$.

4. La successione

$$\sqrt{a}\ ,\ \sqrt{a+\sqrt{a}}\ ,\ \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}\ ,\ldots \tag{4}$$

è costituita da numeri crescenti; essa è limitata superiormente, poichè per $a>2$ è

$$\sqrt{a+\sqrt{a}}<\sqrt{2a}<a,\quad \text{onde}\quad \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}<a,\ \text{ecc.},$$

ed è quindi *a fortiori* limitata per $a\leq 2$. Essa ha dunque un limite, che è evidentemente $z$.

Si ha $z < a$ per $a > 2$, $z > a$ per $a < 2$, $z = 2$ per $a = 2$. Ne viene che per $a \geq 2$, tutti i fuochi (3) sono reali, qualunque sia la disposizione dei segni $+$ o $-$.

5. I vertici, o antecedenti di $z$ (n. 2), sono dati da espressioni della forma

$$(5) \qquad \pm\sqrt{a \pm \sqrt{a \pm \cdots \pm \sqrt{a + z}}}$$

dove, tenuto conto che $z = \sqrt{a + z}$, sono compresi anche i valori $z$ e $-z$. Per $a > 2$, è $z < a$ e quindi tutti i vertici sono reali.

Nella (5), i radicali si contino da sinistra a destra. Se il loro numero è $n$, il vertice si dirà d'ordine $n$; ma se l'ultimo segno è $+$, in virtù della relazione

$$(6) \qquad z = \sqrt{a + z},$$

il numero dei radicali si riduce; si diranno perciò vertici *proprî* di ordine $n$ quelli che, contenendo $n$ radicali, hanno l'ultimo radicale affetto dal segno $-$. Così, sono vertici di secondo ordine

$$(7) \qquad \pm\sqrt{a \pm \sqrt{a + z}}$$

e fra questi, sono vertici proprî $\pm\sqrt{a - \sqrt{a + z}} = \pm\sqrt{a - z}$.

Per la rappresentazione dei vertici, può giovare una speciale notazione simbolica. Si scriva uno zero seguìto da virgola, e al seguito di questa $n$ cifre 0 od 1, ponendo la cifra 0 al posto occupato da un radicale affetto da segno $+$, la cifra 1 al posto occupato da un radicale di segno $-$. Così, le (7) saranno rappresentate da

$$0{,}00 \qquad 0{,}01 \qquad 0{,}10 \qquad 0{,}11\,;$$

$\sqrt{a - \sqrt{a - \sqrt{a + z}}}$ verrà rappresentato da 0,011. Per la proprietà (6), nella indicata rappresentazione si possono sopprimere, come nella numerazione ordinaria, gli zeri a destra: ad ogni vertice corrisponde quindi univocamente una frazione basica della numerazione binaria [1] compresa fra 0 (incluso) ed 1. Ai vertici proprî di ordine $n$ corrispondono quelle frazioni ad $n$ cifre dopo la virgola in cui l'ultima cifra è 1.

6. Trattenendoci sul caso $a > 2$, si vede senza difficoltà che tutti i punti pei quali è $|x| < \sqrt{a - z}$ appartengono ad $\Omega$. Lo zero, e quindi tutti i suoi conseguenti (2) e tutti i fuochi (3), appartengono quindi ad $\Omega$.

Si è osservato che nessun fuoco è in valore assoluto superioro a $z$; così, nessun fuoco positivo è inferiore a

$$\sqrt{a - \sqrt{a + \sqrt{a + \text{in inf.}}}}$$

[1] Aventi cioè per denominatore una potenza di 2.

cioè a $\sqrt{a-z}$; ne viene che nell'intervallo $(-\sqrt{a-z}, \sqrt{a-z})$ [1] non cade alcun fuoco all'infuori dello zero. L'intervallo $(-\sqrt{a-z}, \sqrt{a-z})$ si indichi con $q_0$; esso ha $2^n$ antecedenti $n^{simi}$, $2^{n-1}$ positivi e $2^{n-1}$ negativi, che cadono rispettivamente in $(\sqrt{a-z}, z)$ ed in $(-z, -\sqrt{a-z})$ complementari di $q_0$ su $(-z, z)$; questi antecedenti hanno per estremi vertici di ordine $n+2$, proprî, e reciprocamente, ogni vertice proprio di ordine $n+2$ è estremo di un intervallo $q_n$, antecedente $n^{simo}$ di $q_0$. Ognuno degli intervalli $q_n$ contiene un fuoco ed uno solo. Due intervalli $q$, qualunque sia il loro indice, non hanno in comune nè punti interni, nè estremi. Tutti gl'intervalli $q$ appartengono ad $\Omega$, ad eccezione dei loro estremi (vertici) che sono al contorno di $\Omega$.

Se ora si osserva che ogni vertice è limite di una successione di fuochi [come si vede sostituendo, nell'espressione (5) del vertice, gli elementi di (4) al posto di $z$] e che ogni fuoco è interno ad un intervallo $q$, ne viene che ogni vertice sarà anche punto limite di vertici.

Indichiamo ora con Z l'aggregato dei vertici e dei loro punti limiti. Esso è tutto posto sul segmento $(-z, z)$, i cui estremi gli appartengono; dei segmenti $q$ esso contiene solo gli estremi, perciò questi segmenti sono per Z intervalli *contigui*.

L'aggregato Z è per definizione *chiuso*, ed è anche *denso in sè*, per essere i vertici punti limiti di vertici; è dunque *perfetto*. È inoltre non denso, poichè in caso contrario conterrebbe tutto un intervallo, in cui cadrebbero necessariamente vertici, e quindi fuochi, contro il fatto che ogni fuoco è interno ad un intervallo contiguo.

7. È ora facile di stabilire, nel caso $a > 2$, quale sia il campo $\Omega$. Ad esso intanto appartengono l'esterno del cerchio $|x| = z$, l'interno del cerchio $|x| = \sqrt{a-z}$, cerchi che diremo rispettivamente $C_0$ e $C'_0$. Antecedente $n^{sima}$ di $C_0$ è la curva $C_n$ rappresentata dall'equazione

$$|\alpha_n(x)| = z;$$

è una cassinoide a $2^n$ fuochi, che sono gli $n^{simi}$ antecedenti di $x = 0$; essa consta di $2^n$ ovali, ciascuna delle quali taglîa l'asse reale in due punti (vertici) l'uno dei quali è vertice proprio, l'altro vertice improprio di ordine $n+1$; il segmento così determinato, o diametro dell'ovale, comprende infiniti intervalli contigui. Il campo esterno a tutte le ovali appartiene ad $\Omega$. La prima e la seconda ovale di $C_n$ sono tangenti internamente alla prima ovale di $C_{n-1}$ nei suoi vertici; la seconda e terza sono parimenti tangenti alla seconda ovale di $C_{n-1}$, e così via. Antecedente $n^{sima}$ di $C'_0$ è la curva data da

$$|\alpha_n(x)| = \sqrt{a-z};$$

[1] Con $(a, b)$ si indica l'intervallo (sull'asse reale) $a < x < b$.

è una cassinoide $C_n$ coi medesimi $2^n$ fuochi di $C_n$ e pure composta di $2^n$ ovali; l'interno di ciascuna di queste appartiene ad $\Omega$. Ogni ovale di $C'_n$ taglia l'asse reale in due vertici proprî di ordine $n+2$, comprendenti un diametro che non è altro se non uno degli intervalli contigui $q_n$. Due ovali consecutive di $C_n$ sono tangenti (esternamente) ad una ovale di $C'_{n-1}$ nei vertici di questa.

Si passi ora al limite per $n=\infty$. Una considerazione elementare di geometria analitica dimostra che la massima ordinata, tanto delle $C_n$ che delle $C'_n$, tende a zero per $n=\infty$. L'interno delle $C'_n$ tende all'insieme degli intervalli contigui, i vertici esclusi; l'esterno delle $C_n$ tende a tutto il piano meno ciò che rimane del segmento $(-z, z)$ togliendo gl'intervalli contigui; onde segue che « nel caso $a>2$, il campo $\Omega$, i cui punti sono « mandati all'infinito dall'iterazione indefinitamente ripetuta di $x^2-a$, è « costituito da tutto il piano, meno l'aggregato perfetto non denso Z posto « sul segmento $(-z, z)$ dell'asse reale ».

8. A questo studio si connette quello delle catene di radicali

$$\sqrt{a \pm \sqrt{a \pm \sqrt{a \pm \cdots}}} \tag{8}$$

in numero infinito; nel caso $a>2$, è già dimostrato [1] come ogni simile catena, per una determinata successione di segni, sia convergente e tenda ad un elemento determinato dell'aggregato Z, e reciprocamente, come ogni elemento di Z sia univocamente rappresentato da una determinata catena (8).

9. Nel caso $a=2$, si ha $z=2$, $z'=1$. La successione (4) tendendo a 2, ne viene

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\text{in inf.}}}}=0\,;$$

i vertici coincidono dunque coi fuochi ed un vertice proprio di ordine $n$ è un fuoco di ordine $n-2$ (con $n-2$ segni radicali).

Detto $C_0$ il cerchio $|x|=2$, l'esterno di $C_0$ appartiene ad $\Omega$; antecedente di $C_0$ è la curva $|\alpha(x)|=2$, che si vede essere una lemniscata $C_1$ di fuochi $\pm\sqrt{2}$, ed avente $x=0$ come punto doppio; l'esterno della lemniscata appartiene ad $\Omega$. Antecedente di $C_1$ è la lemniscata $C_2$ a quattro fuochi $|\alpha_2(x)|=2$; i fuochi sono $\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2}}$, i punti doppî sono i fuochi $\pm\sqrt{2}$ di $C_1$. Così di seguito: l'antecedente $n^{sima}$ di $C_0$ è una curva $C_n$, lemniscata a $2^n$ fuochi, di ordine $2^{n+1}$, ed i cui punti doppî sono i fuochi delle $C_{n-1}$. Chiamando *diametro* di $C_n$ il tratto di asse reale compreso fra due punti doppî consecutivi, si vede che ogni diametro di $C_n$ è somma di

(1) Rendiconti della R. Acc. di Bologna, 17 febbraio 1918.

due diametri consecutivi di $C_{n-1}$. Come al n. 7, una considerazione semplice di geometria analitica mostra che la massima ordinata di $C_n$ tende a zero per $n = \infty$. Le $C_n$ ammettono dunque come limite il segmento $(-2, 2)$: il campo $\Omega$ è pertanto costituito da tutto il piano, meno codesto segmento. Ogni fuoco è punto limite di fuochi; l'insieme perfetto dei fuochi e dei loro punti limiti è denso su $(-2, 2)$ e costituisce cioè tutto l'intervallo. Ogni catena indefinita

$$\pm\sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \cdots}}}, \tag{9}$$

dove sia determinata la successione dei segni, è convergente e tende ad un numero $x$ compreso fra $-2$ e $2$, e reciprocamente, ogni tale numero ammette rappresentazione nella forma (9).

La relazione che lega i punti consecutivi

$$x_n = x_{n-1}^2 - 2$$

s'incontra in trigonometria elementare nella duplicazione degli archi; basta porre $x = 2\cos\theta$, $x_1 = 2\cos 2\theta$.

10. Venendo finalmente al caso di $a < 2$, si vede che è $z > a$, e che i fuochi non sono più tutti reali; anzi, per $a < 1$, nessuna delle (3) in cui figuri qualche segno $-$ può essere reale e sono tali i soli fuochi della successione (4) insieme ai loro contrarî. Per $a = 1$, oltre a questi, si ha il fuoco reale 0: per $1 < a < 2$, il decidere per quali disposizioni dei segni $+$ e $-$ una espressione (3) sia reale viene a presentare qualche difficoltà [1].

Anche nel caso $a < 2$, i punti del piano esterni al cerchio $C_0$ dato da $|x| = z$ appartengono ad $\Omega$; vi appartengono dunque gli antecedenti di questi, cioè i punti esterni alla curva $C_1$ data da $|x^2 - a| = z$; questa è una cassinoide di fuochi $\pm\sqrt{a}$, formata da una sola ovale interna a $C_0$ e tangente a $C_0$ nei punti $\pm z$. Antecedente di $C_1$ è la curva $C_2$, data da $|\alpha_2(x)| = z$, cassinoide a quattro fuochi pure di un solo pezzo, interna a $C_1$ cui è tangente nei quattro vertici $\pm z$ e $\pm\sqrt{a - z}$, i primi reali, i secondi immaginarî. Così continuando, si dà origine ad una successione indefinita di curve $C_n$, cassinoidi a $2^n$ fuochi, ognuna delle quali è interna alla precedente e tangente alla precedente nei vertici di ordine $n$ proprî ed improprî.

I punti esterni ad ognuna delle $C_n$ appartengono ad $\Omega$; il contorno $\Gamma$ di $\Omega$ è dunque interno a tutte le $C_n$ ed è il luogo limite di queste. I punti limiti dell'aggregato degli antecedenti di un punto qualunque di $\Omega$ appartengono a $\Gamma$.

11. Considerando la successione particolare di vertici

$$\sqrt{a + \sqrt{a - z}}\,,\quad \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a - z}}}\,,\quad \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a - z}}}}, \ldots \tag{10}$$

[1] Ved. Rend. della R. Acc. dei Lincei, Comunicazione del 6 settembre 1918.

si dimostra facilmente che i loro argomenti tendono a zero, fondandosi sulla relazione ricorrente che li lega, mentre i loro moduli tendono a $z$. Da ciò risulta subito che ogni vertice è punto limite di vertici. L'aggregato Z dei vertici e dei loro punti limiti è perfetto, appartiene a $\Gamma$; i suoi punti sono o sulle $C_n$ — su tutte da un indice in poi — o sono interni a tutte le $C_n$.

I vertici di ordine $n$ sono sulla $C_{n-1}$ e su tutte le $C_n, C_{n+1}, \ldots$ e sono i punti di contatto di $C_{n-1}$ colle $C_n, C_{n+1}, \ldots$ Ferma la convenzione del n. 5 per la rappresentazione simbolica dei vertici mediante le frazioni basiche della numerazione binaria, si vede che i vertici si susseguono sulla $C_{n-1}$ nel senso delle rotazioni positive, come le corrispondenti frazioni si seguono nel loro ordine di grandezza. Un raggio che, uscendo da 0, ruoti nel senso positivo, incontra dunque i vertici ed i loro punti limiti ordinatamente, cioè nel medesime ordine con cui si seguono i numeri reali compresi fra 0 ed 1 scritti con numero finito od infinito di cifre nella numerazione binaria. Il detto raggio uscente da 0 attraversa sempre in qualche punto la $\Gamma$, poichè va da 0, non appartenente ad $\Omega$, a punti che ad $\Omega$ appartengono; non è escluso però che questo punto possa essere lo zero medesimo.

Infine, è da osservare, in base all'emboitement delle curve $C_n$, che il luogo limite delle medesime offre una singolare analogia con la celebre curva di Von Koch.

## Meccanica. — *$ds^2$ einsteiniani in campi newtoniani.* VII: *Il sottocaso* $B_2$): *Soluzioni oblique.* Nota del Socio T. Levi-Civita.

Con questa Nota esaurisco finalmente lo studio del sottocaso $B_2$), che comprende in sostanza tutti i campi di forza (non occupati da masse materiali) per effetto dei quali lo spazio si atteggia a varietà normale di Bianchi con due curvature principali eguali. Le equazioni che li determinano, ridotte a tal forma da poter iniziare le integrazioni, stanno scritte a § 7 della Nota IV. Nelle Note V e VI (1) ci siamo occupati di due particolari categorie di integrali (soluzioni longitudinali e soluzioni quadrantali), le quali corrispondono all'ipotesi che sia costante l'una o l'altra di due certe funzioni $\xi(x_1, x_2)$, $\eta(x_3)$.

Si tratta ora dell'ultima e più generale categoria di soluzioni, in cui tanto $\xi$ quanto $\eta$ sono effettive funzioni, con che diviene lecito assumerle entrambe per variabili indipendenti. In primo luogo (§ 1) richiamo le suaccennate equazioni differenziali, semplificandole col tener conto di alcune espressioni parametriche (si potrebbe anche dire integrali di una parte delle equa-

(1) Cfr. Nota IV, pp. 220-229; Nota V, pp. 240-248; Nota VI, pp. 283-292 di questo volume.

zioni del sistema), assegnate in principio della Nota precedente. Nel sistema così esplicitato restano da determinare funzioni incognite di un solo argomento. Le variabili non sono però separate, e il sistema ha un aspetto asimmetrico, punto espressivo. Lo si trasforma con qualche accorgimento elementare (§ 2), dopo di che l'integrazione si fa senza calcoli (§ 3), e si perviene (§ 4) a rappresentazioni canoniche eleganti, una prima algebrica, e una seconda per trascendenti ellittiche. Non ho fatto uno studio geometrico approfondito, come per le categorie precedenti, notando soltanto che in generale varia da punto a punto l'angolo fra le linee assiali e le linee di pendenza, e l'inclinazione di entrambe sulle linee di forza. Ecco perchè ho chiamato *oblique* queste soluzioni.

Le costanti introdotte dall'integrazione sono quattro, ma due equivalgono a scelta arbitraria delle unità di lunghezza e di tempo, sicchè le soluzioni intrinsecamente distinte sono $\infty^2$ (anzichè soltanto $\infty^1$ come le longitudinali e le quadrantali).

L'ultimo paragrafo contiene una tabella riassuntiva dei risultati e delle formule concernenti il sottocaso $B_2$).

## 1. — Richiami.

I $ds^2$ einsteiniani da determinare sono statici, cioè della forma

$$V^2\, dt^2 - dl^2\,,$$

e appartengono al sottocaso $B_2$), in cui la metrica spaziale è definita da

$$dl^2 = e^{2\tau}\,(d\sigma^2 + dx_3^2)\,,$$

essendo $d\sigma$ un elemento lineare binario indipendente da $x_3$, e

$$e^{-\tau} = \xi(x_1\,, x_2) + \eta(x_3)\,.$$

A prescindere dalle soluzioni (già discusse nella Nota V), in cui $\xi$ si mantiene costante, si ha, in base alla Nota precedente,

$$d\sigma^2 = \frac{1}{K_0}\left(\frac{d\xi^2}{\Xi} + \Xi\, d\varphi^2\right), \tag{1}$$

con $\Xi$ funzione (incognita) della sola $\xi$, e $K_0$ costante positiva.

La curvatura gaussiana K di questo $d\sigma^2$ è data [loc. cit., formula (3)] da

$$K = -\tfrac{1}{2}\, K_0\, \Xi''\,. \tag{2}$$

Infine

$$V = V_0\, \frac{e^{\zeta}}{\xi + \eta}\,, \tag{3}$$

con $V_0$ costante (avente le dimensioni di una velocità) e $\zeta$ funzione della sola $x_3$.

Complessivamente si presentano tre funzioni incognite, ciascuna di un solo argomento: $\Xi(\xi)$, $\eta(x_3)$, $\zeta(x_3)$, le quali devono verificare le equazioni (16), (18) e (19) della Nota IV. Avendo cura di sostituire a $e^{-\tau}$, $\Delta\xi$, $\Delta_2\xi$, K i loro valori $\xi+\eta$, $K_0\Xi$, $K_0\Xi'$, $-\frac{1}{2}K_0\Xi''$ [il primo e l'ultimo già richiamati, e gli altri due forniti dalle (1'') della Nota precedente], le equazioni da integrare assumono la forma

$$\eta''-\zeta'\eta'=0\,, \tag{4}$$

$$(-\tfrac{1}{2}K_0\Xi''+\zeta''+\zeta'^2)(\xi+\eta)-2\eta''+K_0\Xi'=0\,, \tag{5}$$

$$-\tfrac{1}{2}K_0\Xi''(\xi+\eta)^2+2(K_0\Xi'+\eta'')(\xi+\eta)-3(K_0\Xi+\eta'^2)=0\,. \tag{6}$$

Rammento altresì che le curvature principali di tutti i $dl^2$ appartenenti al sottocaso $B_2$) sono legate dalle relazioni

$$\omega_1=\omega_2=-\tfrac{1}{2}\omega\,.$$

Per $\omega$, la (20) della Nota IV, colle sostituzioni testè indicate, porge

$$\omega=-\tfrac{1}{2}K_0\Xi''(\xi+\eta)^2+K_0\Xi'(\xi+\eta)-(K_0\Xi+\eta'^2)\,. \tag{7}$$

2. — Trasformazione delle equazioni differenziali.

Possiamo escludere che $\eta$ si riduca ad una costante (caso esaurito nella Nota preced.) e ritenere perciò $\eta'\neq 0$. Siamo così autorizzati a immaginare $x_3$ espresso per mezzo di $\eta$, con che $\eta'^2$ diviene una ben determinata funzione positiva di $\eta$, che assumeremo sotto la forma

$$\eta'^2=K_0H(\eta)\,, \tag{8}$$

designando $K_0$ la costante positiva che già figura nelle precedenti equazioni e che si introduce per ragioni di omogeneità, cioè (essendo $x_3$ una lunghezza e quindi $\eta'^2$ delle stesse dimensioni di $K_0$) per rendere la incognita $H(\eta)$ puro numero al pari di $\eta$.

Dalla (8), derivando rispetto ad $x_3$, segue successivamente

$$2\eta''=K_0H'\quad,\quad\frac{\eta'''}{\eta'}=\tfrac{1}{2}K_0H''\,. \tag{8'}$$

Siccome poi, in virtù della (4),

$$\zeta'=\frac{\eta''}{\eta'}\,,$$

così da un lato si ha, badando alle (8'),

$$(4') \qquad \zeta'' + \zeta'^2 = \frac{\eta'''}{\eta'} = \tfrac{1}{2} K_0 H'' ;$$

mentre, integrando, si ricava

$$\zeta = \log \eta' + \text{cost.}$$

Di $\zeta$ (rimanendo ormai espresso per $\eta$ il binomio $\zeta'' + \zeta'^2$) ho bisogno soltanto per formare V a norma della (3). In V già figura la costante moltiplicativa $V_0$ a priori indeterminata. È dunque inutile farne figurare un'altra in $e^\zeta$, e si può limitarsi a mettere in evidenza un fattore di omogeneità $\frac{1}{\sqrt{K_0}}$, ritenendo

$$e^\zeta = \frac{1}{\sqrt{K_0}} \eta' ,$$

ossia, in base alla (8),

$$(4'') \qquad e^\zeta = \sqrt{H(\eta)} ,$$

dove, ben si intende, il radicale va preso positivamente.

Mediante le (8), (8') e (4'), le (5) e (6) assumono un aspetto compatto ed elegante, divenendo rispettivamente

$$(5') \qquad -\tfrac{1}{2}(\Xi'' - H'')(\xi + \eta) + (\Xi' - H') = 0 ,$$

$$(6') \qquad -\tfrac{1}{2}\Xi'(\xi + \eta)^2 + (2\Xi' + H')(\xi + \eta) - 3(\Xi + H) = 0 .$$

A queste due equazioni (e a queste due soltanto) devono soddisfare le nostre due funzioni incognite $\Xi(\xi)$, $H(\eta)$. La dipendenza da due diversi argomenti darebbe a priori poca speranza di compatibilità. Ma nella fattispecie è legittima la presunzione che esistano soluzioni. Passo ad accertarlo, dopo aver però trascritta l'equazione (7) che dà $\omega$, sostituendovi $K_0 H$ ad $\eta'^2$. Si ha così

$$(7') \qquad \omega = - K_0 \left\{ \tfrac{1}{2}\Xi''(\xi + \eta)^2 - \Xi'(\xi + \eta) + \Xi + H \right\} .$$

### 3. — Determinazione delle funzioni incognite $\Xi, H$.

Dalla (5'), derivando rispetto a $\xi$, segue

$$-\tfrac{1}{2}\Xi'''(\xi + \eta) + \tfrac{1}{2}(\Xi'' + H'') = 0 ,$$

e di qui, derivando ulteriormente rispetto ad $\eta$,

$$(9) \qquad \Xi''' = H''' .$$

Il primo membro dipende soltanto da $\xi$, il secondo soltanto da $\eta$; bisogna quindi che siano entrambi costanti. Perciò $\Xi$ ed $H$ non possono essere altro che polinomi di terzo grado nei rispettivi argomenti $\xi, \eta$. Designando con $\Xi_0, \Xi'_0, \Xi''_0$ i valori di $\Xi, \Xi', \Xi''$ per $\xi = 0$, e analogamente con $H_0$, ecc., si ha dalla (5'), dalla sua derivata rispetto a $\xi$, e dalla (6'), facendovi $\xi = \eta = 0$:

$$\Xi'_0 = H'_0 \quad , \quad \Xi''_0 = -H''_0 \quad , \quad \Xi_0 = -H_0 .$$

In base a queste relazioni e alla (9), il confronto dei due sviluppi di Taylor

$$\Xi(\xi) = \Xi_0 + \Xi'_0 \xi + \tfrac{1}{2} \Xi''_0 \xi^2 + \tfrac{1}{6} \Xi''' \xi^3 ,$$
$$H(\eta) = H_0 + H'_0 \eta + \tfrac{1}{2} H''_0 \eta^2 + \tfrac{1}{6} H''' \eta^3$$

consente di esprimere $H$ per $\Xi$ sotto la forma

$$H(\eta) = -\Xi(-\eta) . \tag{10}$$

Tenendone conto, si constata ovviamente che le (5') e (6') riescono soddisfatte, qualunque sia il polinomio di terzo grado $\Xi(\xi)$, che rimane così arbitrario.

L'identità

$$-H(\eta) = \Xi(-\eta) = \Xi\{\xi - (\xi + \eta)\} =$$
$$= \Xi(\xi) - (\xi + \eta)\Xi'(\xi) + \tfrac{1}{2}(\xi + \eta)^2 \Xi''(\xi) - \tfrac{1}{6}(\xi + \eta)^3 \Xi'''$$

semplifica notevolmente l'espressione (7') di $\omega$, riducendola a

$$\omega = -\tfrac{1}{6} K_0 \Xi''' . (\xi + \eta)^3 . \tag{7''}$$

Ne deduciamo anzitutto che la costante $\Xi'''$ va ritenuta diversa da zero; altrimenti si annullerebbe $\omega$ e con essa le altre due curvature $\omega_1, \omega_2$, e si ricadrebbe al solito nel caso elementare $B_3$) di uno spazio euclideo. Inoltre, ricordando che $e^{-\tau} = \xi + \eta$, riconosciamo che, anche in questo caso, $\omega$ si presenta sotto la forma $\omega_0 e^{-3\tau}$ ($\omega_0$ costante), come deve avvenire, in virtù delle condizioni di integrabilità, per tutte le $B_2$) [cfr. Nota IV, § 2].

### 4. — Soluzioni oblique — Forme canoniche.

Dalla espressione (1) del $d\sigma^2$ apparisce che, se si designa con $\lambda$ una generica costante positiva e si sostituiscono ordinatamente $\lambda\Xi, \frac{K_0}{\lambda}, \frac{\varphi}{\lambda}$ a $\Xi, K_0, \varphi$, il $d\sigma^2$ non si altera. Con tale sostituzione non si toccano $\xi$, $\eta, x_3$, nè per conseguenza

$$e^{2\tau} dx_3^2 = \frac{1}{(\xi + \eta)^2} dx_3^2 ,$$

mentre, in virtù delle (4″) e (10), $e^{\zeta}$ rimane materialmente moltiplicata per $\sqrt{\lambda}$. Lo stesso avverrebbe per V in base alla (3), ma basta mutare anche $V_0$ in $\frac{V_0}{\sqrt{\lambda}}$ perchè si conservi la forma primitiva. Dunque, eseguendo simultaneamente tutti gli scambi indicati, non si altera il $ds^2$ einsteiniano

$$V^2 dt^2 - dl^2 = V^2 dt^2 - \frac{1}{(\xi+\eta)^2}(d\sigma^2 + dx_3^2),$$

alla cui determinazione è in definitiva rivolta la nostra ricerca.

Possiamo valerci di questa osservazione per attribuire al coefficiente di $\xi^3$ in $\Xi$ (che è poi $\frac{1}{6}\Xi'''$) quel valore numerico (non nullo) che più ci piace, coll'unico vincolo di conservare il segno. Assumeremo come coefficiente di $\xi^3$ il valore $4\varepsilon$, essendo $\varepsilon = \pm 1$ secondo il segno dell'originario $\Xi'''$.

D'altra parte è ancora lecito, senza alterare $\xi+\eta$, $d\xi$, $d\eta$, nè per conseguenza le equazioni (5′), (6′) che caratterizzano $\Xi$, $H$, di cambiare $\xi$ in $\xi + h$ ($h$ costante), purchè contemporaneamente si cambi $\eta$ in $\eta - h$. Così, senza ledere la generalità, si può assumere il polinomio di terzo grado $\Xi(\xi)$ sotto la forma normale di Weierstrass, a meno del fattore $\varepsilon$, ritenendo

$$\Xi(\xi) = \varepsilon(4\xi^3 - g_2\xi - g_3) \qquad (g_2, g_3 \text{ costanti}). \tag{11}$$

La (10) porge allora per $H(\eta)$ l'analoga forma

$$H(\eta) = \varepsilon(4\eta^3 - g_2\eta + g_3), \tag{11'}$$

che differisce soltanto per il segno di $g_3$.

La (7″), essendo $\Xi''' = 24\varepsilon$, assume l'aspetto definitivo

$$\omega = -4\varepsilon K_0(\xi+\eta)^3. \tag{12}$$

Dacchè la (8) porge

$$dx_3^2 = \frac{d\eta^2}{K_0 H(\eta)},$$

ed è

$$dl^2 = \frac{1}{(\xi+\eta)^2}(d\sigma^2 + dx_3^2),$$

ove si tenga conto della (1), risulta

$$dl^2 = \frac{1}{K_0(\xi+\eta)^2}\left\{\frac{d\xi^2}{\Xi} + \frac{d\eta^2}{H} + \Xi d\varphi^2\right\} \tag{13}$$

colle forme (11) e (11′) di $\Xi$, $H$.

La (3) e la (4″) dànno poi

$$V = V_0 \frac{\sqrt{H(\eta)}}{\xi+\eta}. \tag{14}$$

Le *linee assiali* (linee di curvatura principale corrispondenti alla $\omega$) sono — come in tutte le soluzioni $B_2$) — le linee $x_3$, ossia, colle attuali variabili indipendenti, le $\eta$ ($\xi =$ cost. , $\varphi =$ cost.). Le *linee di pendenza* (traiettorie ortogonali delle superficie $\omega =$ cost., cioè $\xi + \eta =$ cost.) sono variabilmente inclinate sulle prime: a differenza di quanto accadeva nelle due precedenti categorie di soluzioni. Egualmente complessa è la relazione delle *linee di forza* (traiettorie ortogonali delle superficie $V =$ cost.) con entrambe le congruenze suaccennate. Mi esimo quindi da una particolareggiata illustrazione geometrica delle formule conseguite.

Avvertirò piuttosto che, sostituendo a $\xi, \eta$ due nuovi argomenti $u, v$ mediante le posizioni

$$(15)\quad \xi = \wp(\sqrt{\varepsilon u}\,; g_2, g_3)\,,\ \eta = \wp(\sqrt{\varepsilon v}\,; g_2, -g_3) = -\wp(\sqrt{\varepsilon i v}\,; g_2, g_3)$$
$$(\varepsilon = \pm 1\,,\ i = \sqrt{-1})\,,$$

tutto si esprime per mezzo dell'unica funzione $\wp$ di invarianti reali $g_2, g_3$ e di argomenti $\sqrt{\varepsilon u}, \sqrt{\varepsilon i v}$.

Si ha infatti dalle (15), badando alla equazione differenziale caratteristica della $\wp$, e alle (11), (11'),

$$\left(\frac{d\xi}{du}\right)^2 = \varepsilon(4\xi^3 - g_2\xi - g_3) = \Xi(\xi)\,,$$

$$\left(\frac{d\eta}{dv}\right)^2 = -\varepsilon(-4\eta^3 + g_2\eta - g_3) = H(\eta)\,,$$

dopo di che, in base alle stesse posizioni (15), l'espressione del quadrato dell'elemento lineare assume la forma elegante

$$(13')\quad dl^2 = \frac{1}{K_0[\wp(\sqrt{\varepsilon u}) - \wp(\sqrt{\varepsilon i v})]^2}\left(du^2 + dv^2 + \varepsilon\wp'^2(\sqrt{\varepsilon u})\, d\varphi^2\right).$$

Analogamente si ricava dalla (14) il potenziale statico

$$(14')\quad -\tfrac{1}{2}V^2 = -\tfrac{1}{2}V_0^2\frac{H(\eta)}{(\xi+\eta)^2} = \tfrac{1}{2}V_0^2\frac{\varepsilon\wp'^2(\sqrt{\varepsilon i v})}{[\wp(\sqrt{\varepsilon u}) - \wp(\sqrt{\varepsilon i v})]^2}.$$

## 5. — Riassunto.

*Specificazione delle costanti*: $K_0$, $V_0$ costanti positive arbitrarie aventi rispettivamente le dimensioni $l^{-2}, lt^{-1}$; $\mu, g_2, g_3$ costanti numeriche arbitrarie; $\varepsilon = \pm 1$.

*Caratteri comuni a tutte le soluzioni* $B_2$).

Lo spazio si atteggia a varietà normale di Bianchi colle tre curvature principali

$$\omega_1 = \omega_2 = -\tfrac{1}{2}\omega\,.$$

Il quadrato dell'elemento lineare è del tipo

$$dl^2 = e^{2\tau}(d\sigma^2 + dx_3^2)\,,$$

con $d\sigma$ binario (indipendente da $x_3$), e $\tau$ legato ad $\omega$ dalla relazione

$$\omega = \omega_0\, e^{-3\tau} \qquad (\omega_0 \text{ costante}).$$

Le linee su cui varia la sola $x_3$ costituiscono le *linee assiali* di curvatura principale corrispondenti alla $\omega$.

La velocità della luce si esprime sotto la forma

$$V = V_0\, e^{\tau+\zeta} \qquad (\zeta \text{ funzione della sola } x_3);$$

come in tutti i fenomeni statici, $-\frac{1}{2}V^2$ costituisce la funzione delle forze (riferita all' unità di massa).

*Forme canoniche.*

Esistono tre (e tre sole) categorie di soluzioni, cioè le seguenti:

1. *Soluzioni longitudinali* $\left(e^{-\tau} = \eta(x_3)\right)$. Sostituendo ad $x_3$ la variabile $\eta$ (puro numero), si trova

$$\left\{\begin{aligned} & dl^2 = \frac{d\sigma^2}{\eta^2} + \frac{d\eta^2}{K_0\,\eta^4(\mu - \varepsilon\eta)} \qquad \left[d\sigma^2 \text{ forma binaria indipendente da } \eta, \text{ a curvatura gaussiana costante } K_0\mu\right], \\ & \omega = \varepsilon K_0\,\eta^3 \quad , \quad -\tfrac{1}{2}V^2 = -\tfrac{1}{2}V_0^2(\mu - \varepsilon\eta). \end{aligned}\right.$$

Le linee assiali e le linee di pendenza della $\omega$ coincidono colle linee di forza, donde la qualifica longitudinali.

2. *Soluzioni quadrantali* $(e^{-\tau} = \xi)$. Colle variabili indipendenti (tutti puri numeri) $\xi, \varphi, \psi = \sqrt{K_0}\,.\,x_3$, si ha

$$\left\{\begin{aligned} & dl^2 = \frac{1}{K_0\,\xi^2}\left(\frac{d\xi^2}{\Xi} + \Xi\, d\varphi^2 + d\psi^2\right) \quad , \quad \Xi = \mu\xi^2 + \varepsilon\xi^3, \\ & \omega = -\varepsilon K_0\,\xi^3 \quad , \quad -\tfrac{1}{2}V^2 = -\tfrac{1}{2}V_0^2\frac{e^{2\zeta}}{\xi^2} \qquad \left[e^{\zeta} \text{ funzione di } \psi \text{ definita dall'equazione } \frac{d^2 e^{\zeta}}{d\psi^2} + \mu e^{\zeta} = 0\right]. \end{aligned}\right.$$

Le linee assiali $\psi$ e le linee di pendenza $\xi$ si tagliano ad angolo retto, donde l'appellativo quadrantali.

3. *Soluzioni oblique.* Variabili indipendenti: $\xi, \eta$ (funzione della sola $x_3$, che si sostituisce ad essa), $\varphi$, tutti puri numeri; $e^{-\tau} = \xi + \eta$. Si ha

$$\left\{\begin{aligned} & dl^2 = \frac{1}{K_0(\xi+\eta)^2}\left\{\frac{d\xi^2}{\Xi} + \frac{d\eta^2}{H} + \Xi\, d\varphi^2\right\} \qquad \left[\begin{aligned} \Xi &= \varepsilon(4\xi^3 - g_2\xi - g_3), \\ H &= \varepsilon(4\eta^3 - g_2\eta + g_3) \end{aligned}\right], \\ & \omega = -4\varepsilon K_0(\xi + \eta)^3 \quad , \quad -\tfrac{1}{2}V^2 = -\tfrac{1}{2}V_0^2\frac{H}{(\xi+\eta)^2}. \end{aligned}\right.$$

Sono assiali le linee $\eta$, variamente inclinate sia sulle linee di pendenza della funzione $\omega$ che sulle linee di forza.

Va segnalato il cambiamento di parametri consistente nel sostituire a $\xi, \eta$ due argomenti ellittici $u, v$ mediante le posizioni

$$\xi = \wp(\sqrt{\varepsilon}\, u ; g_2, g_3) \quad , \quad \eta = -\wp(\sqrt{\varepsilon}\, iv ; g_2, g_3) .$$

Le espressioni canoniche assumono allora l'aspetto indicato in fine del precedente paragrafo.

## Fisiologia. — *Pressione sanguigna ed aviazione.* Nota del Corrisp. G. Galeotti.

I problemi fisiologici, riguardanti il comportamento della pressione sanguigna negli aviatori, hanno dato luogo a molteplici ricerche e discussioni, che ancora non ci hanno condotto a conclusioni definitive. Nella presente Nota prenderò in esame tre diversi punti di questo argomento.

1°) Quale importanza si debba assegnare alle determinazioni della pressione sanguigna negli aviatori.

2°) Se vi siano modificazioni della pressione sanguigna nel volo.

3°) Se vi siano modificazioni della pressione sanguigna a grandi altezze.

1. La pressione sanguigna è un dato fisiologico del sistema cardiovascolare, che ha sempre un grande valore, perchè ci dà un'idea dello stato del cuore e dei vasi. Si comprende quindi come in questo riguardo sia indispensabile determinare la pressione sanguigna nei candidati al pilotaggio, e si è deciso di scartare tutti quei candidati, che mostrino pressioni troppo alte o troppo basse, anche se non dipendano da lesioni del cuore o dei vasi, partendo dal concetto, che il rapido abbassarsi della pressione atmosferica, durante il volo, possa produrre un disequilibrio tra la forza del cuore e lo stato dei vasi, disequilibrio che sarebbe tanto più pericoloso negli individui a pressione sanguigna anormale e nei quali presumibilmente i meccanismi regolatori di questa pressione sono insufficienti.

Durante l'esame dei candidati al pilotaggio nell'Ufficio Psicofisiologico di aviazione militare ho avuto occasione di determinare la pressione sanguigna di 2501 individui.

In una serie di determinazioni ho adoperato tanto l'apparecchio di Riva Rocci, quanto l'oscillografo di Pachon.

Come è noto questi due apparecchi non dànno risultati concordanti, ed ora si tende ad accordare maggior fiducia all'istrumento del Pachon, il quale ha anche il vantaggio di determinare la pressione minima (pressione diastolica) che in fondo è il dato più importante. Perciò ho terminato con l'adoperare l'apparecchio di Pachon soltanto.

Gli individui in esame erano tutti di età tra 19 e 24 anni, tra cui da 2,3 a 5,9 % presentarono disturbi dell'apparato cardiovascolare e furono perciò scartati.

Per riguardo alla pressione sanguigna si fissò il limite massimo di 170 (pressione sistolica) e di 120 (pressione diastolica) e il limite minimo di 110 (pressione sistolica) e 60 (pressione diastolica) per la idoneità al pilotaggio.

Dall'insieme delle cifre ricavate si possono trarre le seguenti conclusioni:

*a*) in grandissima maggioranza i giovani da me esaminati hanno presentato pressioni massime tra 135 e 140 e pressioni minime tra 75 e 80;

*b*) i casi con pressioni molto basse, sotto a 110 e 60, sono estremamente rari;

*c*) un certo numero di candidati (tra il 4 e il 5 %) presentano pressioni elevate di 180, 200, 220 e rispettivamente 110, 120. Questi stati ipertensivi sono talvolta passeggeri, ma molte volte sono permanenti e non scompaiono anche in esami, fatti dopo giorni di riposo.

Sarebbe interessante investigare le ragioni della ipertensione in individui, giovanissimi, robusti e perfettamente sani. Non è improbabile che essa dipenda da un lieve grado di surrenalismo congiunto con lo sviluppo post-pubere.

In ogni modo tutti gli individui ipertesi, nella misura sovraccennata, sono stati dichiarati non idonei al pilotaggio.

II. Lo studio della pressione sanguigna nei piloti durante e dopo il volo, è stato fatto da diversi autori francesi, inglesi e qui da noi dal prof. Gemelli.

Questo autore riassume così le osservazioni da lui fatte sulla pressione di diversi piloti:

*a*) *la pressione massima* diminuisce nell'ascensione fino ad una certa altitudine, poi aumenta nel resto dell'ascensione e torna a diminuire nella discesa;

*b*) *la pressione minima* diminuisce durante l'ascensione e aumenta durante la discesa: ciò pure si verifica per la pressione media;

*c*) dopo un'ascensione in aereoplano vi è sempre una ipertensione arteriosa, tanto più elevata, quanto più l'ascesa e la discesa sono state rapide.

Degli inglesi, che si sono occupati di questo argomento, ricorderò M. Flack e A. P. Bowdler, i quali, in piloti robusti e ben allenati, hanno trovato i seguenti valori:

| Pressione sistolica | Pressione diastolica |
|---|---|
| 120,6 | 89,3 |
| 121,4 | 82,8 |
| 119,1 | 77,7 |
| 122,5 | 74,9 |

Essi concludono, che l'eccesso del volo produce un abbassamento della pressione diastolica e un aumento della differenza tra pressione sistolica e

diastolica (pressione del polso), il che è probabilmente dovuto a una diminuzione di tono delle arteriole. Affermano anche, che una pressione diastolica sotto a 70 e una pressione del polso maggiore di 50 dimostrano, che il sistema cardiovascolare è inadatto all'esercizio del volo. Su 76 piloti ne trovarono 7 con pressione diastolica sotto a 70 e 13 con pressione del polso maggiore di 50.

III. In connessione con le poche ricerche sinora fatte sul comportamento della pressione sanguigna nel volo, stanno quelle, assai numerose, compiute in alta montagna.

Nella bibliografia fisiologica dell'alpinismo si trovano più antiche ricerche di Loewy, di Fränkel e di Geppert, dalle quali si concluse, che, per effetto della depressione atmosferica, non si produrrebbero modificazioni nella pressione sanguigna. Kronecker invece affermò, che sulla cima del M. Pilato la pressione sanguigna è minore di circa 10 m/m che a livello del mare e anche Weraguth constatò un fatto consimile.

Lazarus e Shimunski trovarono ora aumenti ora diminuzioni; Bayeux, sulla cima del M. Bianco, potè osservare un aumento della pressione sanguigna. Mosso, sulla Capanna Margherita, ottenne dallo sfigmomanometro tracciati che non differivano da quelli presi in pianura. Anche Fuchs non constàtò cambiamenti della pressione arteriosa sulla vetta del M. Rosa. Durig e Kolmer, adoperando il metodo di Gärtner, giunsero alla conclusione, che le differenze tra i valori della pressione sanguigna sulla vetta del M. Rosa e nella valle sono diverse nei diversi individui, che varî fattori possono influire sui cambiamenti della pressione e che, se vi è un'influenza propria dell'altitudine, questa deve essere più nel senso dell'aumento che nel senso della diminuzione. Durig e Zuntz nei loro esperimenti a Teneriffa trovarono, con l'apparecchio di Recklinghausen, i seguenti valori:

| | Orotava (livello del mare) | Cañadas (2100 m.) | Alta Vista (3260 m.) |
|---|---|---|---|
| Zuntz . . . . . . . | — | 127 | 139 |
| Durig . . . . . . . | 105 | 106 | 118 |
| Carrière . . . . . . | 110 | 103 | 106 |
| V. Schrötter . . . . | 97 | 112 | 110 |
| Douglas . . . . . . | 115 | — | 115 |

Schneider e Hedblom videro, che le altitudini moderate non hanno effetto percettibile sulla pressione arteriosa.

Dalle ampie ricerche compiute da Douglas, Haldane e dai loro collaboratori sulle montagne del Colorado, risultò che a grandi altitudini la pressione sistolica è alquanto minore che a livello del mare, ma le differenze sono così piccole, da rientrare nel limite degli errori. Lievi cambiamenti si possono constatare anche nella pressione diastolica, che, in alcune persone, avvengono nel senso di un aumento.

Ecco alcuni valori ottenuti da questi autori con l'apparecchio di Tycos:

| | Haldane | | Henderson | | Schneider | | Douglas | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | P. s. | P. d. | P. s. | P. d. | P. s. | P. d. | P. s. | P. d. |
| New Haven (livello del mare) . | — | — | 103 | 74 | — | — | 108 | 65 |
| Colorado (Springs (2000 m.). . | 114 | 85 | 111 | 88 | 110 | 85 | 105 | 65 |
| Pike's Peak (4660 m.) . . . . . | 106 | 72 | 118 | 85 | 105 | 85 | 104 | 66 |
| | 106 | 85 | 106 | 85 | 108 | 86 | 108 | 84 |
| | 108 | 85 | 106 | 86 | 105 | 85 | 104 | 85 |
| | 110 | 82 | 110 | 85 | 110 | 72 | 102 | 82 |

Altri numerosi esperimenti furono eseguiti dallo scrivente e dai suoi collaboratori (Barkan, Higgins, Signorelli e Viale) per studiare gli effetti sulla pressione sanguigna, oltre che della altitudine, anche della fatica e dell'alcool.

Per l'argomento di cui ora mi occupo, dalla relazione di queste ricerche toglierò alcuni valori della pressione sanguigna, determinati al Col D'Olen (con l'apparecchio di Pachon), alla mattina prima di partire per una escursione:

Barkan . . . . . . 145, 160, 145, 150, 135
Galeotti . . . . . . 145, 140, 135
Signorelli . . . . . 155, 140, 130, 130, 150
Viale . . . . . . . 160, 150, 140, 135

Per riguardo alla fatica nelle ascensioni in alta montagna, si trovò che, dopo queste escursioni, la pressione sistolica è in genere diminuita e la pressione diastolica pure spesso diminuita, ma in modo minore. Le diminuzioni della pressione sistolica furono fra 5 e 20 mm. e solo eccezionalmente si ebbero diminuzioni di 25-40 mm. Le diminuzioni della pressione diastolica furono tra 5 e 15 mm., e eccezionalmente si ebbero diminuzioni di 20-30 mm.

I miei presenti esperimenti sono stati fatti nell'Istituto A. Mosso al Col d'Olen su diverse persone a diverse altitudini. Molte ragioni mi hanno reso impossibile di procedere con la regolarità, che sarebbe stata desiderabile, ricavando per tutti gli individui in esperimento i valori della pressione sanguigna in pianura e in montagna.

Le determinazioni furono sempre fatte dopo un conveniente periodo di riposo, a fine di eliminare almeno gli effetti immediati della fatica.

Sperimentai su persone molto giovani tra 18 e 24 anni (G, Levi, G. Rasetti, M. Morgiano, T. Moschini) e su persone di circa 50 anni (G. Galeotti, C. Somigliana, V. Reina, A. Carestia, A. De Bernardis). Usai sempre l'apparecchio Pachon. Si determinò anche la frequenza del polso.

Tutti i dati raccolti sono esposti nella seguente tabella:

| Data | Località | Individuo in esperimento | Pressione | Temperatura | Pressione sistolica | Pressione diastolica | Polso | *Osservazioni* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 ag. ore 15 | Col d'Olen (2881) | A. Carestia | — | — | 110 | 65 | — | Dopo la salita da Alagna |
| » » | » | C. Galeotti | — | — | 125 | 75 | — | » » |
| » » | » | De Bernardis | — | — | 165 | 75 | — | » » |
| 4 ag. ore 13 | » | G. Levi | — | — | 145 | 80 | — | » » |
| » » | » | C. Somigliana | — | — | 135 | 70 | — | » » |
| 5 ag. ore 14 | » | G. Levi | — | — | 155 | 70 | 99 | Dopo 4 ore di cammino |
| » » | » | V. Reina | — | — | 140 | 70 | 64 | Dopo la salita da Alagna |
| » » | » | C. Somigliana | — | — | 125 | 75 | 65 | Dopo 4 ore di cammino |
| » » | » | G. Galeotti | — | — | 145 | 85 | 86 | » » |
| 6 ag. ore 7 | » | G. Levi | 535 | 6.5 | 130 | 75 | 86 | Al mattino, appena alzato |
| » » | » | G. Galeotti | » | » | 135 | 75 | 64 | » » |
| » » | » | C. Somigliana | » | » | 135 | 75 | 58 | » » |
| » » | » | V. Reina | » | » | 130 | 70 | 50 | » » |
| » ore 18 | » | G. Levi | » | 10 | 130 | 70 | 89 | Topo 4 ore di marcia |
| » » | » | V. Reina | » | » | 125 | 65 | 55 | » » |
| » » | » | G. Galeotti | » | » | 135 | 75 | 76 | » » |
| » » | » | C. Somigliana | » | 6.5 | 155 | 80 | 77 | » » |
| 8 ag. ore 6 | » | G. Levi | » | 6 | 135 | 70 | 78 | Al mattino, appena alzato |
| » » | » | G. Galeotti | » | » | 130 | 75 | 60 | » » |
| » » | Cap. Gnifetti (3600) | G. Levi | 437 | 5 | 150 | 75 | 78 | Dopo l'ascensione alla Cap. Gnifetti |
| » ore 8,30 | » | G. Galeotti | » | » | 120 | 75 | 86 | » » |
| 10 ag. ore 18 | Col d'Olen | G. Levi | 537 | 11 | 140 | 70 | 108 | Dopo una lunga ascens. |
| » » | » | V. Reina | » | » | 135 | 70 | 60 | » » |
| » » | » | G. Galeotti | » | » | 120 | 75 | 74 | » » |
| » » | » | C. Somigliana | » | » | 115 | 65 | 67 | » » |
| 12 ag. ore 6,30 | » | G. Levi | 535 | 9 | 135 | 70 | 76 | Appena alzato |
| » » | » | G. Galeotti | » | » | 145 | 70 | 70 | » |
| » » | » | P. Morgiano | » | » | 140 | 80 | 86 | » |
| » » | » | T. Moschini | » | » | 150 | 65 | 92 | Dopo la salita da Alagna |
| » ore 12,30 | Punta Vincent (4215) | G. Levi | 450 | 2 | 165 | 85 | 112 | Dopo l'ascensione |
| » » | » | T. Moschini | » | » | 170 | 75 | 111 | » |
| » » | » | P. Morgiano | » | » | 160 | 70 | 120 | » |
| » » | » | G. Galeotti | » | » | 135 | 70 | 100 | » |
| 14 ag. ore 13 | Alpe V. Dekko (2075) | G. Galeotti | 596 | 12 | 120 | 70 | 80 | Dopo un'escursione |
| » » | » | G. Levi | » | » | 140 | 85 | 88 | » |
| » » | » | C. Somigliana | » | » | 125 | 70 | 75 | In riposo |

(*Seguito*)

| Data | Località | Individuo in esperimento | Pressione | Temperatura | Pressione sistolica | Pressione diastolica | Polso | *Osservazione* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 ag. ore 8,30 | Alpe Bors (1725) | De Bernardis | 612 | 12 | 150 | 75 | 75 | In riposo |
| » » | » | V. Reina | » | » | 130 | 65 | 75 | » |
| » » | » | C. Somigliana | » | » | 110 | 80 | 75 | » |
| » » | » | G. Levi | » | » | 130 | 75 | 75 | » |
| 18 ag. ore 5,45 | Col d'Olen | G. Galeotti | 542 | 11 | 130 | 75 | 62 | Appena alzato |
| » » | » | G. Levi | » | » | 130 | 65 | 78 | » |
| » » | » | F. Rasetti | » | » | 130 | 70 | 82 | » |
| » » | » | C. Somigliana | » | » | 130 | 70 | 62 | » |
| » » | » | De Bernardis | » | » | 145 | 80 | 56 | » |
| » ore 13,35 | Cap. Margherita (4560) | G. Galeotti | 430 | 3 | 135 | 80 | 108 | Dopo un'ora di riposo |
| » » | » | G. Levi | » | » | 125 | 75 | 102 | » » |
| » » | » | F. Rasetti | » | » | 120 | 75 | 116 | » » |
| » » | » | De Bernardis | » | » | 155 | 80 | 84 | » » |
| » » | » | C. Somigliana | » | » | 125 | 65 | 90 | » » |
| » ore 16,30 | Cap' Gnifetti (3600) | F. Rasetti | 485 | 6 | 130 | 70 | 110 | Discendendo dalla Capanna Margherita |
| » » | » | G. Galeotti | » | » | 135 | 70 | 86 | » » |
| » » | » | G. Levi | » | » | 160 | 75 | 102 | » » |
| » » | » | De Bernardis | » | » | 165 | 80 | 80 | » » |
| » » | » | C. Somigliana | » | » | 130 | 70 | 84 | » » |
| 12 sett. ore 12 | Torino | G. Levi | 735 | 24 | 130 | 70 | 78 | In riposo |
| » » | » | G. Galeotti | » | » | 140 | 75 | 72 | » |

In conclusione anche le mie presenti ricerche si accordano con tutte quelle ora ricordate, nel senso, che non si può dimostrare un'influenza netta e costante della depressione atmosferica sulla pressione arteriosa. Si notano certo, nel passaggio da luoghi più bassi a luoghi più elevati, variazioni della pressione sanguigna, ma queste variazioni sono ora in un senso e ora nell'altro e si debbono attribuire a varie cause e specialmente alla fatica.

Riassumendo tutto ciò che ora si è detto, credo che si possa affermare che, al contrario di quanto sembrerebbe *a priori*, la pressione arteriosa è assai poco influenzata dalla pressione atmosferica e che gli sbilanci di questa non sono molto a temersi per l'idraulica della circolazione.

È quindi forse esagerata l'importanza, che si dà agli stati d'ipertensione, come motivo di scarto nei candidati al pilotaggio, quando naturalmente

si possa con tutta sicurezza stabilire, che questa ipertensione non dipenda da difetti organici, ma sia semplicemente una manifestazione funzionale.

Sarà bene tuttavia, prima di concludere definitivamente su questo argomento, esperimentare su alcuni individui ipertesi, mettendoli nella campana pneumatica e determinando i valori della tensione arteriosa, dopo forti depressioni barometriche.

## Fisica. — *L'effetto Hall e la teoria elettronica delle forze ponderomotrici elettromagnetiche* (1). Nota di G. C. Trabacchi, presentata dal Corrispondente O. M. Corbino.

1. Il prof. Righi ebbe per primo a considerare che le forze ponderomotrici alle quali è assoggettato un conduttore percorso da corrente sotto l'azione di un campo magnetico possono attribuirsi ad una pressione esercitata da un addensamento di ioni soffiati in una determinata direzione dal campo stesso (2). Se si ammette inoltre l'esistenza di due specie di ioni dotati di differenti mobilità, è facile riconnettere a quelle forze ponderomotrici le forze elettromotrici anormali appartenenti alla categoria dei fenomeni che il prof. Corbino propose di chiamare *fenomeni elettromagnetici di seconda specie.*

E invero, se la forza ponderomotrice dipende dalla pressione esercitata da parte degli ioni dei due segni che vengono soffiati nello stesso verso dal campo esterno, poichè gli ioni stessi non vengono sospinti nella generalità dei metalli in egual misura, alla pressione corrisponderà anche uno stato elettrico positivo o negativo a seconda che si addensano in maggior misura gli ioni positivi o i negativi. E perciò, se il conduttore è complessivamente sollecitato da una forza meccanica in una certa direzione, nella stessa direzione si deve anche trovare una differenza di potenziale creata dal campo e proporzionale alla forza meccanica, con un coefficiente di proporzionalità dipendente solo dalla natura del metallo.

La regola trova una conferma immediata nella classica esperienza di Hall, e si può facilmente riconoscere che la forza elettromotrice trasversale, derivante dal diseguale addensamento di cariche positive e negative, agisce appunto, a parte il senso, nella direzione secondo la quale la lamina impiegata sarebbe spinta dal campo che agisce sulla corrente principale che la attraversa. È evidente che in questo caso non presenterebbe alcuna difficoltà una verifica quantitativa, sui risultati della quale non è lecito dubitare.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Fisico della R. Università di Roma.

(2) Augusto Righi, *I fenomeni elettro-atomici sotto l'azione del magnetismo.* Bologna, Zanichelli, 1918 pag. 316 e seg.

2. Si incontrano molti casi nei quali la forza ponderomotrice è generata dall'azione di un campo variabile che agisce sulle correnti prodotte dalle variazioni stesse del campo. Anche in questi casi è possibile vedere una relazione tra forze meccaniche e forze elettromotrici del tipo Hall. Se si prende, ad esempio, un cilindro metallico, cavo all'interno, ma chiuso da due basi pure metalliche, e lo si introduce in un campo rotante, il cui asse di rotazione coincida con quello del cilindro, quest'ultimo è assoggettato ad una coppia costante, che tende a farlo rotare; vi corrisponderà, per quanto sopra si è detto, una forza elettromotrice, la quale dà luogo ad una corrente che circola nel cilindro normalmente alle sue generatrici. Fu infatti constatato [1] che, tagliando il cilindro lungo una delle generatrici stesse e saldando agli orli del taglio due sonde, si ottiene una corrente continua, il cui senso è quello previsto dalle suaccennate considerazioni, e che pertanto si inverte all'invertirsi del campo rotante.

Io ho ora eseguito altre esperienze, che possono servire ad illustrare ulteriormente la corrispondenza sopra segnalata, tanto più che in uno dei casi nei quali non erano accessibili alla misura la intensità della corrente e quella del campo, ho ottenuto dei risultati soddisfacenti dal punto di vista quantitativo nella determinazione del coefficiente di Hall, mettendo in relazione la forza ponderomotrice e la forza elettromotrice.

3. Un anello metallico, avvicinato all'orlo di un solenoide percorso da corrente alternata, viene respinto per le repulsioni elettromagnetiche tra la corrente che circola nel solenoide e quella indotta, che, per la maggior parte del periodo, risulta di senso inverso all'inducente. Le belle esperienze eseguite al riguardo da Elihu Thomson sono a tutti ben note.

Se pertanto si dispone il solenoide con il suo asse verticale e si sospende, coassialmente, un cilindro cavo di bismuto al piatto di una bilancia, in modo che l'orlo inferiore del cilindro stesso sia di poco superiore alla più alta spira del solenoide, si può contemporaneamente misurare la forza elettromotrice esistente fra i due orli superiore ed inferiore del cilindro (la quale, come l'esperienza conferma, ha il senso previsto) e la spinta che esso riceve dal basso all'alto per opera della repulsione elettromagnetica [2] (fig. 1). Se indichiamo con $H$ la componente del campo che agisce in un certo istante nella direzione normale in ogni punto alla superficie del cilindro, con $i$ il valore corrispondente della corrente che circola nel cilindro in direzione normale a detta componente del campo, e con $l$ la lunghezza di una circonferenza sezione del cilindro, si avrà che la forza che agisce in ogni istante dal basso verso l'alto è data da:

$$F = Hil .$$

[1] Corbino e Trabacchi, Rendiconti Accad. Lincei, 7 e 21 marzo 1915.

[2] Occorre naturalmente aver cura che nessuna azione si eserciti da parte del campo direttamente sulla bilancia.

E, poichè la forza elettromotrice trasversale di Hall che lo stesso campo $H$ determina sulla corrente $i$ nello stesso istante è data da:

$$E = R\,Hi/d,$$

dove $d$ è la distanza tra le due superficie interna ed esterna del cilindro, ed $R$ è la costante dell'effetto Hall, si deduce:

$$E = R\,F/d\,l.$$

Ai valori istantanei di $E$ e di $F$ possono essere sostituiti in questa espressione quelli medî, dati rispettivamente dal galvanometro e dalla bilancia, per cui, misurando $E, F, d$ e $l$, si può facilmente dedurre il valore

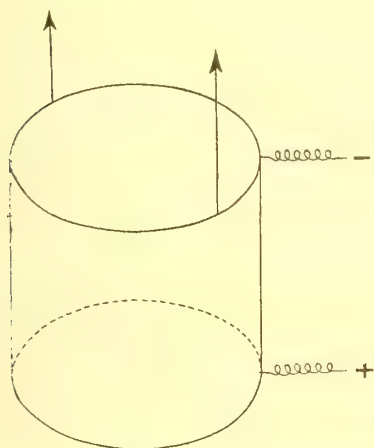
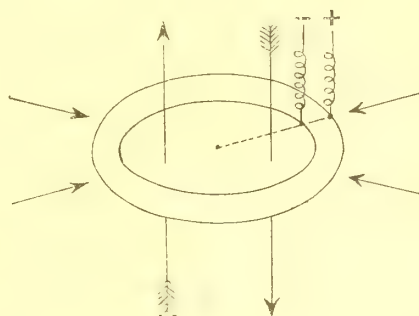



Fig. 1. Fig. 2.

di $R$, per il quale ho ottenuto, con varî campi, valori non differenti da quelli determinati in via diretta.

4. Analogamente, se prendiamo una corona circolare metallica e la introduciamo in un campo alternativo, in modo che le linee di forza la attraversino normalmente al suo piano, essa diverrà sede di correnti alternate di tal fase, rispetto a quella del campo, che la corona risulterà come premuta dall'esterno verso l'interno (fig. 2). Saldando due sonde nei due punti di intersezione di uno qualunque dei raggi coi cerchi estremi della corona, si troverà una tensione, che, per il caso del bismuto, dà luogo, *nel circuito esterno*, ad una corrente diretta dalla periferia al centro. Naturalmente la stessa cosa si ottiene con un disco che abbia due sonde saldate ai due estremi di un raggio.

5. Poichè è stato dimostrato [1] che le forze elettromotrici di Hall si destano senza alcun ritardo e con la stessa costante sotto l'azione di campi

[1] A. W. Smith, The Physical Review. August 1912, vol. XXXV.

variabili, era facile prevedere che tutte le esperienze sopra descritte potessero essere eseguite con campi alternativi di qualunque frequenza; le ho pertanto riprodotte servendomi di un solenoide percorso da scariche di alta frequenza, ottenendo così la possibilità di originare con esse delle correnti di senso costante. Le tensioni ottenute sia nel caso del disco, sia in quello del cilindro, erano nel senso previsto dalla teoria, dipendentemente dalla loro posizione rispetto al solenoide, ed avevano valori di qualche diecina di microvolt in una esperienza nella quale il circuito dell'alta frequenza comprendeva, oltre il solenoide di 10 spire del diametro di circa 10 centimetri, una scintilla della lunghezza di un centimetro e un condensatore della capacità di circa $^1/_{1000}$ di microfarad.

## Vulcanologia. — *Esplosioni vulcaniche. I: Eruzioni esplosive e loro fasi. Combustione dell'idrogeno.* Nota di VENTURINO SABATINI, presentata dal Socio C. VIOLA.

Ogni proiezione presuppone una esplosione, e delle esplosioni vulcaniche noi sentiamo le detonazioni e vediamo gli effetti.

Le eruzioni generalmente cominciano con esplosioni violente, a giudicare dalle detonazioni, dai tremiti del suolo e dai grandi blocchi lanciati fuori, ciò che è anche più manifesto nella riattivazione d'un vulcano dopo un lungo periodo di riposo e nell'aprirsi del camino di un nuovo vulcano. Più tardi quando il camino si è largamente aperto o riaperto si raggiunge una regolarizzazione dell'eruzione: le esplosioni si fanno più deboli, più uniformi, ad intervalli più brevi e meno regolari, e possono ridursi ad un tamburare non forte, che non si avverte a qualche chilometro di distanza, e che può anche sparire del tutto. Evidentemente i gas che nella prima fase si accumulano ed esplodono nelle parti superiori della lava e specialmente tra la sua superficie e il turacciolo che chiude il camino, nella seconda fase non si accumulano più nè sopra nè sotto tale superficie, ma esplodono appena arrivano in vicinanza della medesima, e l'indebolimento delle detonazioni non è solo dovuto all'indebolimento delle esplosioni, ma spesso anche all'abbassarsi della lava nel camino. Con magmi basici il tamburare del vulcano prende un suono metallico come di lamiere sbattute, di cui lo Stromboli dà un buon esempio.

Un'esplosione ne' casi più frequenti è dovuta ad un forte aumento di tensione in una massa gassosa, come avviene scaldando oltre certi limiti una caldaia a vapore. In un esplosivo propriamente detto la combustione determina una brusca produzione di sostanze gassose con temperatura e volume, e quindi con tensione, enormemente più forti di quelli a cui il corpo esplodente era sottoposto un istante prima. Entrambe queste forme

sono più o meno rappresentate nelle esplosioni vulcaniche, ma la teoria di queste ultime è ancora troppo vaga. In essa si cominciò col racchiudere un concetto puramente fisico ed evidentemente incompleto.

Si deve difatti a Fournet l'ipotesi che assimila le proiezioni vulcaniche agli spruzzi provocati dal raffreddamento nelle masse di piombo argentifero, di argento, di oro, ecc., durante la coppellazione [1]. Il metallo fuso assorbe e scioglie una certa quantità di aria che poi rimette in libertà provocando proiezioni di goccioline liquide a traverso la pellicola solida che lo ravvolge quando comincia a consolidarsi, poichè in quel momento avviene un brusco cambiamento di solubilità dei gas disciolti. La soluzione si muta in miscuglio e quei gas con la forte pressione cui sono sottoposti dalla contrazione della massa metallica vengono espressi dalla sua superficie.

Questa ipotesi può esser sembrata seducente per la sua semplicità, ma presuppone una costituzione ugualmente semplice nel nucleo terrestre e nei suoi componenti, e se fosse conforme al vero dovrebbe produrre nel fenomeno vulcanico una continuità tuttaltro che verificata. Invece è notorio che un tale fenomeno si complica con reazioni chimiche potenti, sulle quali la natura dei prodotti vulcanici non permette alcun dubbio. Disgraziatamente noi sappiamo molto poco sulla composizione dei magmi elementari, sulle loro condizioni, e sulle reazioni che avvengono tra loro e dentro di loro. E più specialmente sulle quantità relative dei gas vulcanici e sulle loro reciproche azioni noi non conosciamo più di quel poco che risulta dalle condizioni molto più semplici e molto più attenuate, non di rado molto diverse, che giungiamo a riprodurre nei nostri laboratorii.

Però anche senza avventurarci per ora in una ricerca per la quale mancano quasi tutti i dati, possiamo col solo vapor d'acqua spiegare gli effetti meccanici che si producono nei vulcani e le relative proiezioni. Noi possiamo difatti continuare ad ammettere che il vapor d'acqua costituisca la quasi totalità dei prodotti gassosi delle colonne di fumo, essendo in fortissima prevalenza su tutti gli altri, come si potette ritenere anche a proposito della composizione delle nuvole ardenti della Pelata del 1902.

Quale sia la provenienza di questo vapor d'acqua non è ancora stabilito. Si sa però che le lave in fusione ne sono piene e ne emettono durante e dopo il loro espandimento con una vaporizzazione tranquilla, talvolta di lunghissima durata. Parecchi mesi dopo l'ultima grande eruzione vesuviana le lave di Boscotrecase fumavano ancora. Il vapor d'acqua con molta probabilità proviene dalla combustione parziale dell'idrogeno. Difatti spesso e da molto tempo questo gas fu segnalato allo stato libero nei prodotti vulcanici. Bunsen ne indicò il 25 % nelle fumarole d'Irlanda; Fouqué il 16 % nei gas di Santorino; Moissan il 22,3 % in quelli della Pelata [2]. E. van den

(1) Il fenomeno è detto *rochage* dai francesi, da *rocher* schiumare, fermentare.

(2) H. Moissan, C. R., vol. 135, pag. 1058, 1902.

Broeck fin dal 1903 ritenne l'idrogeno causa prima delle esplosioni vulcaniche (1). Secondo Gautier l'idrogeno rappresenta il 77 °/₀ dei gas contenuti nel granito; inoltre i corpi facili ad ossidarsi tolgono l'ossigeno al vapor d'acqua nelle profondità calde del suolo (2). Di accordo con tale ipotesi si sa che i metalloidi a contatto del vapor d'acqua ad alta temperatura producono reazioni violente. Coi metalli alcalini, specialmente col potassio e col sodio, si hanno esplosioni. Il magnesio e il manganese scompongono l'acqua a partire da temperature abbastanza basse. Il ferro ridotto scompone l'acqua a 100°. Il silicio agisce diversamente alle diverse temperature, ma a partire dal rosso vivo la reazione è completa.

L'acqua può essere scomposta anche per dissociazione ad alta temperatura, ma probabilmente nelle profondità vulcaniche questa seconda causa di produzione dell'idrogeno libero avrà un'importanza molto ridotta. Si sa che a pressione normale la combinazione dell'idrogeno e dell'ossigeno comincia a 180°; diventa esplosiva a 550° o ad 840° secondo i diversi sperimentatori, ma fino a 1000° circa non si è potuta ottenere con gas perfettamente disseccati. La dissociazione dell'acqua e di gas diversi quali il carbonico, il cloridrico, il solforoso comincia tra 1000° e 1200°. A 2000° la scomposizione è avanzata di poco (3). A 2500° è ancora parziale come avevano già mostrato Wurtz e Sainte-Claire Deville (4) e a 3000° non è ancora avanzata di molto (5). Bunsen, ritenendo di 2800° la temperatura di esplosione dell'idrogeno in presenza dell'ossigeno, dedusse analiticamente che con tale temperatura la metà del miscuglio di due volumi d'idrogeno con uno di ossigeno entra in combinazione se il miscuglio stesso si trova a 0° e 760$^{mm}$ prima dell'esplosione (6). Applicando lo stesso procedimento con le ultime determinazioni della temperatura di esplosione dell'idrogeno, che è risultata di 3469° (3742° assoluti, Sarrau) la percentuale del miscuglio che resta estranea alla combinazione deve risultare molto piccola. Nella teoria degli esplosivi si ritiene che con molta probabilità la dissociazione dei gas prodotti da una esplosione sia praticamente nulla a causa delle forti pressioni sviluppate (7), alle quali sono comparabili quelle dovute alle esplosioni nelle profondità vulcaniche, dove esiste già una pressione più o meno elevata anteriormente a quella dovuta alla combustione e alla quale le precedenti si aggiungono.

Ciò posto la presenza del vapor d'acqua nelle lave può spiegarsi in due modi. Con una prima ipotesi può ammettersi che trattasi di acqua d'infil-

(1) Proc. verb., Bull. Soc. Belge de Géol., XVII.

(2) Bull. Soc. Ch.; serie 3ª, vol. 29, pag. 191, Paris, 1903.

(3) E. Mallard et Le-Chatelier, C. R., vol. 93, pp. 1014 e 1076, 1881.

(4) A. Wurtz, *Dictionnaire de Chimie*, vol. I, parte 2ª, pag. 1180.

(5) H. Moissan, *Traité de Chimie minérale*, vol. I, pag. 252, Paris, Masson, 1904.

(6) A. Wurtz, loc. cit.

(7) F. Heise, *Traité théorique et pratique des explosifs*. Trad. p. Aubrun, Paris et Liége, Béranger, 1907.

trazione che giunge in siti dove la . lava è molto calda e viene da questa assorbita e scomposta. L'idrogeno e un eventuale resto d'ossigeno, non più suscettibili di ricombinarsi per l'alto rapporto tra' loro quantitativi (1), trascinati dalle correnti magmatiche vanno a risalire nei camini, dove incontrano le masse d'ossigeno dell'aria assorbite a traverso le fenditure del turacciolo. Nei siti più bassi queste masse arrivano sempre più scarsamente fino a non arrivare più, ma dove arrivano servono anzitutto alle ossidazioni dei corpi che hanno per l'ossigeno un'affinità maggiore di quella dell'idrogeno. Risalendo a livelli più alti si trovano quantitativi di ossigeno libero che vanno crescendo. Perciò appena il rapporto coi quantitativi d'idrogeno lo permette si determinano esplosioni violente. Con una seconda ipotesi si può ritenere, e forse con maggiore verosimiglianza, che l'idrogeno provenga da quelle regioni magmali, per eccellenza riduttrici, dove fino a certi limiti di profondità la materia è ancora mobile o entra nello stato di mobilità in date circostanze, e che giunto nei camini incontri l'ossigeno assorbito a traverso il turacciolo (2). L'associazione si produce come nell'ipotesi precedente. Con questa seconda ipotesi è difficile stabilire se l'idrogeno sia libero ed in quale stato, mentre in entrambe le ipotesi non può dirsi se si trovi incorporato alla lava allo stato di *occlusione*. Noi ignoriamo la legge che lega le pressioni alle temperature nell'interno del bagno lavico, ma è probabile che le seconde non crescano continuamente come le prime, o almeno in una ragione di gran lunga minore. Secondo Barus l'aumento di temperatura sarebbe $^1/_{40}$ dell'aumento di pressione (3), secondo altri si avrebbero aumenti molto diversi. Più attendibile è la concezione della temperatura critica, con cui si ammette che oltre una data temperatura ogni sostanza conservi lo stato gassoso sotto qualunque pressione, e l'idrogeno che ha il punto critico a —241° con una pressione di 15° at. (4), dovrebbe conservare quello stato a qualunque profondità. In tali condizioni, se a 27 ch. si raggiunge la temperatura di soli 2000°, a tale profondità l'idrogeno raggiunge il massimo di densità (covolume) (5). E se a 52 ch. si avessero 4000°, a tale profondità si sarebbe raggiunto quel massimo.

(1) In condizioni normali di temperatura e di pressione le più forti esplosioni con la massima temperatura di 3469° si hanno con due volumi d'idrogeno e uno di ossigeno. Variando tali volumi l'esplosione diviene più debole e la temperatura relativa scende fino a 2133°. Il miscuglio di azione massima cessa di essere esplosivo con l'aggiunta di 24 volumi d'idrogeno o di 27 d'ossigeno.

(2) Questa ipotesi coincide in parte con quelle di Brun, Stutzer, Suess, ecc., secondo i quali parte delle acque termominerali (*acque nuove* dei francesi, *acque giovanili-Juvenile Quellen* dei tedeschi) sarebbero dovute all'*idrogeno d'origine interna* e all'ossigeno derivante dalla decomposizione degli ossidi metallici delle rocce.

(3) Amer. Journ. of Sc., 1892.

(4) H. Moissan, loc. cit., vol. I, pag. 51.

(5) Si ritiene che il covolume sia all'incirca la millesima parte del volume normale di un gas.

Sarà bene ricordare qui qualche risultato di laboratorio. I minerali che si formano a temperatura più elevata sono gli spinelli che fondono a 1900°, mentre il ferro cromato fonde a 1850°, il quarzo a 1775°, i peridoti a 1730° e più, e tutti gli altri generalmente sotto i 1700°, salvo se intervengono pressioni più elevate della normale, che abbassano le dette temperature. Così il quarzo nell'obelisco andesitico del 1902 alla Pelata si dovette formare a temperatura inferiore a 1150°. Si deduce che a 2000° la lava non può contenere elementi solidi in nessun caso, e se si considera la pressione a cui è sottoposta tale limite si abbassa di molto. Quanto alla consolidazione della pasta quella dell'andesite anzidetta avvenne a 1150°, ma secondo Brun ci sono lave ancora liquide a 900°.

## Chimica. — *Sulle amalgame di oro ricche di oro.* Nota di N. Parravano e P. Jovanovich [1], presentata dal Socio Paternò.

Ricerche precedentemente eseguite hanno chiarito la natura dei solidi che si trovano nelle amalgame di oro mettendo in luce l'esistenza di due individui cristallini diversi, $Au_2 Hg_3$, $Au_3 Hg$, rispettivamente con 39,66 e con 74,73 % di Au.

Nella letteratura si trovano però, su amalgame più ricche d'oro, dati che accennano ad un comportamento che ne rendeva molto interessante lo studio.

Questi dati sono di due specie diverse e riguardano rispettivamente il comportamento delle amalgame quando sono sottoposte all'azione del calore, a temperature fra 300° e 440°, e quando siano trattate con $HNO_3$.

De Souza [2] prima e Merz e Weith dopo [3], scaldarono le amalgame a temperature comprese negli intervalli sopra indicati e analizzarono l'oro residuo quando esso non perdeva più sensibilmente di peso. De Souza, riscaldando in bagno di vapor di zolfo, ottenne un residuo con 10,02 % Au (per $Au_9 Hg$ si calcola 10,13), e in bagno di difenilammina un residuo corrispondente alla formula $Au_8 Hg$ (per la quale si calcola 88,75 % Au).

Merz e Weith, operando in corrente di gas, ottennero in bagno di vapore: *a*) di zolfo; *b*) di mercurio; *c*) di difenilammina, oro contenente rispettivamente:

*a*) 0,33 Hg
*b*) 1,43 Hg
*c*) 4,5 Hg

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica inorganica e di Chimica fisica del R. Istituto di Studî Superiori di Firenze.

[2] Berichte, *8* (1875), 1616; *9* (1876), 1050.

[3] Berichte, *14* (1881), 1440.

D'altra parte Knaffl (1), scaldando a lungo a 80° amalgama contenente una parte di oro e 20 di mercurio, ha ottenuto cristalli di Au puro.

Per quel che riguarda il comportamento rispetto all'acido nitrico, si trova riportato nella letteratura quanto segue.

Henry (2) filtrò attraverso pelle di camoscio un'amalgama contenente una parte di oro per 1000 di mercurio, e trattò il residuo con $HNO_3$ diluito, a leggero calore: ottenne così dei prismi splendenti di composizione $Hg\,Au_8$ (11,86 % Hg) non scomponibili neppure dall'acido nitrico bollente.

Questa osservazione di Henry, dell'esistenza cioè di amalgame resistenti all'azione dell'acido nitrico, si ritrova in seguito fatta da Kasanzeff (3), il quale ottenne amalgame con contenuto di mercurio variabile fra 8,4 e 18,4 %, da Chester (4) che ebbe cristalli con circa 6 % di Hg, e da Wilm (5) il quale, bollendo con acido nitrico, ottenne cristalli di oro con 9,71, 11,45, 9,67, 5,45 % Hg.

Questi fatti, nel loro assieme, potrebbero interpretarsi ammettendo che fra 90 (circa) e 100 Au il Hg si sciolga nell'oro formando soluzioni solide.

Infatti, il notevole rallentarsi della velocità di evaporazione del mercurio quando il contenuto di esso è sceso a circa il 10 % dimostra che, in corrispondenza di questa concentrazione, le proprietà del sistema Au-Hg cambiano bruscamente, e sulla natura del nuovo solido che si origina ci informano appunto le esperienze sul comportamento delle amalgame rispetto all'acido nitrico. Questo, come si è visto, non riesce a togliere all'oro tutto il mercurio: evidentemente gli atomi di oro esercitano un'azione protettiva su quelli di mercurio e li sottraggono all'azione solvente dell'acido. Il fenomeno è ben noto nelle leghe di oro e argento, e di oro e rame, costituite da serie continue di soluzioni solide, ed è stato studiato recentemente da Tammann (6) come caratteristico appunto di soluzioni solide, sia amorfe che cristalline.

Si è creduto perciò opportuno definir meglio la natura delle amalgame da 90 a 100 Au, misurandone la resistenza elettrica.

Come è noto, le esperienze molto estese eseguite in proposito negli ultimi anni, specie da Kurnakow e collaboratori (7), hanno mostrato che uno stretto parallelismo esiste fra diagrammi di fusione di una serie di leghe binarie, e rispettivi diagrammi delle resistenze elettriche, in maniera che, il più delle volte, è possibile ricavare già, dai valori di conducibilità elet-

(1) Gmelin-Kraut, Bd. V, Abt. 2 (1914), pag. 240.
(2) Phil. Mag. [4]. *9*, 458; J. B., *1855*, 419.
(3) Berichte, *11*, Ref. 1255.
(4) Gmelin-Kraut, Bd. V. Abt. 2. pag. 1285 (1914).
(5) Zeit. Anorg. Ch., *4*, 325 (1893).
(6) Zeit. Anorg. Ch., *90*, 296 (1914).
(7) Zeit. anorg. Ch., *54*, 149 (1907).

trica, tutti i dati sul comportamento reciproco di due metalli che vengono indicati dal diagramma di fusione. Gli autori russi hanno in special modo provato la giustezza dell'ipotesi emessa la prima volta da Le Chatelier ([1]), secondo cui la resistenza varia linearmente con la composizione se la lega risulta dai cristallini dei due metalli, e che essa si abbassa invece notevolmente nel caso in cui compaiono cristalli misti.

È questo un fatto oggi indiscutibilmente accertato. La misura della resistenza elettrica doveva perciò, nel caso nostro, poter servire a decidere se le amalgame fra 90 e 100 Au sono o no costituite da soluzioni solide.

La difficoltà era di preparare queste amalgame sotto forma di fili o bacchette che si prestassero alla misura della resistenza. Si è operato a questo modo.

Si sono presi dei fili di oro di circa $^1/_2$ mm. di spessore e 20 cm. di lunghezza e su di essi si è fatto depositare mercurio per via elettrolitica onde distribuirlo in maniera il più che possibile uniforme su tutta la superficie del filo. Il filo, ricoperto di mercurio, è stato ricotto 2-3 ore a 200°; quindi è stato di nuovo amalgamato, poi ancora ricotto e così successivamente, fino a che l'amalgama aveva assunto la composizione voluta.

A questo modo si sono preparati 21 fili di amalgame diversamente concentrate di cui son riprodotte le caratteristiche nella tabella.

La composizione è stata stabilita arroventando separatamente i tratti estremi di ciascun filo: le due composizioni concordavano sempre.

L'omogeneità di composizione dei fili in tutto il loro spessore è stata accertata con l'osservazione microscopica e con l'analisi della zona centrale.

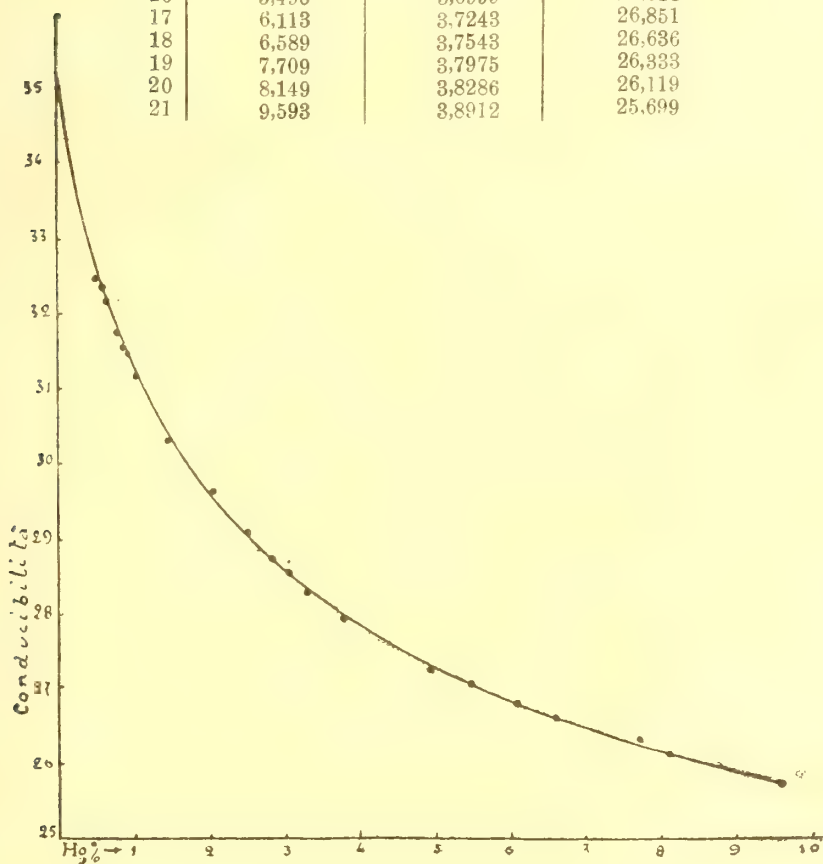
L'oro adoperato era a 999/1000.

Il diametro dei fili è stato misurato con un calibro che permetteva di leggere esattamente mm. 0,01. Per ogni filo si è fatta una serie di letture a un cm. circa di distanza l'una dall'altra, e ogni diametro è stato letto in due direzioni perpendicolari fra loro: i valori riportati nella tabella sono ognuno la media di non meno di 40 osservazioni. La lunghezza è stata misurata col catetometro.

Le misure di resistenza sono state fatte con ponte doppio di Thomson (costruzione Siemens) e i fili sono stati mantenuti a 25° in un bagno di olio di vasellina.

I risultati ottenuti sono riassunti nella tabella e riportati sul diagramma.

([1]) Révue generale des Sciences, *6*, 531 (1895)

| Num. progressivo | °/₀ di Hg | Resistenza specifica $10^{-6} \times \varrho$ — $\varrho$ a 25° | Conducibilità specifica $10^{4} \times \varkappa$ — $\varkappa$ a 25° |
|---|---|---|---|
| Oro puro | | 2·8444 | 35·156 |
| 1 | 0,4859 | 3,0864 | 32,400 |
| 2 | 0,5808 | 3,0938 | 32,322 |
| 3 | 0,6112 | 3,1094 | 22,161 |
| 4 | 0,7235 | 3,1535 | 31,711 |
| 5 | 0,8153 | 3,1693 | 31,552 |
| 6 | 0,9123 | 3,1792 | 31,456 |
| 7 | 1,043 | 3,2147 | 31,107 |
| 8 | 1,398 | 3,3026 | 30,279 |
| 9 | 2,022 | 3,3748 | 29,631 |
| 10 | 2,510 | 3,4413 | 29,059 |
| 11 | 2,862 | 3,4828 | 28,712 |
| 12 | 3,039 | 3,5063 | 28,520 |
| 13 | 3,309 | 3.5510 | 28,262 |
| 14 | 3,800 | 3,5855 | 27.890 |
| 15 | 4,930 | 3,6717 | 27,236 |
| 16 | 5,496 | 3,6999 | 27,028 |
| 17 | 6,113 | 3,7243 | 26,851 |
| 18 | 6,589 | 3,7543 | 26,636 |
| 19 | 7,709 | 3,7975 | 26,333 |
| 20 | 8,149 | 3,8286 | 26,119 |
| 21 | 9,593 | 3,8912 | 25,699 |

Come si vede dalla figura, la conducibilità si abbassa notevolmente per l'aggiunta di mercurio, e l'andamento della curva è quello caratteristico delle soluzioni solide. Il mercurio perciò si scioglie nell'oro allo stato solido, almeno fino ad una concentrazione del 10 %.

Oltre i composti $Au_2 Hg_3$ e $Au_3 Hg$, esistono quindi nelle amalgame d'oro anche soluzioni solide di mercurio in oro.

## Biologia vegetale. — *Cambiamento di « sesso » nell'Idesia polycarpa Maxim.* Nota di B. Longo, presentata dal Socio R. Pirotta.

Gli autori, che si sono occupati dell'*Idesia polycarpa*, non sono d'accordo rispetto ai fiori di questa pianta. Il Maximowicz la dava senz'altro come pianta dioica (¹); gli autori posteriori la dànno generalmente come dioica, ma anche come poligama.

Ciò che m'indusse ad occuparmi di questa pianta fu specialmente la lettura di quanto pubblicò il Becalli, il quale riferì che sul Lago Maggiore alla Villa Ada (Intra), pur non esistendo che un solo esemplare, esso dava semi fecondi (²).

Quando ero Direttore del R. Orto Botanico di Siena, acquistai e piantai qua e là in quell'Orto diversi esemplari di questa pianta. Di essi però soprattutto a causa, suppongo, della secchezza del suolo, la maggior parte perirono. e dei pochi superstiti uno solo aveva fiorito e portato sempre esclusivamente fiori staminiferi.

Venuto verso la fine del 1915 a dirigere il R. Orto Botanico di Pisa, m'informai se nell'Orto fossero piante fiorifere d'*Idesia polycarpa*. Il capo giardiniere mi disse che ve n'era una nel reparto « scuola », da lui stesso piantata, che già da diversi anni aveva cominciato a fiorire, ma che egli non l'aveva mai vista portare frutti.

Supposi perciò che si trattasse di un esemplare staminifero. In ogni modo, alla primavera del 1916, volli accertarmi come stavano le cose, e perciò, alla fioritura, servendomi di un alto scaleo, osservai i fiori, e, per quanti ne esaminassi, li trovai tutti staminiferi. Dopo la fioritura, tutti i fiori andarono a male e caddero.

(¹) Maximowicz C. J., *Diagnoses breves plantarum novarum Iaponiae* [1866]. Ann. d. Sc. Nat. (Bot.), sér. V, t. VII (1867), pag. 378.

(²) Becalli A., *Idesia polycarpa*. Bull. d. R. Soc. tosc. di Ortic., anno XIII (1888), pag. 43: « Una questione si dibatte tra i botanici intorno a questa pianta. Alcuni vorrebbero che sia dioica, e che quindi vi sia la necessità di due piante di diverso sesso per aver semi fecondi; altri lo negano. Io ho in mano le prove che dànno ragione ai secondi. Qui sul Lago esiste solo la nostra pianta, la quale fruttifica come ho già accennato, e mi dà semi dai quali ottengo piantine bellissime e in gran numero ».

Perciò, ritenendo oramai la pianta staminifera, non me ne occupai più, nemmeno alla nuova fioritura del 1917. Se non che, ai primi di giugno, fui avvertito dai giardinieri che il suddetto esemplare d'*Idesia* era carico di giovani frutti. Se grande fu la meraviglia pei giardinieri, grandissima lo fu per me! Gli ovari realmente si erano ingrossati ed avevano raggiunta la grossezza di un piccolo pisello. In quel tempo, essendo i giovani frutti verdi, si aveva quasi l'illusione che tante pannocchie di uva acerba pendessero dalla pianta d'*Idesia*.

Inutile star qui a dire le supposizioni che feci; la più logica però, *a priori*, mi sembrava questa che probabilmente si doveva trattare di un esemplare poligamo, il quale nell'anno antecedente (e presumibilmente anche negli altri anni precedenti) aveva portato esclusivamente fiori staminiferi. Però i giovani frutti, giunti a quello stadio, più non si accrebbero, anzi cominciarono presto ad intristire ed a diventare bruni, e poi tutti caddero, in modo da coprire abbondantemente il terreno sottostante, che appariva come se vi si fosse gettata una grande quantità di pepe nero.

Naturalmente quest'anno ho voluto fare le mie osservazioni con la massima cura possibile e posso assicurare di aver osservati tutti i fiori, tanto più che l'osservazione vien facilitata dal fatto che i fiori sono riuniti in infiorescenze a pannocchie pendenti.

Il fenomeno si è ripetuto come nell'anno passato. Verso la fine di maggio si è avuta un'abbondante fioritura ed i fiori sono stati tutti pistilliferi. Gli staminodi da me esaminati erano tutti sterili.

I fiori dell'*Idesia polycarpa* sono poco appariscenti ma odorosi, e il loro profumo ricorda un po' quello del Mughetto. Li ho visti visitati dalle api.

Anche quest'anno si è avuto un inizio di partenocarpia: cioè, dopo la fioritura, gli ovari si sono accresciuti fino a raggiungere le dimensioni di un piccolo pisello; poi si sono arrestati e, divenuti bruni, sono caduti a terra, in modo che verso la fine di giugno non si trovavano più sulla pianta che i resti imbruniti delle infiorescenze.

Ora, pur tralasciando di tener conto del comportamento della nostra pianta negli anni antecedenti al 1916 (nei quali però si può ritenere con tutta probabilità che sia stata staminifera), sta di fatto — come risulta dalle mie osservazioni — che la natura dei fiori del 1916 è stata diversa da quella del 1917 e del 1918: poichè, mentre i fiori del 1916 furono staminiferi, quelli del 1917 e del 1918 sono stati pistilliferi. In altri termini la pianta ha cambiato completamente di « sesso ».

Il fatto è veramente sorprendente, tanto che, confesso, se non si fosse verificato, dirò così, sotto i miei occhi, ne sarei rimasto dubbioso.

Questo fatto però trova riscontro, più o meno completo, in diversi casi osservati in piante dioiche o poligame e registrati qua e là nella bibliografia botanica. Mi limito qui a ricordarne uno che corrisponde perfetta-

mente al nostro (salvo che il cambiamento del sesso si è verificato in senso inverso). È quello segnalato dall'André in un esemplare di *Chamaerops Fortunei* (*Trachycarpus excelsa*), che nel 1874 portò fiori esclusivamente staminiferi, dopo aver portato fino a quell'anno fiori esclusivamente pistilliferi (1).

Risulta in ogni modo dalle mie personali osservazioni e da quelle di altri autori che il cambiamento di sesso è oramai un fatto accertato in diverse piante. Nulla però siamo in grado di dire riguardo alle cause ed alle condizioni sotto le quali si determinano questi fenomeni.

Tali cambiamenti sono inerenti a determinate specie o varietà, o soltanto a determinati individui? Seguono delle leggi? Si compiono in cicli determinati, o si presentano improvvisamente, disordinatamente? (2).

A queste domande non possiamo per ora dare risposta. Occorrerà che le osservazioni si moltiplichino, e specialmente nelle piante appartenenti a quel magazzino, dirò così, ch'è la *Polygamia* di Linneo.

Ai colleghi, oltre questa raccomandazione, ne rivolgo un'altra; quella cioè di raccogliere i casi notati dai diversi autori (e dispersi qua e là nella bibliografia in lavori d'indole diversa) (3), tenendo conto anche delle osserva-

(1) André E., *La Villa Vigier, a Nice.* L'Illustr. Hort., XXI (Gand, 1874), pag. 126 (citato anche dal Beguinot nella sua comunicazione: *Sul polimorfismo sessuale di Trachycarpus excelsa H. Wendl e di Chamaerops humilis L.* R. Accad. di sc., lett. ed arti in Padova, vol. XXXIII, 1917, pag. 291).

(2) Ebbi già occasione di pubblicare (Longo B., *Note di morfologia fiorale. II.* Ann. di Bot., vol. XIII, 1914, pag. 123) che un individuo di *Myrica cerifera* fioriva due volte all'anno, portando, nella prima fioritura, infiorescenze staminifere normali e, nella seconda, infiorescenze molto piccole e costituite o soltanto da fiori pistilliferi o soltanto da fiori staminiferi.

(3) A questo proposito riferisco il fatto notato da Pietro Savi sopra un esemplare di *Araucaria brasiliana* A. Rich. (da lui battezzato come *Araucaria Ridolfiana*), il quale, la prima volta che fiorì, si mostrò monoico, poi per due anni consecutivi non produsse che fiori carpelliferi (Savi P. in: Atti della terza riunione degli scienziati italiani tenuta in Firenze nel settembre del 1841, pag. 784: « ... l'*Araucaria* di Bibbiani dopo di essere stata in due consecutive fioriture monoica, da due anni a questa parte comparisce dioica, portando solo amenti feminei ... »), e poi di nuovo ritornò monoico (Savi P., *Descrizione di una nuova specie d'Araucaria.* Giorn. Bot. Ital., anno II, parte I. t. I, 1846, pag. 57: « ... Tredici anni dopo piantata, nel febbraio cioè del 1839 per la prima volta fiorì presentando contemporaneamente amenti maschili e feminei, e dichiarandosi in tal modo sin da quel momento per monoica. Gli amenti mascolini, che nel prim'anno in scarsissimo numero si mostrarono, mancarono del tutto nei due successivi anni 1840 e 41, talchè nulla fu la raccolta dei semi nel 1842 e 43, sono tornati però a mostrarsi in quest'ultimi anni, e con essi si è assicurato l'abbonimento dei semi dei quali nel 1844 fu fatta non scarsa raccolta... ».

Le osservazioni più sorprendenti sono state fatte su individui di *Carica Capaya,* alcuni dei quali da prima hanno portato soltanto fiori staminiferi, poi fiori staminiferi e fiori monoclini, poi soltanto fiori monoclini, poi fiori monoclini e fiori pistilliferi, e poi

zioni eventualmente fatte dagli antichi autori, i quali in tante cose erano pur esatti osservatori.

Anche in certi animali è stato riscontrato che con l'età si può avere cambiamento di sesso. Ma si tratta sempre in fondo di animali che morfologicamente sono ermafroditi, soltanto che gli organi sessuali maturano in tempi diversi — o prima quelli maschili e poi quelli femminili (dicogamia proterandra), oppure prima quelli femminili e poi quelli maschili (dicogamia proterogina) — e perciò fisiologicamente essi si comportano prima da maschi e poi da femmine, e viceversa. Quindi il caso di questi animali è diverso, non paragonabile a quello delle piante che c'interessano.

Il ciclo di sviluppo di un vegetale non si compie nell'istesso modo di quello di un animale. L'animale, una volta raggiunta l'età adulta, ordinariamente cessa di crescere ed i suoi organi si mantengono fino alla morte. La pianta invece continua a crescere sempre: ad ogni primavera sviluppa nuovi rami, nuove foglie, nuovi fiori; si ha quindi un rinnovamento periodico continuo; ed i nuovi germogli possono risentire di eventuali nuovi stimoli, esterni od interni, che agiscono su di loro.

Prendiamo ad es. il germoglio fiorale, ch'è quello che c'interessa più da vicino. Nel fiore tutte le parti appartenenti al perianzio, all'androceo e al gineceo sono omologhe, cioè hanno l'istesso valore morfologico. Noi, studiando la morfogenia di un fiore, assistiamo al fatto che, normalmente, alcune bozze fogliari si evolvono in fillomi perianziali, altre in fillomi staminali ed altre in fillomi carpellari. Ma assistiamo anche al fatto che, anormalmente — ad es. in certe piante coltivate — invece di svilupparsi, come avviene normalmente, in stami, si sviluppano ad es. in petali. Con la coltura quindi noi vediamo i fiori di certe piante diventare doppî. Non è in fondo anche questo un cambiamento di « sesso »?

Già il problema dell'origine del sesso è di per sè oscuro. Che cosa, infatti, noi sappiamo, allo stato attuale delle nostre conoscenze, riguardo alla causa determinante il sesso? Che cosa noi sappiamo perchè ad es. da certi semi nascono individui staminiferi e da altri — almeno apparentemente simili — nascono invece individui carpelliferi? Figuriamoci poi quando il problema vien complicato con cambiamenti di sesso nell'evoluzione ontogenetica.

---

soltanto fiori pistilliferi! (Cfr. le osservazioni recenti del Kulkarni riferite nel Boll. mens. di inform. agr. e di pat. veg., anno VII, 1916, pag. 247. Cfr. anche quanto già era stato osservato in proposito dal Baillon e dal Caruel in Nuovo Giorn. Bot. Ital., vol. XX, 1888, pag. 343, e vol. XXI, 1889, pag. 141).

Patologia. — *Sulla natura della reazione alla malleina e sulla trasmissione ereditaria degli anticorpi antimorvosi* (¹). Nota del colonnello dott. E. Bertetti e del T. colonnello prof. G. Finzi, presentata dal Socio B. Grassi.

Nel 1916 (²) uno di noi, dopo una lunga serie di ricerche con la *malleina sensibilizzata*, a proposito della natura della reazione alla malleina nei cavalli morvosi, affermava che un cavallo morvoso reagisce alla malleina non solo perchè produce un anticorpo specifico (sensibilisina antimorvosa), ma benanche per una forma di sensibilità tutta particolare, propria dell'infezione morvosa, propria allo stato morvoso.

Secondo noi la malleina doveva essere considerata come sostanza contenente una speciale tossina, la quale, arrivata nell'organismo sensibilizzato, morvoso, costituisce un veleno *sui generis* solo per l'animale infettato di morva. Certo però che noi, sino da allora, negando alla reazione alla malleina il significato di una manifestazione anafilattica, non volevamo negare che la reazione alla malleina fosse la conseguenza di un fenomeno immunitario.

Nel 1917 (³) sulla base di nuove ricerche, esperimentando ancora la *malleina sensibilizzata* su numerosi cavalli morvosi, confermavamo il concetto più sopra esposto sulla natura della reazione alla malleina. Di più dimostravamo che se sulla presenza di anticorpi antimorvosi dovesse essere compreso il meccanismo patogenetico delle reazioni malleiniche, invece di reazioni completamente negative noi avremmo dovuto ottenere reazione nettamente positive alla prova della malleina in tutti i soggetti (cavalli, muli, asini, bovini) che noi avevamo iperimmunizzato allo scopo di ottenere, in vista di ricerche sulla cura della morva, dei sieri ricchi di anticorpi antimorvosi (⁴).

(¹) Lavoro eseguito nel Laboratorio di ricerche sulla morva, Intendenza III Armata.

(²) G. Finzi, *Sull'impiego della malleina sensibilizzata nella diagnosi della morva e sulla natura della reazione alla malleina*. Il Nuovo Ercolani, pag. 33, 1916.

(³) E. Bertetti e G. Finzi, *Diagnosi e terapia della morva*. Pubblicazione per cura della Direzione di Sanità d'Armata (Tip. Schioppo, Torino, 1917); Intendenza III Armata, Direzione di Sanità, Conferenze di Medicina e Chirurgia di guerra, pag. 108, 1917, Tipografia E. Voghera, Roma.

(⁴) E. Bertetti e G. Finzi, *Sulle proprietà dei sieri di animali iperimmunizzati contro la morva e sulla scelta degli animali per la preparazione di sieri ricchi in anticorpi antimorvosi* (R. Acc. dei Lincei, vol. XXVI, serie 5ª, 2° sem., fasc. 5°, settembre 1917).

*
* *

Ma nuovo ed interessante argomento in appoggio alle vedute nostre sul meccanismo patogenico delle reazioni alla malleina nei soggetti morvosi, noi lo deduciamo ancora dalla trasmissione ereditaria degli anticorpi antimorvosi.

Numerosi autori (Smith, Rosenau e Anderson, Otto, Mori, Belin, Gay e Southard, Otto, Waugan e Weeler, Levi, Scaffidi, ecc.) [1] dimostrarono che lo stato di anafilassi è trasmesso dalla madre al feto per il passaggio degli anticorpi attraverso il filtro placentare. Così i figli di cavie ipersensibili di fronte ad una qualsiasi albumina serica eterologa, reagiscono con manifesti sintomi anafilattici se iniettati col corrispondente siero eterogeneo.

È nozione bene stabilita intanto che, nel cavallo, la trasmissione intrauterina dell'infezione morvosa è cosa rarissima *se non eccezionale*, ed è convinzione nostra che la maggior parte dei « rarissimi » casi segnalati di morva ereditaria nel puledro sono generalmente da addebitarsi a contagio avvenuto durante o dopo il parto.

Per le osservazioni da noi fatte su dieci puledri nati da cavalle con morva cronica, con morva in piena evoluzione, con manifestazioni esterne di morva; per le nostre ricerche sulle bacillemie morvose; per tutto ciò che deriva insieme dalla clinica e dall'esperimento, noi affermiamo nel modo più assoluto che la morva nel cavallo è rarissimamente congenita, che le forme eredo-morvose precoci ed eredo-morvose tardive sono più eccezionali che rare, che, in altre parole, un cavallo non nasce morvoso.

Con queste affermazioni naturalmente noi non vogliamo menomamente infirmare l'opinione di coloro (Cadéac e Mallet, Ferraresi e Guarnieri, Bonome, Loeffler ed altri) che o nel gatto o nella cavia ebbero ad osservare la trasmissione ereditaria della morva dalla madre al feto, giacchè in favore della possibilità di tale trasmissione sta, per queste specie di animali, la frequenza dell'infezione morvosa sanguigna che noi consideriamo invece rarissima, effimera, minima nel cavallo.

Al Laboratorio di ricerche sulla morva della III Armata sono nati nove puledri da cavalle affette di morva (numeri 182, 125, 173, 133, 165, 171, 172, 180, 181), due da una cavalla iperimmunizzata con colture in brodo di 5-6 giorni di età uccise col calore (numeri 150, 183); e un puledro (numero 56) venne inviato al nostro laboratorio all'età di circa un mese con la madre affetta da morva polmonare occulta, ma che divenne dopo pochi giorni aperta, con manifestazioni di rinite specifico-morvosa. Di più abbiamo esaminato il siero di tre puledri *a*) *b*) *c*) nati da cavalle sane.

[1] G. Finzi, *Sulla natura della reazione alla tubercolina e sulla trasmissione ereditaria degli anticorpi antitubercolari.* Il Nuovo Ercolani, n. 4, 1917.

Ai diversi puledri nati nel nostro laboratorio fu prelevato del sangue nei primi dieci giorni dalla nascita, mentre il puledro n. 56 fu salassato 5 giorni dopo la sua entrata in laboratorio.

Col siero raccolto dai singoli puledri noi abbiamo fatto prove di agglutinazione e di deviazione del complemento servendoci di convenienti emulsioni bacillari e di convenienti estratti di bacilli morvosi.

Pur riassumendo brevemente i risultati ottenuti, dobbiamo insistere sul fatto fondamentale che se la prova di agglutinazione (1:600, 800, 1800) e la deviazione del complemento furono positive per tutti i puledri nati nel nostro laboratorio, la prova malleinica fu in tutti i casi nettamente negativa. Su quattro di questi puledri, venuti a morte poi ad epoche differenti (7 giorni, 2 anni circa), venne fatta accurata necroscopia, che fu in ogni caso negativa di fronte all'infezione morvosa.

I puledri *a*) *b*) *c*), nati fuori del nostro laboratorio da cavalle sane, furono salassati nei primi trenta giorni dalla nascita e provati poi con la malleina a titolo di controllo.

In tutti e tre i soggetti le diverse prove biologiche diedero risultati perfettamente negativi.

Facciamo a questo punto osservare che la prova della malleina nei diversi puledri fu, in ogni caso, eseguita dopo il prelevamento del sangue per le prove biologiche. Anche nei puledri noi impiegammo il metodo intrapalpebrale, come il più indicato, iniettando nello spessore della palpebra 25 cgr. di malleina bruta.

In taluni dei nostri puledri poi, alla prova intrapalpebrale fu associata l'oftalmo-reazione in serie con malleina bruta, che fu in ogni caso negativa.

Concludendo:

1°) Per le nostre esperienze, il passaggio degli anticorpi antimorvosi dalla madre al feto avviene di regola, tanto che la presenza degli anticorpi antimorvosi nel siero di puledri non morvosi nati da cavalle morvose, è costante,

2°) I puledri non morvosi nati da cavalle affette di morva non reagiscono in nessun modo alla malleina.

3°) Queste constatazioni, accanto ad altre da noi precedentemente fatte (che troviamo bene riassunte e discusse nel volume di recente pubblicazione del prof. Fava) [1] ci autorizzano maggiormente ad affermare che un cavallo morvoso reagisce alla malleina non solo perchè l'infezione stimola l'organismo alla produzione di anticorpi specifici, ma benanche per una forma di sensibilità tutta particolare, propria all'infezione morvosa. La malleina quindi, secondo noi, deve assolutamente essere considerata come

[1] Prof. E. Fava, *La morva. Profilassi e ispezione delle carni.* Studio critico sperimentale, vol. di 208 pagine, Unione editrice tipografico torinese, 1918.

una sostanza contenente una speciale tossina, la quale, arrivata nell'organismo sensibilitato, morvoso, costituisce un veleno *sui generis* solo per l'individuo affetto da morva. Come per la reazione alla tubercolina, negando alla reazione alla malleina il significato di una reazione anafilattica vera e propria, non possiamo non considerare tale reazione come conseguenza, come espressione di un fenomeno immunitario.

4°) Che gli anticorpi specifici antimorvosi non spieghino da soli il meccanismo patogenetico della reazione malleinica, noi lo desumiamo ancora dal fatto che in tutti i nostri cavalli morvosi sottoposti al trattamento specifico abbiamo sempre riscontrato, con un aumento progressivo di anticorpi in circolo, una progressiva diminuzione di capacità reattiva alla malleina. Riferiremo più avanti osservazioni interessanti fatte con l'impiego della malleina sensibilizzata.

5°) Gli anticorpi antimorvosi delle cavalle sane iperimmunizzate di fronte al *bacillus mallei*, come gli anticorpi derivanti dalla cura specifica, attraversano il filtro placentare e conferiscono al siero ricavato dai puledri le proprietà di agglutinazione e di fissazione del complemento.

6°) Per le nostre esperienze possiamo affermare che le agglutinine normali contenute nel siero di cavalli non affetti da morva, (messe in evidenza da Schutz e dalla sua Scuola) non si trasmettono ereditariamente, oppure se ne trasmettono quantità inapprezzabili.

Ancora per le nostre esperienze, essendo nullo il potere agglutinante del siero dei giovani puledri, noi riteniamo precisamente che le agglutinine normali che si osservano nei cavalli adulti, indipendentemente da stimoli immunizzanti, siano l'espressione del liberarsi di recettori di secondo ordine durante le diverse fasi del metabolismo cellulare.

Queste affermazioni trovano conferma in esperienze già fatte da uno di noi [1] nel 1912.

7°) In una precedente pubblicazione abbiamo già affermato che la reazione malleinica, pur considerata di fronte alle prove biologiche, è da considerarsi il miglior metodo di diagnosi sperimentale.

Per le conclusioni n. 1 e n. 2 è lecito desumere che la Germania, che fin dal 1916 con una istruzione Ministeriale raccomandava le prove biologiche nella profilassi della morva, incorreva eventualmente nel pericolo di abbattere come morvosi puledri sani nati da cavalle morvose.

[1] G. Finzi, *Sul fenomeno di conglutinazione delle emazie. Tentativi della sua applicazione nella diagnosi di alcune malattie infettive.* Biochimica e terapia sperimentale, anno III, fasc. X.

Fisiologia comparata. — *Osservazioni sull' influenza della tiroide sullo sviluppo degli Insetti* [1] Nota del dott. COTRONEI GIULIO, presentata dal Socio B. GRASSI.

Dall' inizio dei miei esperimenti sull'azione della tiroide di Vertebrati sullo sviluppo degli Anfibi avevo pensato di estendere queste ricerche tra gruppi di animali ancora più lontani nella posizione sistematica. Per potere comparare l'esito delle esperienze è ovvio che bisogna riportarsi a condizioni omogenee. In altre parole volendo osservare se la tiroide dei Vertebrati agisse negli Invertebrati, così come negli Anfibi, era necessario che gli Invertebrati che si sceglievano per l'esperimento presentassero condizioni di sviluppo analoghe a quelle degli Anfibi; ossia dopo uno sviluppo larvale si presentasse una fase di metamorfosi. Soltanto dopo stabiliti alcuni dati concreti di esperienza è utile estendere la ricerca sperimentale e osservare se, sotto condizioni differenti, si verificano fenomeni che possono ricondursi alla stessa causa.

Lo studio della metamorfosi tanto negli Insetti quanto negli Anfibi ha condotto infatti ad ammettere molte analogie nei fenomeni che si manifestano in questa fase; tuttavia la scelta del materiale fra gli Insetti non si presenta tanto agevole, volendo somministrare la tiroide sotto forma di cibo.

Gli esperimenti sono stati compiuti nella primavera e nell'estate dell'anno 1916.

I. *Esperienze col Baco da seta* (*Bombyx mori*).

Esperienze preliminari furono compiute col Baco da seta. Ho provato ad aspergere la foglia di gelso con soluzione di endotiroidina preparata dall' Istituto sierologico milanese [2], e dare le foglie in pasto alle larve subito dopo la prima muta: ma in seguito a pochi giorni tutti gli esemplari in esperimento venivano a morire: era da pensare che la soluzione fosse troppo concentrata. Ho provato a diluire la soluzione di endotiroidina con 9 parti di acqua e meglio ancora con 19 parti di acqua, e aspergerne le foglie di gelso: gli esperimenti venivano compiuti con larve dopo la seconda e dopo la terza muta; le larve mangiavano le foglie così preparate senza riluttanza; ma nel loro ulteriore sviluppo non hanno mostrato differenze apprezzabili dai controlli.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia e Fisiologia comparata della R. Università di Roma.

[2] Sento il dovere di ringraziare il prof. Belfanti direttore dell'Istituto sierologico milanese che mise gentilmente a mia disposizione una gran quantità di prodotti opoterapici, anche per altre mie esperienze.

## II. *Esperienze con larve di Ditteri.*

I risultati negativi avuti sul Baco da seta mi hanno consigliato a sperimentare con larve carnivore di Ditteri, potendo in tal modo somministrare una nutrizione esclusiva con tiroide, come anche si era fatto sugli Anfibi, usando quindi un trattamento tiroideo intensivo. Gli esperimenti furono eseguiti con tiroidi di cane tagliate in piccoli pezzetti. Ai controlli si dava a mangiare la carne di cane.

Con le larve dei Ditteri ho compiuto 4 esperimenti durati dai primi giorni di luglio ai primi giorni di settembre del 1916, quando ho dovuto interrompere ogni lavoro perchè chiamato alle armi e poi partito per la guerra. Nei primi due esperimenti, uno con la *Lucilia caesar* e l'altro con la *Sarcophaga carnaria* ho seguito lo sviluppo larvale fino allo stadio di pupa; nel 3° e 4° ho seguito gli esperimenti fino all'immagine. Esporrò il riassunto del protocollo di questi ultimi, avvertendo però che i risultati dei primi due concordavano, perfettamente, col 3° e col 4°.

## III. *Esperimento. Lucilia caesar.*

30 luglio 1916, ore 10-11 deposte le uova.

31 luglio. — Si scelgono due gruppi di circa 20 larve ciascuno. e si somministra rispettivamente tiroide e carne di cane. Si adoperano per gli esperimenti vasi di vetro di eguale grandezza, in maniera che le condizioni di ambiente siano uguali.

3 agesto. — Le larve nutrite con carne sfuggono il cibo; quelle nutrite con tiroide seguitano avidamente a cibarsi.

4 agosto. — Parecchie larve nutrite con carne sî sono trasformate in pupa; le larve nutrite con tiroide seguitano a cibarsi.

5. agosto. — Quasi tutte le larve nutrite con carne si sono trasformate in pupe; le larve nutrite con tiroide sfuggono il cibo.

6 agosto. — 3 larve nutrite con tiroide si sono trasformate in pupe; di quelle nutrite con carne ne mancano 5 ancora da trasformarsi in pupe.

8 agosto. — 8 larve nutrite con tiroide sono trasformate in pupa; tutte le larve nutrite con carne sono trasformate in pupe.

9 agosto. — Tutte le larve nutrite con tiroide sono trasformate in pupe.

13 agosto mattina. — Sono nate 5 mosche, le cui larve avevano mangiato carne.

14 agosto sera. — Sono nate 3 mosche, le cui larve avevano mangiato tiroide; le mosche nate da larve nutrite con carne sono ora 11.

16 agosto. — Sono 11 le mosche provenienti dal lotto con tiroide e 11 quelle provenienti dal lotto con carne.

IV. *Esperimento. Sarcophaga carnaria.*

10 agosto sera. — Si raccolgono per l'esperimento larve deposte di *Sarcophaga carnaria.* Il giorno dopo come prima le dividiamo in due lotti di egual numero cui si dà rispettivamente tiroide e carne di cane.

16 agosto. — Osservo che le larve nutrite con carne sono più grandi di quelle nutrite con tiroide.

22 agosto. — Tanto le larve nutrite con tiroide quanto le larve nutrite con carne hanno abbandonato il cibo e tentano di fuggire dai vasi in cui sono contenute; si mettono nei fondi dei vasi truccioli di legno, sotto i quali le larve vanno subito a nascondersi.

23 agosto. — Tanto le larve nutrite con tiroide quanto quelle con carne cominciano a trasformarsi in pupa.

6 settembre mattina. — È nato un moscone, la cui larva era stata nutrita con tiroide.

6 settembre sera. — Sono nati 3 mosconi, le cui larve si nutrivano di carne e 3 da quelle che si nutrivano di tiroide.

Successivamente si osserva ancora che gli interi lotti si trasformano senza presentare differenza alcuna.

Dagli esperimenti, dianzi riferiti, si rileva che la nutrizione tiroidea non mostra nello sviluppo degli Insetti influenza alcuna. Quando si pensi all'influenza rapidissima con la quale la nutrizione con tiroide si manifesta nello sviluppo larvale degli Anfibi, dobbiamo concludere che se l'ormone tiroideo fosse attivo, nella nutrizione delle larve dei ditteri e del Baco da seta avremmo avuto risultati sicuri e avremmo dovuto avere un acceleramento nello sviluppo larvale, acceleramento che, nel nostro caso, non si è affatto verificato. Inoltre negli Anfibi si è verificato uno sviluppo disarmonico (Cotronei), mentre niente di tutto questo si verifica negli Insetti. Nel caso dei Ditteri si potrebbe obbiettare che, data la peculiare maniera di digestione che si verifica in questi animali, l'ormone della tiroide possa diventare inattivo; difatti è noto che le larve delle Mosche determinano la liquefazione del cibo in mezzo al quale vivono. Vi sono degli autori che hanno pensato che la decomposizione prodotta dalle larve sia dovuta a sostanze digestive rigettate, ma Guyémot non ha ottenuto alcuna digestione d'albuminoidi, d'amido o di grassi con degli estratti provenienti da larve triturate di *Lucilia caesar* o da organi digestivi del medesimo insetto. Sarebbero invece dei microrganismi a incaricarsi del lavoro di liquefazione e di digestione.

A me non pare, anche tenuto conto dei risultati avuti sul Baco da seta, che si debba concludere che è alla maniera speciale di digestione delle larve dei Ditteri che si debba il risultato negativo dèi nostri esperimenti. Ho voluto soltanto accennarvi perchè bisogna tener conto di tutte le cause possibili che intervengono in un fatto sperimentale.

Lo studio sull'influenza degli ormoni dei Vertebrati sugli Invertebrati merita di essere più ampiamente e più estesamente approfondito.

## Zoologia. — *Nuovo contributo alla conoscenza dello sviluppo larvale di Bathophilus nigerrimus Gigl* [1]. Nota di Luigi Sanzo, pres. dal Socio B. Grassi.

Di questo rarissimo *Stomiatide* di cui si conoscono ben pochi esemplari catturati quasi tutti nelle acque dello Stretto di Messina, descrissi nel 1914 nel presente periodico e nella 48ª Memoria del R. Comitato Talassografico italiano due stadî dello sviluppo larvale, l'uno di mm. 11,63 e l'altro di mm. 21,72. A questo stadio più avanzato sono comparsi sul corpo, che è ancora di trasparenza cristallina, degli organi luminosi disposti lateralmente alla linea mediano ventrale. In seguito ho potuto avere altri stadî che vanno da una giovanissima larva di mm. 5,92 sino a quella di mm. 21,72 già prima descritta; è completa così la serie d'accrescimento larvale; stadî susseguenti alla prima apparizione degli organi luminosi non ho potuto ancora rinvenire.

La più piccola larva di mm. 5,92 è trasparentissima, molto appiattita, con capo inclinato in basso; tale inclinazione è riscontrabile anche in esemplari raccolti viventi.

È caratteristica l'enorme pinna primordiale dorsale che dal capo va indietro aumentando in ampiezza fino a poco avanti il livello dell'ano, ove raggiunge il doppio, quasi, dell'altezza del tronco. Da quivi la pinna gira attorno allo estremo caudale fino all'apertura anale, presentando, tanto dorsalmente che ventralmente ed allo stesso livello, un rientramento in corrispondenza dell'ano, ed uno ancora più profondo a metà quasi del tronco caudale. Resta così ben contraddistinta la pinna primordiale caudale, ed in avanti a questa il tratto in cui si svilupperà dorsalmente la dorsale e ventralmente la pinna anale.

In avanti all'apertura anale una grande piega cutanea che procede cranialmente fino alla sinfisi del cingolo toracico. Nessun abbozzo di pinne impari; delle pari sono presenti le pettorali, membranose, arrotondite, inse-

[1] Dall'Istituto centrale di Biologia marina in Messina.

rite assai ventralmente sul cingolo toracico. L'urostilo è lievemente flesso in alto; i pezzi ipurali non sono ancora abbozzati.

Si contano 39 segmenti, che è il numero di vertebre nella specie, dei quali 32 preanali e 7 postanali. Nello sviluppo successivo con lo spostamento in avanti dell'ano, aumenta il numero dei segmenti caudali a spese di quelle addominali. La corda è ampia formata di elementi non uniseriati.

Il muso è rivolto in alto ad angolo su profilo frontale, è molto schiacciato dall'alto al basso. Piccoli denti sui mascellari, molti dippiù in quello superiore che nell'inferiore.

Grande squarcio boccale; l'intestino ha un ampio lume con sbocco anale assai indietro presso e poco ai $^4/_5$ della lunghezza totale del corpo. Il tratto terminale è ben distinto dal rimanente da una evidente plica valvolare.

L'occhio è ellittico con riflessi argenteo-dorati.

Dei piccoli cromatofori in nero seguono in tutto il percorso il profilo dorsale e ventrale della pinna primordiale. Ne risultano così quattro ben distinte punteggiature. Cromatofori più piccoli seguono il profilo ventrale dello intestino. Analoghi cromatofori si trovano irregolarmente sparsi sulla estensione della pinna primordiale e sul capo.

Principali caratteri dell'accrescimento larvale. — L'appiattimento del corpo persiste in tutta la serie fino al suo massimo di sviluppo larvale rappresentato nel mio materiale dall'esemplare di mm. 21,72. Assai caratteristicamente persiste fino a tale massimo stadio di accrescimento larvale, l'ampio lembo di pinna primordiale che va dal capo fino alla dorsale, posta all'estremo del corpo, con la quale permane tuttavia unita.

*Pinna dorsale.* — Si sviluppa nel tratto di pinna primordiale compreso fra i due rientramenti dorsali della piccola larva già esaminata. Allo stadio di mm. 8,80 sono presenti gli abbozzi di 10 portaraggi, a 14 mm. di lunghezza si contano 14 raggi che è il numero definitivo di *Bathophylus* adulto. Nell'esemplare più sviluppato di mm. 21,72 la pinna anteriormente è ancora in continuazione con la pinna primordiale, quale si osserva negli esemplari di massimo accrescimento larvale di *Stomias boa.* Indietro è ben disimpegnata dalla pinna caudale di cui riesce ad oltrepassare la base, con il suo margine libero arrotondito.

*Pinna anale.* — Si sviluppa oppostamente alla dorsale e contemporaneamente. Nella larva di mm. 8,80 sono presenti dieci portaraggi. Nelle larve di mm. 14 sono presenti 14 raggi che è il numero definitivo della specie.

Tanto che per la dorsale che per l'anale i luoghi di articolazione tra raggi e portaraggi si trovano, per tutta la serie d'accrescimento larvale, su due linee divergenti in avanti; così mentre il raggio posteriore si articola, in entrambe le pinne, quasi a livello del rispettivo profilo dorsale o ventrale delle masse muscolari del tronco, quello anteriore se ne trova molto distante per uno spazio che uguaglia l'altezza stessa del tronco a quel livello. Nel

*Bathophylus* adulto, per lo sviluppo delle masse muscolari, queste articolazioni non riescono così in vista. Ma un esame radioscopico riesce a mettere in mostra un' identica disposizione.

*Pinna caudale.* — Nella larva di mm. 8,80, l'urostilo non è ancora rialzato; sono però formati i pezzi ipurali. Il rialzamento si nota in larve sui 10 mm. A questo stadio manca sul margine posteriore della pinna un rientramento mediano. La forma biloba si è affermata nella larva di mm. 14. Quivi i due lobi sono di sviluppo diseguale. L'inferiore è più lungo del superiore. Si contano 19 grandi raggi come in *Bathophylus* adulto; tre piccoli raggi dorsolmente in avanti all'urostilo, e 2-3 ventralmente. In tutta la serie di sviluppo larvale permane il disuguale sviluppo nei due lobi della pinna. Nell'adulto persiste ancora sebbene in minor grado.

*Pettorali.* — Si mantengono poco sviluppate in tutta la serie; la parte basale della pinna si presenta con corto e ristretto peduncolo attaccata al cingolo toracico vicino alla sinfisi. La parte membranosa, sempre arrotondita, si presenta finamente striata fino a stadî da 19 a 20 mm. La tardiva comparsa di raggi alle pettorali è carattere comune con lo *Stomias boa.*

Nell'esemplare più sviluppato si contano una trentina di raggi, dei quali parecchi non raggiungono ancora il bordo della membrana. Nell'adulto la pinna è caratteristicamente rappresentata da 36-37 lunghi e sottili raggi. La parte scheletrica basale è completamente infossata nei tessuti di maniera che i raggi fuoriescono dalla superficie del corpo, sopra una linea ricurva. I raggi distesi all' indietro raggiungono l' impianto delle ventrali poste a metà, quasi, della lunghezza totale del corpo. Sul fondo intensamente nero dell'animale, tali raggi risultano per il loro colore, direi splendore, serico. Ogni raggio è articolato. Una membrana interradiale è visibile nella parte basale della pinna per un tratto crescente da avanti in dietro dove, negli ultimi raggi, arriva ad estendersi quasi per un terzo della loro lunghezza. Nella parte distale i raggi decorrono a filamenti liberi, come fili di seta.

*Ventrali.* — I primi abbozzi di queste pinne si trovano in larve sugli 8 mm. Esse stanno impiantate assai in alto dal profilo ventrale a metà quasi della lunghezza totale del corpo. Tale carattere ripete quello che la stessa pinna offre caratteristicamente nell'adulto di *Bathophylus.* In tutta la serie di sviluppo larvale si mantengono piccolissime; abbozzi di raggi si notano in esemplari sui 20 millimetri. Allo stadio di mm. 21,72 si notano gli abbozzi di 23-24 raggi decrescenti in altezza da avanti in dietro. Nell'adulto anche per queste pinne, come per le pettorali, la parte scheletrica basale si trova completamente affondata nel tessuto muscolare. Dei lunghi raggi sericei, simili a quelli delle pettorali, fuoriescono dalla superficie a metà dell'altezza del tronco sopra una linea retta ad angolo di mezzo retto quasi sull'asse del corpo. Sono in numero di 23-24, articolati, e distese all' indietro oltrepassano l'origine delle due opposte pinne, anale e dorsale.

*Intestino.* — Nella larva di mm. 8,80 è già presente una discreta papilla anale; stadî successivi presentano un lungo tratto intestinale liberamente pendente in avanti della pinna anale.

*Pigmento.* — La pigmentazione già riscontrata nella larva più piccola va, col progressivo sviluppo larvale, divenendo meno appariscente, specie quello della pinna primordiale. Nulla fa sospettare dell'intensa pigmentazione dell'adulto.

*Occhio.* — Da ellittico che è nella larva più piccola va mano mano guadagnando verso la forma rotonda. Nell'esemplare più sviluppato è leggermente ovale con cristallino centrale. Presenta in tutta la serie dei bei riflessi argenteo-dorati. Nell'adulto è divenuto assai piccolo, con piccolissimo cristallino centrale. Ha riflessi madreperlacei somiglianti a quelli dei due grandi fotofori sotto l'occhio.

*Barbiglio.* — Come in larve di *Stomias boa* anche qui appare verso la fine d'accrescimento larvale un piccolo barbiglio. Nella larva di mm. 19,20 misura un millimetro di lunghezza e mm. 1,5 nella larva di mm. 21,72.

Nell'adulto e negli esemplari ben conservati, quali quelli che ho potuto pescare ancora viventi, assume uno sviluppo straordinario, fino a due volte la lunghezza totale del corpo.

*Organi luminosi.* — Appaiono verso la fine del periodo d'accrescimento larvale. In larve sui 18-19 mm. sono presenti degli abbozzi di organi luminosi, privi di pigmento e distinguibili, in trasparenza, osservando con una lupe, per diversa rifrazione dai tessuti circostanti. In stadî anteriori, a venir su dai 16 mm. si riesce ancora, ma su preparati microscopici, a differenziare cotali abbozzi. Essi sono disposti in due serie che vanno dalla parte inferiore del cingolo toracico fino alla pinna anale, tenendosi in alto del profilo ventrale addominale, ed incurvandosi in basso agli estremi. Questo postamento in alto coincide con la posizione in alto della pinna ventrale, la quale, nelle specie in cui le due suddette serie si svolgono assai vicino alla linea mediana ventrale, si trova interposta in tale decorso. Nell'esemplare più sviluppato tali serie si mostrano pigmentate e bene appariscenti. La fila di organi luminosi più ventralmente posta è così costituita:

dal cingolo toracico alle ventrali in numero di 14;

dalle ventrali alla pinna anale in numero di 11.

La fila di fotofori che si svolge parallela e dorsalmente alla precedente riesce così formata:

fotofori sopra-toracici in numero di 11;

fotofori sopraventrali in numero di 9, corrispondenti successivamente sul 1°, 2° fino al 9° della serie ventrale. Così gli ultimi due fotofori mancano dei corrispettivi sopraventrali.

Oltre alle due suddette file di organi luminosi, si riscontrano 5 fotofori all'estremo del tronco, corrispondentemente alla parte posteriore della

pinna anale. Altri ne esistono ventralmente avanti il cingolo toracico. I due posteriori sono bene visibili. I rimanenti e quelli sulla membrana branchiostegale non poterono essere contati, per non sciupare l'interessante esemplare. Gli organi luminosi suddescritti sono bene visibili ad occhio nudo. Nel *Bathophylus* adulto un'osservazione superficiale, fatta su individui conservati in alcool, non rivela alcun organo luminoso.

Con un esame diligente, e con l'aiuto di una lente a piccolo ingrandimento, si riesce ad individualizzare le due serie parallele di fotofori che si distinguono dagli altri, di cui è riccamente disseminata la superficie del corpo, perchè più grandi ed allungati nel senso longitudinale. La serie ventrale si mostra assai meno spostata in alto che non nella larva. Ma il confronto del numero dei fotofori non lascia neanche per essa il menomo dubbio sull'identità con le due serie dello stadio larvale.

Ho avuto la fortunata occasione di potere esaminare ancor viventi due esemplari pescati da questo preparatore Giuseppe Arena. Le due descritte larve brillavano di un bel giallo d'oro e si differenziavano da una uniforme fosforescenza estesa a quasi tutta la superficie del corpo. A questa diffusa fosforescenza corrisponde la straordinaria ricchezza di organi luminosi di cui si mostra ad un discreto ingrandimento cosparsa la pelle dell'animale.

Le due serie parallele risultano così costituite nell'adulto:

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Serie ventrale.* — | Fotofori | dall'istmo alle pettorali in numero di | 5 |
| | " | sotto la base " " " | 2 |
| | " | dalle pettorali all'anale " " | 12 |
| *Serie laterale.* — | Fotofori | sopratoracici in numero di | 12-13 |
| | " | sopraventrali " " | 9-10 |

All'estremo caudale cinque fotofori corrispondentemente alla parte posteriore della pinna anale. Sul capo, sotto l'occhio, e un po' indietro un grande fotoforo perlaceo ed un altro, però assai più piccolo dietro e vicino alla inserzione delle ventrali. Nove fotofori sulla membrana branchiostegale.

La diffusa fosforescenza è data da una straordinaria ricchezza di organi luminosi rispondenti la massima parte ai numerosissimi granuli di cui si mostra cosparsa la pelle dell'adulto. Ma a principio di tutto questo complesso di organi luminosi sono state quelle stesse serie toraciche ventrali, anali, sopratoraciche, sopraventrali, le quali da sole formano quasi tutto il dispositivo di organi luminosi riscontrati sull'addome e sulla coda di un gran numero di *Scopelini*. Per questo verso adunque il *Bathophylus* non si sottrae come si poteva pensare, alle fondamentali linee di disposizione degli organi luminosi negli *Stomiatidi*.

## PRESENTAZIONE DI LIBRI

L'accademico Segretario GRASSI presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando le seguenti inviate dal Socio RIGHI: *I fenomeni elettro-atomici sotto l'azione del magnetismo*; dal Corrisp. C. GUIDI: *Prove di elasticità e resistenza sulla fune portante dei carrelli vuoti delle funivie Savona-San Giuseppe — La statica delle dighe a volta.* Fa inoltre particolare menzione delle opere seguenti pubblicate per cura della Società italiana per il progresso delle scienze: ROSATI e BAUDIN: *Relazione della Commissione per lo studio dell'Albania. Studî algologici.* P. II. — OMODEO, PEGLION e VALENTI: *La Colonia Eritrea. Condizioni e problemi.*

## CORRISPONDENZA

Il Presidente D'OVIDIO dà comunicazione di una bellissima lettera, ispirata ad alti sensi di ammirazione e di cordialità, colla quale la « British Academy » di Londra si congratula coll'Accademia dei Lincei, per le recenti gloriose vicende dell'Italia, di cui ricorda le grandi benemerenze per il progresso della civiltà dai tempi antichi sino ad oggi.

La lettura di questo gradito documento di fratellanza scientifica, è accolta con calorosi applausi dai Soci presenti, i quali dànno incarico alla Presidenza di esprimere alla « British Academy » che i suoi sentimenti di simpatia e di ammirazione per l'Italia sono entusiasticamente ricambiati dall'Accademia dei Lincei, memore dell'antica e costante amicizia della Gran Brettagna.

Il Vicepresidente RÒITI comunica poscia un indirizzo della Società Matematica di Francia, che pur essa con nobilissime espressioni plaude alle vittorie italiane, e si compiace della fratellanza d'armi dei due paesi, augurandosi che tale fratellanza prosegua anche in tempo di pace per raggiungere i comuni ideali scientifici e patriottici. Questo indirizzo è accolto dagli unanimi applausi dei Soci, i quali deliberano l'invio di cordiali ringraziamenti alla Società Matematica francese.

Lo stesso Vicepresidente comunica alla Classe i ringraziamenti di S. M. il RE per gli augurî inviatigli nell'occasione del genetliaco.

Soggiunge ancora aver incaricato il nostro collega Luigi Bianchi di commemorare l'insigne matematico, nostro Socio e maestro di lui, Ulisse Dini.

E. M.

## OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
*presentate nella seduta del 1° dicembre 1918.*

Baudin G. — Relazione della Commissione per lo studio dell'Albania. Parte II. Roma, 1915. 8°, pp. 1-195.

Carpano M. — Congiuntivite enzootica di origine streptococcica negli equini (Estr. da « La settimana veterinaria », anno I, pp. 1-26). Pisa, 1916. 8°.

Carpano M. — Contributo alla conoscenza del B. Mallei (Estr. dal « Moderno Zooiatro », anno 1912, pp. 1-17). Bologna, 1912. 8°.

Carpano M. — Contributo alle conoscenze dell'infezione morvosa nei felini (Felis leo, Felis tigris, Felis domestica), associazione B. mallei — B. felisepticum (Estr. dagli « Annali d'Igiene », anno XXVIII, pp. 1-27). Roma, 1918, 8°.

Carpano M. — Contributo alle conoscenze istologiche ed istogenetiche delle neoformazioni adenomatose del fegato (Estr. dal « Moderno Zooiatro », 1915, n. 6, pp. 1-19). Bologna, 1915. 8°.

Carpano M. — Contributo allo studio dei germi paracarbonchiosi in relazione specialmente con il *bacillus anthracis* (Estr. dagli « Annali d'Igiene », anno XXVI, pp. 1-50). Roma, 1916. 8°.

Carpano M. — Contributo allo studio dei tumori primitivi del polmone (Estr. dal « Moderno Zooiatro », anno 1915, pp. 1-20). Bologna, 1915. 8°.

Carpano M. — Cultura di piroplasmi equini e considerazioni sulla natura degli anaplasmi (Estr. da « La clinica veterinaria », anno 1913, pp. 1-18). Milano, 1913. 8°.

Carpano M. — Forme sporali dell'agente etiologico della marva (Estr. da « La clinica veterinaria », anno 1913, pp. 1-14). Milano, 1913. 8°.

Carpano M. — Gli invertebrati quali veicoli, ospiti e trasmettitori di agenti patogeni nelle malattie infettive degli animali domestici (Estr. da « La settimana veterinaria », anno II, pp. 1-15). Pisa, 1915. 8°.

Carpano M. — Il bacillo del carbonchio ematico è sempre immobile? (Estr. dal « Moderno Zooiatro », n. 11, anno 1915, pp. 1-7). Bologna, 1915. 8°.

Carpano M. — L'anaplasmosi nei bovini nella Campagna romana (Estr. dal « Moderno Zooiatro », anno 1912, pp. 1-9). Bologna, 1912. 8°.

Carpano M. — La febbre della costa nella Colonia Eritrea (Estr. da « La clinica veterinaria », anno 1912, nn. 19, 20, 21, 22). Milano, 1912. 8°, pp. 1-46.

Carpano M. — Le affezioni necrotiche gangrenose nella patologia veterinaria (Estr. dagli « Annali d'Igiene sperimentale », vol. XXIII, pp. 1-21). Torino, 1913. 8°.

Carpano M. — Le associazioni batteriche nelle infezioni da *Cryptococcus farciminosus* (Rivalta 1873) (Estr. dagli « Annali d'Igiene », anno XXVIII, 1918, pp. 1-7). Roma, 1918. 8°.

Carpano M. — Le infezioni tubercolari negli equini (Estr. da « La settimana veterinaria », anno II, nn. 19-20, pp. 1-28). Pisa, 1915. 8°.

Carpano M. — Nota su di uno speciale blastomicete riscontrato nell'apparato respiratorio di un cavallo (Estr. dagli « Annali d'Igiene sperimentale », vol. XXII, pp. 435-450). Torino, 1912. 8°.

Carpano M. — Note epizooziologiche sulle infezioni piroplasmiche degli equini in Italia (Estr. dal « Moderno Zoo-

iatro », n. 10, anno 1915, pp. 1-14). Bologna, 1915. 8°.

CARPANO M. — Piroplasmosi equina tipi parassitari (Estr. da « La clinica veterinaria », 1913, nn. 19-20, pp. 1-46). Milano, 1913. 8°.

CARPANO M. — Piroplasmosi tipo « parvum » nei bovini del basso bacino del Mediterraneo: febbre della costa mediterranea (Estr. da « La clinica veterinaria », anno 1915, pp. 1-79). Milano, 1915. 8°.

CARPANO M. — Qualche osservazione sul valore dell'esame microscopico, delle prove culturali e delle inoculazioni sperimentali nell'accertamento di diagnosi della morva (Estr. da « La clinica veterinaria », anno 1913, pp. 1-12). Milano, 1913. 8°.

CARPANO M. — Spirillosi equina, un caso di *spirachaeta equi* in un cavallo della Colonia Eritrea (Estr. dagli « Annali d'Igiene sperimentale », vol. XXII, pp. 1-22). Torino, 1912. 8°.

CARPANO M. — Su di un acaro del genere *Thyroglyphus* parassita accidentale del cavallo (Estr. da « La clinica veterinaria », anno 1918, pp. 1-7). Milano, 1918. 8°.

CARPANO M. — Su di alcuni spirocheti rinvenuti in neoformazioni papillomatose degli equini (Estr. da « La clinica veterinaria », anno 1914, pp. 1-14). Milano, 1914. 8°.

CARPANO M. — Su di un caso di anasarca nel cavallo verificatosi in seguito ad inoculazione di streptococco (Estr. da « La clinica veterinaria », anno 1914, pp, 1-16). Milano, 1914. 8°.

CARPANO M. — Su di un importante epitelioma del cavallo e su speciali corpi con aspetto parassitario in esso rinvenuti. Milano, 1914. 8°, pp. 1-24.

CARPANO M. — Su di un metodo rapido di colorazione dei corpi di Negri nella rabbia e sulla speciale struttura che si mette in evidenza col metodo stesso (Estr. da « La clinica veterinaria », anno 1916, pp. 1-16). Milano, 1916. 8°.

CARPANO M. — Su di una particolare metrite a forma settica nelle cavie determinata da un batterio del gruppo delle setticemie emorragiche (Pasteurella) (Estr. dal « Moderno Zooiatro », 1915, n. 7, pp. 1-11). Bologna, 1915. 8°.

CARPANO M. — Su di un siero polivalente contro la pleuro-pulmonite infettiva degli equini e sul relativo uso (Estr. da « La settimana veterinaria », anno II, n. 11-12, pp. 1-8). Pisa, 1916. 8°.

CARPANO M. — Su di una spirochete osservato nel topo bianco (*Mus rattus* var. *alba*) e qualche considerazione su alcuni spirocheti saprofiti (Estr. dal « Nuovo Ercolani », anno 1917, nn. 9-10, pp. 1-15). Torino, 1917. 8°.

CARPANO M. — Su di un tripanosoma osservato nei pipistrelli catturati in Roma (Estr. da « La clinica veterinaria », anno 1914, pp. 1-12). Milano, 1914. 8°.

CARPANO M. — Su di un *virus* filtrabile di probabile origine bovina (Estr. da « La clinica veterinaria », anno 1918, pp. 1-13). Milano, 1918. 8°.

CARPANO M. — Su di una importante enzoozia di febbre della costa in Libia (Estr. da « La settimana veterinaria », anno I, n. 25, pp. 1-7). Pisa, 1914. 8°.

CARPANO M. — Sul ciclo evolutivo dell'*Haemoproteus* Danilewskyi. Bergamo, 1913. 8°, pp. 1-22.

CARPANO M. — Sul periodo incubatorio delle principali malattie infettive degli animali domestici. Pisa, 1914. 8°, pp. 1-7.

CARPANO M. — Sull'invoglio capsulare di alcuni batteri (Estr. dagli « Annali d'Igiene sperimentale », vol. XIII, pp. 1-12). Torino, 1913. 8°.

CARPANO M. — Sulla diagnosi batteriologica del carbonchio ematico con piccole quantità di materiale virulente (Estr. da « La settimana veterinaria », anno II, n. 35, pp. 1-8). Pisa, 1915. 8°.

CARPANO M. — Sulla diagnosi clinica e microscopica delle più frequenti dermatosi parassitarie degli equini (Estr. dal « Moderno Zooiatro », nn. 11-12.

1916 e n. 1, 1917, pp. 1-43). Bologna, 1917. 8°.

Carpano M. — Sulla natura e sull'uso del siero antistreptococcico preparato nel laboratorio batteriologico veterinario militare (Estr. dal « Moderno Zooiatro », 1913, pp. 1-15). Bologna, 1913. 8°.

Carpano M. — Sulla virulenza del sangue degli animali infetti di peste bovina (Estr. da « La clinica veterinaria », anno 1915, pp. 1-18). Milano, 1915. 8°.

Carpano M. — Sulle ricerche batteriologiche nelle affezioni tifoidi del cavallo (Estr. da « La clinica veterinaria », anno 1918, nn. 1-2, pp. 1-3), Milano, 1918. 8°.

Carpano M. — Sulle tossicosi isoanafilattoidi di alcuni immunsieri (Estr. da « La clinica veterinaria », anno 1918, pp. 1-16). Milano, 1918. 8°.

Carpano M. — Tripanosoma tipo Theileri nei bovini della Colonia Eritrea. Bergamo, 1913. 8°, pp. 1-12.

Carpano M. — Un secondo caso di spirochetosi nel topo bianco (Estr. da « La clinica veterinaria », anno 1917, pp. 1-7). Milano, 1917. 8°.

Carpano M. — Vaccinoprofilassi e vaccinoterapia delle affezioni adenitiche a mezzo di un nuovo vaccino antistreptococcico a *virus* sensibilizzato (Estr. dal « Moderno Zooiatro », anno 1915, pp. 1-29). Bologna, 1915. 8°.

Guidi C. — La statica delle dighe a volta (Estr. dalla Rivista « L'Industria », vol. XXXII, pp. 1-40). Varese, 1918. 8°.

Guidi C. — Prove di elasticità e resistenza sulla fune portante dei carrelli vuoti delle funivie Savona-San Giuseppe (Estr. dalla Rivista « L'Industria », vol. XXXII, pp. 1-6). Varese, 1918. 8°.

Ivaldi G. — Sull'applicazione dei principî di Galileo allo studio dei gas (Estr. dal « Bollettino tecnico ligure », anno XVI, pp. 1-4). Genova, 1918. 8°.

Meli R. — Rinvenimento di resti fossili di un elefante nell'interno della città di Roma (Estr. dagli « Atti della Pontificia Accademia Romana dei Nuovi Lincei », pp. 1-11). Roma, 1918. 4°.

Omodeo A. — La Colonia Eritrea: Condizioni e problemi, fasc. II. Roma. 1913. 8°, pp, 1-226.

Peglion V. — La Colonia Eritrea: Condizioni e problemi, fasc. I. Roma, 1313. 8°. pp. 1-226.

Righi A. — I fenomeni elettro-atomici sotto l'azione del magnetismo. Bologna, 1918. 8°, pp. I-XVI, 1-435.

Rosati U. — Relazione della Commissione per lo studio dell'Albania. Parte II. Roma, 1915. 8°, pp. 1-195.

Russo A. — La coniugazione nei Ciliati si compie con l'unione di due nuclei di natura sessuale diversa (cariogamia) o con semplice scambio di nuclei? (Estr. dalla « Rivista di scienze naturali », vol. IX, pp. 157-175). Pavia, 1918. 8°.

Valenti G. — La Colonia Eritrea: Condizioni e problemi. Roma, 1913. 8°, pp. 1-226.

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

# DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

## Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 15 dicembre 1918.*

F. D'Ovidio, Presidente.

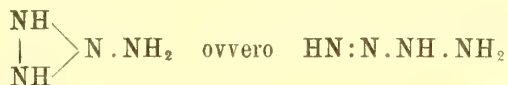
---

## MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

**Chimica.** — *Sulla formazione dell'acido azotidrico per ossidazione dell'idrazina.* Nota del Socio A. Angeli.

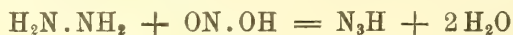
Solo recentemente, per causa dei frequenti ritardi che in questi ultimi anni si sono verificati nell'arrivo di alcuni periodici stranieri, ho potuto prendere visione di un lavoro di A. W. Browne ed O. R. Owerman, dell' Università di Ithaca N. Y. (¹), e di un altro di F. Sommer (²), che entrambi si riferiscono al meccanismo di formazione dell'acido azotidrico che si compie quando sopra l' idrazina si facciano reagire alcuni ossidanti nelle opportune condizioni.

Browne ed Owerman, richiamandosi ad alcune pubblicazioni anteriori, ammettono che in un primo tempo si formi un prodotto intermedio:

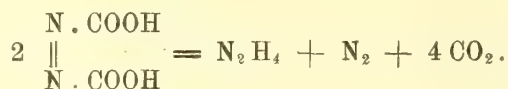
$$\begin{matrix} NH \\ | \\ NH \end{matrix} \!\!>\! N.NH_2 \quad \text{ovvero} \quad HN{:}N.NH.NH_2$$

i quali successivamente perdono ammoniaca con formazione di acido azotidrico. Secondo Sommer invece la formazione di questo acido sarebbe dovuta al fatto che una parte dell' idrazina viene ossidata ad acido nitroso il quale,

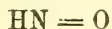
(¹) Journal Amer. Chem. Soc., *38*, 285 (1916).
(²) Zeit. für anorg. Chemie, *96*, 75 (1916).

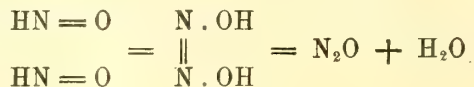
a sua volta reagirebbe con l'idrazina ancora presente secondo la reazione che io ho descritto per la prima volta 25 anni or sono [1]:

$$H_2N.NH_2 + ON.OH = N_3H + 2H_2O$$

Sommer asserisce anzi che « la comparsa di acido azotidrico nei processi di ossidazione dell'idrazina secondo il metodo di Browne e Shetterly rappresenta la miglior prova per dimostrare che durante il processo, come termine intermedio, si è formato acido nitroso ». Egli fonda questa sua interpretazione sul fatto che il gruppo amminico, in condizioni opportune, può venir ossidato ad acido nitroso, e che precisamente un tale processo di ossidazione dell'ammoniaca si verifica appunto coi reattivi che Browne e Shetterly impiegano per ottenere buoni rendimenti di acido azotidrico; la contemporanea formazione di ammoniaca, notata dai chimici americani, sarebbe dovuta, secondo Sommer, ad una ossidazione asimmetrica dell'idrazina stessa.

Io conoscevo bene i lavori eseguiti da Browne e dai suoi allievi, ma non mi sono mai occupato dell'ossidazione dell'idrazina; guidato però da alcune considerazioni teoretiche e da fatti sperimentali da me stabiliti per il caso dell'idrossilammina, per analogia ho preso in esame [2] anche il comportamento dei sali dell'acido azodicarbonico, scoperto molti anni or sono dal compianto J. Thiele [3]. Come ha trovato Thiele stesso, questo acido è instabilissimo e quando si cerca di metterlo in libertà subito si decompone nel senso rappresentato dall'eguaglianza:

$$2\ \begin{matrix} N.COOH \\ \| \\ N.COOH \end{matrix} = N_2H_4 + N_2 + 4\,CO_2 .$$

Siccome io ho dimostrato che la formazione dell'acido iponitroso e della sua anidride, il protossido di azoto, sono precedute dalla formazione del termine:

$$HN = O$$

che è instabile e tosto si polimerizza:

$$\begin{matrix} HN = O \\ \\ HN = O \end{matrix} = \begin{matrix} N.OH \\ \| \\ N.OH \end{matrix} = N_2O + H_2O$$

era da aspettarsi che anche l'acido azodicarbonico di Thiele, nelle opportune

[1] Gazzetta Chimica, *23*, II, 292 (1893).

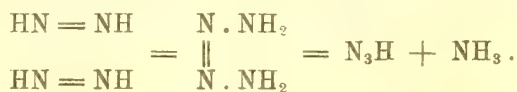
[2] Questi Rendiconti, *19* (1910), 2° sem., 94.

[3] Liebig's Annalen, *271*, 130.

condizioni, dovesse subire una serie di trasformazioni perfettamente analoghe; vale a dire che il termine intermedio:

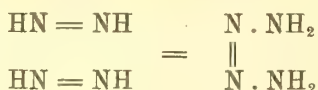
$$HN = NH$$

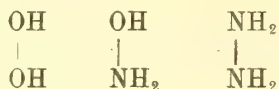
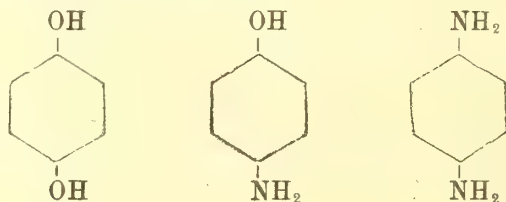
doveva essere in grado di fornire acido azotidrico ed ammoniaca:

$$\begin{matrix} HN = NH \\ HN = NH \end{matrix} = \begin{matrix} N . NH_2 \\ \| \\ N . NH_2 \end{matrix} = N_3H + NH_3 .$$

E l'esperienza mi ha subito dimostrato che il sale di Thiele, per azione dell'acido solforico diluito, fornisce immediatamente acido azotidrico ed ammoniaca. Ognuno vede che si tratta di un processo del tutto diverso, tanto da quello descritto da Browne ed allievi, che hanno sottoposta ad ossidazione l'idrazina, quanto anche da quello di Sommer, che invoca la formazione intermedia di acido nitroso: *io invece non mi sono mai occupato dell'ossidazione dell'idrazina e d'altra parte, non impiegando ossidanti, non posso nemmeno prendere in considerazione la formazione di acido nitroso.* Per questa ragione trovo alquanto strano quanto asseriscono Browne e Owerman a proposito della mia Nota. Essi dicono infatti: « questa Nota fu pubblicata un anno dopo della comparsa della nostra IV Memoria in cui si fa una dettagliata discussione teorica. Siccome nessuna citazione della teoria di Browne e Shetterly è fatta da Angeli, si deve ammettere che egli sia giunto indipendentemente da noi a questa conclusione ». Essi aggiungono inoltre che « la teoria di Angeli è identica a quella di Browne e Shetterly, secondo la quale l'ossidazione dell'idrazina con formazione di acido azotidrico ed ammoniaca, si spiega ammettendo che si formi un prodotto intermedio di condensazione. Una differenza fra le due teorie risiede nel fatto che Angeli ammette come termine intermedio il tetrazone, mentre gli A. ammettono il buzilene ovvero l'amminotriimmide ».

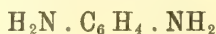
Ripeto: nell'esecuzione delle mie esperienze io sono stato guidato da considerazioni teoretiche che si riferiscono alle analogie di comportamento che presentano idrazina, idrossilammina ed acqua ossigenata e l'esperienza non ha fatto che confermare nel modo più completo tutto quanto io aveva preveduto; Browne ed i suoi allievi, invece, non hanno fatto altro che cercare di dare una spiegazione ad una reazione da essi trovata per caso, vale a dire la formazione dell'acido azotidrico per ossidazione dell'idrazina; le mie esperienze differiscono completamente da quelle dei chimici americani e l'analogia che essi riscontrano fra le mie e le loro considerazioni risiede esclusivamente nel fatto che per spiegare la formazione dell'acido azotidrico, che contiene tre atomi di azoto, dall'idrazina, che ne contiene due, essi devono necessariamente ammettere la formazione di un composto poliazotato intermedio, al quale non sanno ancora quale forma assegnare.

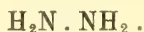
Che invece come termine intermedio si formi con tutta probabilità il tetrazone, conformemente a quanto io ho ammesso a suo tempo:

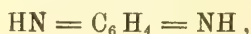
$$\begin{matrix} HN = NH \\ HN = NH \end{matrix} = \begin{matrix} N.NH_2 \\ \| \\ N.NH_2 \end{matrix}$$

trova una conferma nelle nuove considerazioni che ho esposte in una Nota che lo scorso anno ho presentato a questa Accademia (¹). In tale occasione, alle analogie di comportamento da me per la prima volta poste in rilievo, che presentano acqua ossigenata, idrossilammina ed idrazina:

$$\begin{matrix} OH \\ | \\ OH \end{matrix} \qquad \begin{matrix} OH \\ | \\ NH_2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} NH_2 \\ | \\ NH_2 \end{matrix}$$

io ho aggiunte le analogie di comportamento che fra di loro presenta un'altra classe di sostanze, che a prima vista non sembravano avere nessuna relazione con le precedenti: i biossibenzoli, gli amminofenoli e le diammine aromatiche in cui i gruppi sostituenti sono situati in posizione para ovvero orto:

Come ho posto in rilievo, anche in queste sostanze i gruppi sostituenti, sebbene sieno separati dall'anello aromatico, si comportano come se fossero congiunti direttamente fra di loro.

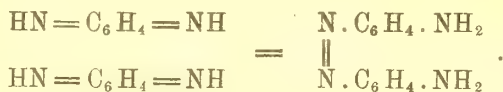
Per il caso particolare che ci riguarda consideriamo l'*o*-fenilendiammina:

$$H_2N.C_6H_4.NH_2$$

e confrontiamo il suo comportamento con quello dell'idrazina:

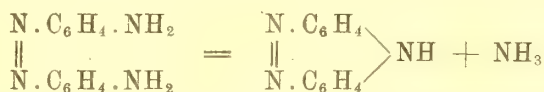
$$H_2N.NH_2 .$$

È noto che, come fanno tutte le diammine aromatiche orto e para, anche la prima per azione degli ossidanti fornisce la diimina:

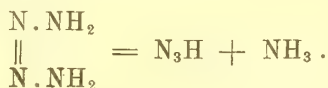
$$HN = C_6H_4 = NH ,$$

(¹) Questi Rendiconti, *26* (1917), 1° sem., pag. 480.

la quale, come hanno dimostrato le esperienze di Willstätter, ha una grande tendenza a polimerizzarsi per dare l' *o*-azoanilina (¹):

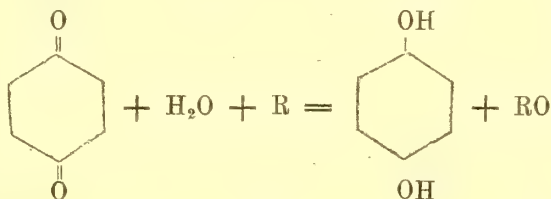
$$\begin{matrix} HN=C_6H_4=NH \\ HN=C_6H_4=NH \end{matrix} = \begin{matrix} N.C_6H_4.NH_2 \\ \| \\ N.C_6H_4.NH_2 \end{matrix}.$$

Ognuno vede che quest' ultima corrisponde al tetrazone da me ammesso per il caso dell' idrazina e non già al buzilene ovvero alla ammidotriimmide di Browne. Non solo, ma l'analogia si può spingere più avanti ancora, e così essa diventa completa per tutta la serie di trasformazioni e comprende ogni particolare.

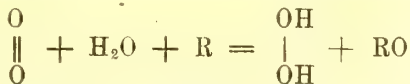
È noto infatti che anche l' *o*-azoanilina può perdere una molecola di ammoniaca:

$$\begin{matrix} N.C_6H_4.NH_2 \\ \| \\ N.C_6H_4.NH_2 \end{matrix} = \begin{matrix} N.C_6H_4 \\ \| \\ N.C_6H_4 \end{matrix}\!\!>NH + NH_3$$

e la reazione, come ognuno vede, corrisponde perfettamente a quella che conduce all'acido azotidrico:

$$\begin{matrix} N.NH_2 \\ \| \\ N.NH_2 \end{matrix} = N_3H + NH_3 .$$

Queste considerazioni permettono di chiarire anche la scissione della diimmide osservata da Thiele; come si è già accennato, questo eminente chimico ha trovato che l'acido azodicarbonico si scompone con formazione di idrazina e sviluppo di azoto ed anidride carbonica: evidentemente si tratta di un processo correlativo di ossidazione e riduzione, ed io ho trovato infatti che tanto l'acido azodicarbonico come anche le chinondiimidi possono agire anche da ossidanti.

Anche la formazione dell' idrochinone, durante i processi di ossidazione determinati dal chinone:

$$C_6H_4O_2 \text{ (O}=\langle\ \rangle=\text{O)} + H_2O + R = C_6H_4(OH)_2 \text{ (HO}-\langle\ \rangle-\text{OH)} + RO$$

corrisponde perfettamente a quella dell'acqua ossigenata:

$$\begin{matrix} O \\ \| \\ O \end{matrix} + H_2O + R = \begin{matrix} OH \\ | \\ OH \end{matrix} + RO$$

che si forma spesso durante le ossidazioni che si compiono in presenza di ossigeno.

(¹) Berliner Berichte, *38* (1905), 2350.

## Chimica-fisica. — *Sui limiti di esistenza dello stato liquido.* Nota del Corrisp. G. Bruni.

Nel fascicolo 3-4 della Zeitschr. f. Elektrochemie di quest'anno (vol. *24*, pp. 48-50, 1° febbraio 1918) W. Herz ha esposto alcune considerazioni sui limiti di esistenza dello stato liquido ed ha creduto di poter trarre alcune considerazioni che sembrano assai poco fondate.

Herz definisce il campo d'esistenza dello stato liquido come l'intervallo di temperatura compreso fra il punto di fusione ed il punto critico, e crede di averlo così definito in modo univoco. Egli si propone poi di ricercare le relazioni che passano fra questo intervallo $T_{cr} - T_f$ da un lato, e il peso atomico degli elementi dei singoli gruppi del sistema periodico, od il peso molecolare di composti della stessa serie dall'altro. Calcola perciò il detto intervallo per 22 elementi appartenenti a 7 diversi gruppi del sistema e, poichè per molti di questi il punto critico non è sperimentalmente determinato, lo deduce dalla nota regola di Guldberg e Guye secondo la quale sarebbe

$$T_{cr} = \frac{3}{2} T_{eb} ,$$

dove $T_{eb}$ è la temperatura di ebollizione a pressione ordinaria [1].

Egli trova così che l'intervallo fra il punto di fusione e quello critico va crescendo col peso atomico pei metalloidi e va invece diminuendo coi metalli.

Estende poi questa ricerca ai composti idrogenati ed alogenati di alcuni metalloidi e trova confermata questa regola, salvo alcune eccezioni che spiega colla polimerizzazione dei composti relativi (acqua, ammoniaca). Inoltre trova pure un aumento regolare del suddetto intervallo col numero degli atomi di carbonio in alcune serie organiche.

Finalmente ripigliando in considerazione una pretesa regola enunziata nel 1896 dal Clarke (Amer. Chem. Journ., *18*, 618) secondo cui dovrebbe essere $\frac{T_{cr}}{T_f} = \text{cost}$, trova che, pur non avendosi una sostanza vera e propria, il quoziente ora detto mostra « una non disconoscibile tendenza alla costanza ».

Nel fascicolo 9-10 della medesima rivista (pp. 138-139, 1° maggio 1918) Jul. Meyer osserva che il campo di esistenza dello stato liquido non si può

[1] S'intende che tutte le temperature sono temperature assolute.

ritenere definito in modo univoco dall'intervallo fra punto di fusione e punto critico, poichè lo stato liquido può esser prolungato al disotto del punto di fusione e perchè, inoltre, quasi tutti i corpi presentano varie modificazioni polimorfiche che hanno punti di fusione diversi e non vi è ragione di prendere come limite l'uno piuttosto che l'altro di questi. Inoltre è discutibile se il punto critico si possa sempre ritenere come il limite superiore dello stato liquido, cosicchè il campo di esistenza di questo può dirsi indeterminato.

Herz risponde (pag. 139, medesimo fascicolo) ammettendo l'esattezza delle obbiezioni di J. Meyer in sè, ma osservando che, tanto i fenomeni di sopraraffreddamento, quanto quelli di fusione delle forme polimorfiche labili, sono fenomeni « anormali » e che le regolarità da lui trovate si riferiscono a condizioni « normali » e per queste conservano la loro validità.

Questa risposta sembra assai poco soddisfacente. Perchè l'esistenza del liquido al disotto del punto di fusione e i punti di fusione di forme polimorfiche metastabili debbano esser considerate come « anormali » e come tali escluse dal calcolo del campo di esistenza dello stato liquido, non è chiaro. È ben noto che le curve rappresentanti le proprietà fisiche del liquido in fusione della temperatura si prolungano al disotto del punto di fusione in modo perfettamente regolare e continuo e che pertanto nei liquidi soprafusi non vi è nulla che indichi una « anormalità » di stato, che converrebbe definire in modo preciso. « Instabilità » e « anormalità » non sono per nulla termini equivalenti.

I punti di fusione di varie possibili modificazioni polimorfiche nascono dall'incontro delle curve delle tensioni di vapore di queste colla corrispondente curva del liquido. Cosicchè non è rigoroso parlare del punto di fusione di un individuo chimico in sè, ma ha ragione Jul. Meyer quando afferma che il punto di fusione (anzi sarebbe più esatto dire *un* punto di fusione) è per così dire un punto casuale nel campo dello stato liquido, in cui questo coesiste in equilibrio con una determinata forma liquida.

Questo fatto può avere un'influenza non indifferente nel calcolo dei rapporti studiati da Herz perchè i punti di fusione delle forme labili sono tutti più bassi di quelli delle stabili, e cioè tendono ad allargare il campo di esistenza del liquido, e per certi corpi si hanno differenze di parecchie decine di gradi [p. es. pel benzofenone 22° (1), per l'acido picrilsolfonico 85°] (2).

Ma vi è poi un fatto che è sfuggito, sia a Herz, sia anche a Meyer, il quale fa sì che, anche rimanendo strettamente nel campo dei fenomeni stabili, il punto di fusione propriamente detto (punto triplo solido-liquido

(1) Tammann, Zeitschr. f. physik. Ch., *29*, 51 (19).

(2) Journ. f. prakt. Ch. [2], *32*, 119 (1885).

vapore) non delimita lo stato liquido verso il basso. Questo fatto ben noto è la variazione del punto di fusione col variare della pressione.

Per l'acqua e per qualche altro corpo (bismuto) il punto di fusione si abbassa col crescere della pressione, ed è noto dalle ricerche di Tammann che per l'acqua si arriva a $-22°$ per 2200 atmosfere.

Per la massima parte dei corpi il punto di fusione si innalza dapprima colla pressione, non però proporzionalmente a questa, poichè, mentre $\frac{dT}{dp}$ è positivo, $\frac{d^2T}{dp^2}$ è negativo. La curva raggiunge un massimo di temperatura $\left(\frac{dT}{dp}=0\right)$ dopo il quale, continuando a crescere la pressione, il punto di fusione decrescerebbe nuovamente, ossia diventerebbe negativo $\frac{dT}{dp}$, rimanendolo anche $\frac{d^2T}{dp^2}$, cosicchè è ammissibile che ad altissime pressioni la temperatura di fusione ritorni inferiore a quella del punto triplo.

Da questi fatti Tammann [1] ha tratto la sua nota teoria secondo la quale il campo di esistenza dello stato solido sarebbe limitato da una curva chiusa, ossia il campo del liquido si estenderebbe addirittura fino allo zero assoluto.

Questa teoria non è stata generalmente ammessa nella sua integrità, poichè essa ci condurrebbe ad ammettere oltre ai due quadranti di curva già accennati e sperimentalmente constatati, altri due in cui il calore di fusione diverrebbe negativo. Bakhuis Roozeboom [2] ha proposto una modificazione o restrizione, ammettendo la esistenza dei soli due primi quadranti, ma prolungando il secondo sino allo zero assoluto.

Dal punto di vista dei fenomeni che si considerano qui, questa teoria, più verosimile di quella di Tammann, le equivale. Ossia il campo *stabile* dello stato liquido comprende l'intera zona delle temperature dallo zero assoluto fino al punto critico.

Le regolarità che Herz pretende di osservare si ridurrebbero cioè alla constatazione ovvia che nella maggior parte dei gruppi del sistema periodico e delle serie omologhe sia inorganiche che organiche la temperatura critica va aumentando col crescere del peso atomico o molecolare, salvo per alcuni gruppi di metalli per i quali si ha il contrario.

Quanto alla « non disconoscibile tendenza alla costanza » del rapporto $\frac{T_{cr}}{T_f}$, ossia alla pretesa regola di Clarke, le conclusioni di Herz sono ancora più arrischiate. Egli non ha potuto considerare che 22 elementi (esattamente

[1] Zeitschr. physik. Ch., *21*, 17 (1896), e in numerose altre pubblicazioni successive.
[2] *Die heterogene Gleichgewichte*, Heft 1, pp. 92-93 (1901).

un quarto degli 88 conosciuti); per essi il rapporto in questione varia fra 1,87 e 7,55. Dei 22 valori singoli, *uno* è inferiore a 2, *dodici* stanno fra 2 e 3, *due* fra 3 e 4, *sette* fra 4 e 5 e *uno* è superiore a 7. Per scoprire in questo quadro una sicura tendenza alla costanza bisogna essere invero di facile contentatura! Caso mai si potrebbe dire che i valori tendano ad addensarsi in due gruppi attorno ai valori 2, 5 e 4, 5.

Si noti poi che dei 22 punti critici solo 8 sono determinati sperimentalmente, mentre gli altri 14 sono dedotti dai punti di ebullizione in base alla regola di Guldberg e Guye. Pare quindi che fosse inutile scomodare il punto critico e che fosse preferibile limitarsi a considerare empiricamente le relazioni fra punto di fusione e punto di ebollizione a pressione ordinaria. Poichè, ammettendo valida la regola di Guldberg-Guye, se fosse $\frac{T_{cr}}{T_f} = C$, dovrebbe essere $\frac{T_{eb}}{T_f} = \frac{2}{3} C$, ossia anche questo rapporto dovrebbe essere costante.

E che ciò non sia in generale, nemmeno nell'interno di certe serie omologhe, sanno già gli studenti di Chimica organica i quali imparano anche nei trattati elementari [1] che in alcune serie (p. es. in quella degli acidi grassi) i punti di ebollizione crescono regolarmente col crescere del numero degli atomi di carbonio, mentre i punti di fusione seguono due andamenti diversi secondo che gli atomi di carbonio sono in numero pari o dispari e ognuna di queste due curve prima scende, poi dopo un minimo tende a salire.

Si può dunque concludere che le deduzioni di Herz non hanno alcuna portata teorica, e come constatazioni empiriche, o non sono esatte, o non aggiungono nulla a ciò che si sapeva.

## Matematica. — *Il metodo di sommazione di Eulero e la moltiplicazione delle serie.* Nota di GUSTAVO SANNIA, presentata dal Socio ENRICO D'OVIDIO.

Fra i varî metodi di sommazione delle serie, il *metodo di Cesàro* e il *metodo di Borel generalizzato* [2] sono importanti, principalmente perchè alle serie sommabili con essi è applicabile *incondizionatamente* la regola di Cauchy per la moltiplicazione. Infatti: se due serie

$$(1) \qquad u_0 + u_1 + u_2 + \cdots , \quad v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$$

sono sommabili col metodo di Cesàro (col metodo di Borel generalizzato) ed

(1) Holleman, *Trattato di Chimica organica*, 2ª ed. pp. 96-97, fig. 28.

(2) Che ho esposto ed applicato in varî recenti lavori.

hanno per somma $u$ e $v$ rispettivamente, la serie-prodotto

$$(2) \qquad u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_1) + \cdots$$

è *sempre* sommabile con lo stesso metodo ed ha per somma $uv$.

Orbene vi è un terzo metodo che gode della stessa proprietà, ed è il più antico metodo di sommazione delle serie divergenti.

Una serie

$$(3) \qquad u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

è *sommabile col metodo di Eulero* ed ha per *somma* $u$ quando la serie di potenze $\Sigma u_n x^n$ è convergente per $|x| < 1$ (ed allora lo è assolutamente) ed esiste ed è finito il numero

$$(4) \qquad u = \lim_{x=1-0} \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n .$$

Ora sussiste il teorema:

*Se due serie* (1) *sono sommabili col metodo di Eulero ed hanno per somma $u$ e $v$ rispettivamente, anche la serie-prodotto* (2) *è sommabile col metodo di Eulero ed ha per somma $uv$.*

Infatti, giusta l'ipotesi e la definizione precedente, si ha che, per ogni $x$ il cui modulo sia minore di 1, le due serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n \, , \; \sum_{n=0}^{\infty} v_n x^n$$

sono convergenti assolutamente e quindi moltiplicabili con la regola di Cauchy, dando luogo ad una serie anche assolutamente convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n \times \sum_{n=0}^{\infty} v_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0) x^n .$$

Da ciò e dall'ipotesi

$$\lim_{x=1-0} \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = u \; , \; \lim_{x=1-0} \sum_{n=0}^{\infty} v_n x^n = v$$

segue che

$$\lim_{x=1-0} \sum_{n=0}^{\infty} (u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0) x^n = uv \, ,$$

e quindi che la serie (2) è sommabile col metodo di Eulero ed ha per somma $uv$.

Come si vede, la dimostrazione è ben semplice. È poi quasi evidente che tutte le altre proprietà aritmetiche delle serie convergenti valgono per

le serie sommabili col metodo di Eulero; sicchè questo metodo è, non solo aritmeticamente perfetto, ma anche di rapida e facile esposizione [1].

Osservo infine che esso si può anche fondare partendo da quello stesso principio (di media baricentrica delle somme $U_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$) sul quale sono fondati i metodi di Cesàro e di Borel (originario o generalizzato). Perchè, essendo

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} U_n x^n = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (U_n - U_{n-1}) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n ,$$

la definizione (4) del numero $u$ equivale all'altra

$$u = \lim_{x=1-0} \frac{U_0 + U_1 x + U_2 x^2 + \cdots}{1 + x + x^2 + \cdots} .$$

## Matematica. — *Sul numero delle partizioni d'un numero in potenze di* 2. Nota di Alberto Tanturri, presentata dal Corrispondente G. Peano.

In una Nota della R. Accad. delle Scienze di Torino (1° dic. 1918), alla quale si riferiscono tutte le citazioni della Nota presente, ho, per ogni numero naturale $n$, indicato con $D_n$ il numero della partizioni di $n$ in potenze di 2, anche uguali fra loro; e, poi, per ogni intero $p$, con $D(2^p, n)$ il numero di esse partizioni che han $2^p$ come elemento massimo: e, partendo da una formula di Eulero, ho scritto diverse proprietà di essi due numeri, e, per es., che è noto il primo quando si conosca il secondo. Di questo secondo accenno ora, per sommi capi, a uno studio un po' ampio; riducendomi, nel num. 1, al caso in cui $n$ è un multiplo di $2^p$, e trattando poi questo caso.

1. Le (24'), (25') e (26') dànno:

I $\quad n\varepsilon 2 + N_0 \cdot \supset \cdot D(2, n) = D[2, 2E(n/2)]$ ;

II $\quad n\varepsilon 4 + N_0 \cdot \supset \cdot D(4, n) = D[2, 2E(n/4)]\, D(2, n) - D[4, 4E(n/4)]$ ;

III $\quad n\varepsilon 8 + N_0 \cdot \supset \cdot D(8, n) = D[2, 2E(n/8)]\, D(4, n) - D[4, 4E(n/8)]\, D(2, n) + D[8, 8E(n/8)]$ .

In generale si dimostra la formula:

IV. $\quad p\varepsilon N_1 \cdot n\varepsilon 2^p + N_0 \cdot q = E(n/2^p) \cdot \supset \cdot D(2^p, n) = \Sigma[(-1)^{i-1} D(2^i, 2^i q)\, D(2^{p-i}, n) \mid i, 1 \cdots p]$ .

[1] Ed è anche più potente del metodo di Cesàro, perchè tutte le serie sommabili con questo metodo sono pure sommabili con esso. Ciò segue da un teorema di Bromwich (*An introduction to the theory of infinite series*, n. 123).

Sostituzioni successive daranno:

II' $n \varepsilon 4 + N_0 \cdot \mathrm{Ɔ} \cdot D(4, n) = D[2, 2E(n/4)]\, D[2, 2E(n/2)] - D[4, 4E(n/4)]$;

III' $n \varepsilon 8 + N_0 \cdot \mathrm{Ɔ} \cdot D(8, n) = D[2, 2E(n/8)] \times D[2, 2E(n/4)] \times D[2, 2E(n/2)]$

$\quad - \quad$ » $\quad \times D[4, 4E(n/4)]$

$\quad - D[4, 4E(n/8)] \quad \times \quad$ »

$\quad + D[8, 8E(n/8)]$; ecc.

Ed ecco il risultato generale. « Risolvo l'equazione:

$$i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_p = p, \tag{1}$$

con le condizioni: *a*) $i_1$ è un $N_1$, e gli altri $i$ sono degli $N_0$; *b*) per ogni $1 \cdots p, r$, il massimo valore di $i_r$ è $p - r + 1$; *c*) se, per $p > 1$, $i_r$ è un $2 \cdots p, k$, si prenderanno nulli i $k - 1$ numeri $i$ immediatamente seguenti, cioè i numeri $i_{r+1}, i_{r+2}, \ldots, i_{r-k+1}$. Indicando allora, per ciascuna soluzione, con num $i$ il numero degli $i$ diversi da zero,

$$D(2^p, n) = \Sigma(-1)^{p - \mathrm{num}\, i} D[2^{i_1}, 2^{i_1} E(n/2^p)]\, D[2^{i_2}, 2^{i_2} E(n/2^{p-1})] \ldots$$
$$\ldots D[2^{i_p}, 2^{i_p} E(n/2)],$$

estesa a tutte le soluzioni della (1) ». Queste soluzioni sono $2^{p-1}$; come si dimostra osservando che, per es., dalle 4 soluzioni:

1 1 1 , 1 2 0 , 2 0 1 , 3 0 0,

della $i_1 + i_2 + i_3 = 3$, con le due operazioni da farsi su ciascuna:

aggiunta di un ultimo elemento 1;

aumento di 1 dell' ultimo elemento non nullo, e poi aggiunta di un ultimo elemento 0;

si hanno tutte le soluzioni della $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 4$; le quali sono dunque 8, e, precisamente, le:

1 1 1 1 , 1 2 0 1 , 2 0 1 1 , 3 0 0 1,

1 1 2 0 , 1 3 0 0 , 2 0 2 0 , 4 0 0 0.

2. Veniamo al numero $D(2^p, 2^p k)$. In virtù della (18):

V $p \varepsilon N_1 \cdot k \varepsilon 1 + N_1 \cdot \mathrm{Ɔ} \cdot D(2^p, 2^p k) = D[2^p, 2^p(k-1)] +$
$+ D[2^{p-1}, 2^{p-1}(2k-1)]$.

La ricerca delle funzioni $D(2, 2k)$, $D(4, 4k)$, $D(8, 8k)$, ..., è dunque un problema di differenze finite; trattandosi di trovare una successione: $f_1 k$, $f_2 k$, $f_3 k$, ..., di funzioni di $k$, tali che la prima differenza, $f_p k - f_p(k-1)$, di ciascuna, per il valore generico $k$, sia data dalla funzione precedente,

per il valore $2k-1$. Per i primi casi si ha subito:

VI $k \varepsilon N_1 \cdot Ɔ \cdot$

$$D(2\,,2k)=C(k\,,1)=k\,.$$
$$D(4\,,4k)=C(k\,,2)+\ \ C(k+1\,,2)=k^2\,.$$
$$D(8\,,8k)=C(k\,,3)+\ \ 6C(k+1\,,3)+$$
$$+C(k+2\,,3)=C(2k+1\,,3)=k(4k^2-1)/3\,.$$
$$D(16\,,16k)=C(k\,,4)+\ \ 31C(k+1\,,4)+\ \ 31C(k+2\,,4)+$$
$$+C(k+3\,,4)=k^2(8k^2-5)/3\,.$$
$$D(32\,,32k)=C(k\,,5)+196C(k+1\,,5)+\ \ 630C(k+2\,,5)+$$
$$+196C(k+3\,,5)+C(k+4\,,5)\,;$$

essendo C l'ordinario simbolo delle combinazioni. Ed ecco il risultato generale. « Si definisca una funzione $M(p\,,q)$, di $p$ e $q$, ponendo:

VII
$$\begin{cases} M(0\,,0)=1 \\ q\varepsilon N_1 \cdot Ɔ \cdot M(0\,,q)=0 \\ p\varepsilon N_1 \cdot q\varepsilon N_0 \cdot Ɔ \cdot M(p\,,q)= \\ \qquad =\Sigma[C\ p+1\,,q-i)\ M(p-1\,,2i)\,|\,i\,,0\cdots p-1] \quad \text{Def.}\,; \end{cases}$$

e si avrà la formula:

VIII
$$p_1 k \varepsilon N_1 \cdot Ɔ \cdot D(2^p\,,2^p k)=$$
$$=\Sigma[M(p-1\,,2i)\ C(k+i\,,p)\,|\,i\,,0\cdots p-1]$$ » [1].

Diamo i valori di M corrispondenti ai primi valori di $p$ e $q$; nei posti vuoti si sottintendono degli zeri.

| M | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 ... $q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | |
| 1 | 1 | 2 | 1 | | | | | |
| 2 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | |
| 3 | 1 | 10 | 31 | 44 | 31 | 10 | 1 | |
| 4 | 1 | 36 | 196 | 476 | 630 | 476 | 196 | 36 |
| 5 | 1 | 202 | 1821 | 6936 | 14562 | 18492 | 14562 | 6936 |
| 6 | 1 | 1828 | 27330 | 154772 | 473327 | 891976 | 1095836 | 891976 |
| ⋮ | | | | | | | | |
| $p$ | | | | | | | | |

(1) La dimostrazione, tratta, per induzione, dalla V, dà i teoremi d'aritmetica:

1) $t\varepsilon N_0\ \ n\varepsilon 0\cdots t \cdot Ɔ \cdot \Sigma[(-1)^i\,C(t+1\,,n+i)\,C(t+i\,,i)\,|\,i\,,0\cdots t+1-n]=0,$

2) $m\varepsilon N_0 \cdot n\varepsilon -m+1+N_0\ \ Ɔ \cdot C(m+1\ n)=$
$$\Sigma\left\{(-1)^i\,C(m+n-2i\,,m)\,C(m+1\,,i)\,|\,i\,,0\cdots E[(n+3)/2]\right\};$$

il secondo dei quali suppone che, se $n$ è un $N_1$: $a)$ $\Sigma(fi\,|\,i\,,0\cdots -n)=f0$, qualunque sia la funzione $fi$ di $i$, definita per $i=0$; $b)$ $C(p\,,-n)=0$, qualunque sia l'$N_0 p$. Quest'ultima convenzione si farà valere sino alla fine di questo scritto.

3. La VIII, contenendo solo i numeri $M(p-1, 2i)$, farebbe apparire ingombrante l'introduzione degli M col secondo indice dispari. Ma, prima di tutto, quest'ultimi M compaiono nella formula:

$$\text{IX} \quad p\varepsilon 1 + N_1 \cdot k\varepsilon N_1 \cdot \supset \cdot D[2^p, 2^{p-1}(2k+1)] =$$
$$= \Sigma[M(p-1, 2i-1)\, C(k+i, p) | i, 1 \cdots p-1].$$

E gli uni e gli altri si presentano insieme in alcune « tavole di somma »; costruite con la legge del triangolo aritmetico: « ogni elemento interno è somma del sovrapposto e del precedente questo nella sua orizzontale ». Per l'appunto, con tavole di somma aventi uguali a 1 tutti i numeri delle prime verticali, dai numeri $M(p-1, 2i)$ del rigo $p^{mo}$ della tabella precedente, si ottengono, al $(p+2)^{mo}$ rigo, tutti i numeri $M(p, i)$ del rigo $(p+1)^{mo}$; e le tavole:

```
1              1  1              1   6   1
1  1           1  2  1           1   7   7   1
1  2  1 ,      1  3  3  1        1   8  14   8   1
               1  4  6  4  1 ,   1   9  22  22   9   1
                                 1  10  31  44  31  10  1 ,
```

lo dimostrano per $p = 1$, a 2 e a 3. La dimostrazione genarale, per induzione, è basata su una proprietà delle tavole di somma, che si può leggere nel Bertrand-Betti, *Algebra elementare* (v. eserc. 12° della pag. 199, 1862); e in virtù della quale, per es., l'elemento $i^{mo}$ dell'ultimo rigo dell'ultima tavola è dato, per $i$ da 0 a 7, da $C(4, i-1) \times 1 + C(4, i-2) \times 6 + C(4, i-3) \times 1$, cioè da $M(3, i)$. Come conseguenza immediata, in una stessa orizzontale, di indice $p$ qualunque, della tabella degli M: *a*) due M equidistanti dagli estremi son sempre uguali; *b*) la somma di tutti gli $M = 2 \wedge [p(p+1)/2 + 1]$. Si potrebbero dedurre le formule:

$$\text{X} \qquad p\varepsilon N_0 \cdot i\varepsilon 0 \cdots p \cdot \supset \cdot M(p, 2i) = M(p, 2p-2i),$$
$$\text{XI} \qquad \text{"} \quad \cdot \supset \cdot \Sigma[M(p, 2i) | i, 0 \cdots p] = 2 \wedge p(p+1)/2,$$

affermanti teoremi dello stesso tipo per gli M di secondo indice pari; ma esse si stabiliscono già nel corso della dimostrazione della VIII, e anche direttamente.

4. Chiudiamo con una nuova proprietà dei numeri M. Osservo che:

$$q\varepsilon 0 \cdots 4 \cdot \supset \cdot M(2, q) = C(4, q),$$
$$q\varepsilon 0 \cdots 6 \cdot \supset \cdot M(3, q) = C(6, q) + 2^2 \times 1 \times C(4, q-1),$$
$$q\varepsilon 0 \cdots 8 \cdot \supset \cdot M(4, q) = C(8, q) + 2^2 \times 7 \times C(6, q-1),$$
$$q\varepsilon 0 \cdots 10 \cdot \supset \cdot M(5, q) = C(10, q) + 2^2 \times 48 \times C(8, q-1) +$$
$$+ 2^4 \times 15 \times C(6, q-2), \text{ ecc.};$$

ed enuncio il risultato generale. « Si definisca una funzione $N(p, q)$, di $p$ e $q$, ponendo:

$$\text{XII}\quad \begin{cases} N(0, 0) = 1 \\ q \varepsilon N_1 \cdot \supset \cdot N(0, q) = 0 \\ p \varepsilon N_1 \cdot q \varepsilon N_0 \cdot \supset \cdot N(p . q) = \\ \qquad = \Sigma [2^i C(p+1-i, 2q-i) N(p-1, i) | i, 0 \cdots 2q] \ \text{Def.}; \end{cases}$$

e si avrà la formula:

$$\text{XIII}\quad p \varepsilon N_1 \cdot q \varepsilon 0 \cdots 2p \cdot \supset \cdot M(p, q) =$$
$$= \Sigma \{ 2^{2i} C(2p-2i, q-i) N(p-2, i) | i, 0 \cdots E[(p-1)/2] \} ».$$

Fisica. — *Forze elettromotrici unidirezionali generate fra due punti dell'asse di un cilindro di bismuto rotante in un campo magnetico* [1]. Nota di G. C. TRABACCHI, presentata dal Corrispondente O. M. CORBINO.

1. Se si fa rotare un conduttore in un campo magnetico qualsiasi, non è possibile che fra due punti dell'asse di rotazione si determini una differenza di potenziale costante, perchè, come è noto [2], *non si possono ottenere f. e. m. costanti per virtù di movimento senza ricorrere a contatti striscianti su cerchi di raggio differente da zero.*

Se però il conduttore è costituito da bismuto, la cui resistenza muta notevolmente per azione del campo magnetico, si possono immaginare speciali configurazioni di campo e opportune forme da dare al conduttore, in modo che le periodiche variazioni di resistenza determinate durante la rotazione per azione del campo stesso abbiano come conseguenza una differenza costante di potenziale fra due punti del conduttore.

2. Consideriamo un caso abbastanza semplice: se si prende un involucro cilindrico di bismuto chiuso da due basi piane metalliche e lo si fa rotare tra i centri di dette basi in un campo magnetico avente la configurazione rappresentata dalla fig. 1, poichè in ogni momento la resistenza della porzione del cilindro compresa tra il piano $XY$ e la espansione polare $N$ ha un valore superiore a tutte le rimanenti parti per il fatto che il campo a cui essa è sottoposta è più intenso che altrove, saranno realizzate le particolari condizioni a cui si accennava e per le quali si potrà

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto Fisico della R. Università di Roma.

[2] H. Poincaré, *L'Eclairage électrique*, tom. XXIII, pag. 41, 1900.

determinare, fra gli estremi dell'asse di rotazione, una differenza di potenziale, il cui valore e il cui senso dipenderanno dalla velocità e dal senso di rotazione, come pure dalla intensità e dal senso del campo.

3. Per verificare con l'esperienza tale previsione ho usato un cilindro cavo di bismuto del diametro di mm. 40 e dell'altezza di mm. 25; lo spessore dell'involucro cilindrico era di mm. 2; le basi metalliche erano di ottone e portavano i fori destinati alle punte, fra le quali il sistema poteva essere messo in rotazione per mezzo di una puleggia a gola, fissata a una delle basi stesse.

Il campo magnetico era prodotto da una grande elettrocalamita di Weiss, le cui espansioni polari erano (fig. 1) una piana e di mm. 100 di diametro

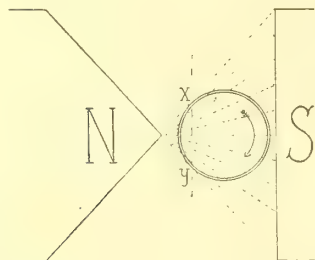
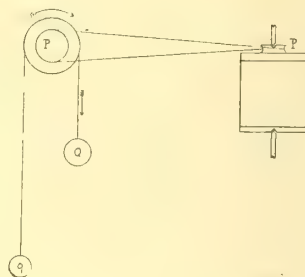



Fig. 1. Fig. 2.

e l'altra foggiata a cuneo; lo spigolo di questo era disposto in modo da essere parallelo alle generatrici del cilindro e distava dal piano dell'altra espansione di mm. 45. La intensità del campo presso l'orlo della espansione cuneiforme era di circa 5000 Gauss.

Rilegate ad un galvanometro le punte di sostegno del cilindro, questo veniva posto in rotazione con una velocità di circa 5 giri per minuto secondo; si riscontrò che effettivamente tra gli estremi dell'asse si destava una f. e. m., il cui valore era, in queste condizioni, di circa 300 microvolta.

4. Un tale generatore deve essere invertibile, e cioè, quando il cilindro viene attraversato lungo le sue generatrici da una corrente continua, mentre è sottoposto all'azione del campo, si deve sviluppare una coppia costante, il cui valore e il cui senso dipenderanno naturalmente dalla intensità e dal senso della corrente e del campo impiegati.

Poichè, nel caso da me sperimentato, per ottenere una coppia capace di vincere gli attriti meccanici e magnetici, sarebbe stato necessario di fare attraversare il cilindro da una corrente eccessivamente intensa, mi sono servito di un artificio per rivelare l'esistenza della coppia suddetta.

La puleggia $P$ (fig. 2), calettata sull'asse del cilindro, veniva collegata mediante una funicella ad un'altra puleggia $P'$, che era messa in movimento

da un sistema di pesi $Qq$, regolati in modo da imprimere al cilindro, che si trovava nel campo, un lento movimento di rotazione; in queste condizioni era possibile vedere molto nettamente l'azione della corrente che attraversava il cilindro lungo le sue generatrici: quando la corrente aveva un certo senso, il moto veniva accelerato, mentre, invertendola, si arrestava del tutto.

Naturalmente a campo invertito si ripetevano le stesse vicende, ma a rovescio.

## Vulcanologia. — *Calcoli sulla combustione dell'idrogeno. Confronto cogli esplosivi ordinarii.* Nota II di VENTURINO SABATINI, presentata dal Socio VIOLA.

Con qualche esempio potremo renderci conto dell'entità delle esplosioni vulcaniche per combustione dell'idrogeno.

Il volume normale di $\frac{1}{9}$ cg d'idrogeno è 1240 l, che bruciano in $\frac{8}{9}$ cg d'ossigeno con un volume normale di 620 l, in tutto 1860 l normali, emettendo 3233 ca. Se questo miscuglio esplodesse nell'interno della lava a profondità di 50 m, a pressione di 15 at e a temperatura di 1500°, il calore emesso sarebbe $Q = 2811$ ca [1]. Il volume normale del miscuglio prima dello scoppio è $v_e = 805$ l. Supposto costante il coefficiente di dilatazione del vapor d'acqua, e, calcolata a 3000° la temperatura di esplosione in corrispondenza dell'abbassamento del potere calorifico dell'idrogeno, il volume $v_e$ dopo lo scoppio, tenuto conto della contrazione di un terzo nel volume del vapor d'acqua in cui si trasforma, prende un valore iniziale otto volte maggiore divenendo $v_i = 6444$ l. La pressione diventa $P = 15 \times 8 = 120$ cg per cmq, la forza dell'esplosione o pressione specifica $f = 96\,720$ cg per cmq, e quindi il volume del vapore prodotto a 0° e 760$^{mm}$ diviene $v_0 = 5514$ l. Con esplosione a 100$^m$ o a 500$^m$ di profondità, con pressione rispettivamente di 30 o 150 at e temperatura di 2000° o 2500°, analogamente al caso precedente si ha:

$$v_e = 516\,,\ = 126\,;\quad v_i = 4128\,,\ = 1128\,;\quad P = 240\,,\ = 1200\,;$$
$$f = 123\,840\,,\ = 151\,200\,.$$

Non è il caso di approssimare maggiormente questi calcoli che presentano grandi incertezze [2]. Il più importante dei dati ottenuti precedente-

[1] Il potere calorifico dell'idrogeno è di ca 29 050, 25 300, 18 550 rispettivamente a 0°, 2000°, 4000°. Quindi per $\frac{1}{9}$ cg dello stesso gas si avrebbero nei tre casi 3328, 2811, 2061 ca (Moissan, loc. cit., I, 241)

[2] P. F. Chalon, *Les explosifs modernes*, Paris et Liège, Béranger, 1911, pag. 443.

mente è quello che indica lo *spostamevto di massa prodotto dall'esplosivo considerato* nella lava, quando in essa avviene l'esplosione. Ma tale spostamento non è dato dalla differenza $v_i - v_e$ come negli esplosivi ordinarii, in cui però $v_e$ è trascurabile, sebbene da $v_i$. Difatti il volume $v_e$ s'incorpora lentamente nella lava prima dell'esplosione, o almeno in parte può nella lava preesistere, mentre la dilatazione $v_i$ si produce bruscamente dopo la esplosione, e da sola rappresenta il detto spostamento. La sua efficacia dipende dalla velocità dell'onda esplosiva, che per l'idrogeno è di 2810 m al 1″ [1]. Praticamente quindi queste esplosioni sono istantanee possedendo la caratteristica degli effetti frantumanti che si manifestano nella seconda fase. La velocità dell'onda esplosiva per l'idrogeno è superiore a quella delle altre miscele detonanti, ed è comparabile a quella di molti esplosivi solidi dell'industria [2]. Ma il dato più serio in quanto ad esattezza di determinazione è il lavoro prodotto dall'esplosivo, e che, col potere calorifico corrispondente ai pressi di 2000°, è A = 1 200 000 cgm, pari all'effetto distruttore di un proiettile di 266 cg lanciato con velocità di 300 m; o pari allo sforzo per sollevare lo stesso proiettile a ch 4,5; o per sollevare un quintale a 12 ch. [3]. Anche considerando una perdita di un terzo per effetti calorifici, e per urti in basso e lateralmente, rimane un effetto utile considerevole di 800 000 cgm per la rottura del turacciolo, per l'allargamento del camino, e per le proiezioni, nella prima fase; o per le sole proiezioni nella seconda fase, *e sempre per opera di un solo cg. dell'esplosivo idrogeno-ossigeno.*

Sebbene lo stato degli esplosivi ordinarii sia diverso da quello dell'esplosivo dianzi considerato, e le condizioni di temperatura e di pressione sotto cui agiscono siano anche diverse, ne sceglierò due fra i più potenti, la nitroglicerina e la dinamite-gomma o gelatina esplosiva, e farò qualche confronto fra i loro dati e quelli dell'idrogeno-ossigeno nella tabella seguente, aggiungendovi i volumi $v_0$ dei gas dell'esplosione riportati a 0° e $760^{mm}$.

[1] Ricordando che negli esplosivi a combustione rapida (*frantumanti*) la velocità di propagazione dicesi *detonazione*, mentre *deflagrazione* dicesi quella degli esplosivi a combustione lenta (*dislocanti*), e che ciò che chiamasi comunemente detonazione non è che un effetto della vera detonazione, si può ritenere che le due velocità possano rappresentarsi grossolanamente con $v_i$. E poichè tale quantità diminuisce colla profondità dell'esplosione si deduce:

1) Il rumore prodotto dalla detonazione diminuisce coll'abbassarsi della lava nel camino.

2) I sismi vulcanici hanno ipocentri poco profondi ed aree ristrettissime.

[2] Questa velocità in alcuni esplosivi solidi supera 7000 m.

[3] Lo scoppio d'una caldaia a 15 at e quindi a 199° produce un lavoro di 3053 cgm, pari all'effetto distruttore d'un proiettile di 673 gr lanciato con velocità di 300 m al 1″.

| splosivi | Condizioni | $v_e$ | $v_i$ | $v_i - v_e$ | $\bar{v}_0$ | $f$ | P | Q | Temperatura di esplosione | Temperatura assoluta | A |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Idrogeno-Ossigeno | $15^{at}, 1500^{o}, 50^{m}$ | 806 | 6444 | 5638 | 5527 | 96 720 | 120 | 2811 | 3000 | 4773 | 800 000 |
| Id. | $30^{at}\ 2000^{o}\ 100^{m}$ | 516 | 4128 | 3612 | 6416 | 123 840 | 240 | Id. | Id. | 5273 | Id. |
| Id. | $150^{at}, 2500^{o}, 500^{m}$ | 126 | 1128 | 1002 | 7132 | 151 200 | 1200 | Id. | Id. | 5773 | Id. |
| Nitroglicerina. . | $1^{at}$, 0°, $0^{m}$ | trasc. | 9069 | 9069 | 712 | 10 084 | — | 1470 | 3196 | 3469 | 625 000 |
| Dinamite-gomma. | Id. | Id. | 9014 | 9014 | 708 | 9 332 | — | 1535 | 3203 | 3476 | 652 000 |

Per un confronto con le pressioni più alte prodotte nelle artiglierie di cui si parla nei trattati, prenderò il cannone 152/40/91 (Rª. Marina) il quale dà un massimo di 8773 cg per cmq con carica di 8 cg di balistite, ossia circa 1100 cg di pressione per ogni cg di carica; il mortaio 210 (Esercito) che arriva a dare 8830 cg di pressione con 4,400 cg di carica, cioè 2000 cg di pressione per cg di carica; il cannone 305/40 che dà 4972 cg di pressione con 105 di carica, ossia 47 di pressione per ogni unità di carica [1].

Se le considerazioni precedenti sopra $\frac{1}{9}$ cg d'idrogeno si applicano alle grandi quantità di questo gas che vengono a bruciare nel camino l'espansione $v_i$ e quindi lo spostamento di massa che essa produce va moltiplicato per un secondo fattore la cui grandezza è di ordine assai più elevato, e quindi si spiegano le energie formidabili sviluppate nelle eruzioni del Tambora nel 1815, del Krakatau nel 1883 e della Pelata nel 1902. E s'intende quanto sia esigua la valutazione di 140 miliardi di cgm calcolata da Omori pel lavoro compiuto dall'Azuma San nel 1893, e che sarebbe bastato appena per sollevare di 5 ch 9300 mc di lapillo compatto, cioè una piccola parte dei 211 milioni di mc eruttati dal Vesuvio nel 1906.

## Geologia. — *Di alcune vicende tettoniche delle nostre aree vulcaniche.* Nota di G. Rovereto, presentata dal Corrisp. Arturo Issel.

È risaputo che il vulcanismo italiano sorse quando i movimenti orogenici si erano quietati; e con facili constatazioni si può riconoscere, come i nostri vulcani posino su di un'ossatura appenninica ad assetto tettonico definitivo. Quindi, il De Lorenzo [2] ben si è posto quando assicurò, che essi vanno uniti a un sollevamento di carattere epeirogenetico, posteriore ai grandi movimenti orogenici.

[1] Nei tre casi, peso e velocità del proiettile sono: $45{,}4^{cg}$ e $706^{m}$; $102^{cg}$ e $347^{m}$; $385^{cg}$ e $780^{m}$ (G. Bianchi, *Corso teorico-pratico di Balistica Interna*, Torino, Pasta, 1914 pp. 131, 144, 146, 153);

[2] Atti R. Accad. Sc. di Napoli, vol. X, 1899.

Ora qui solo si tratta di porre in correlazione questa constatazione con altri fatti non ancora messi ben in chiaro.

Così, qual'è il morfologo che, parlando delle falcature delle coste italiane, non le abbia considerate un carattere di instabilità della Penisola, e un accompagnamento del vulcanismo? In vero però, i vulcani spenti della Toscana e del Lazio non sorsero da coste falcate, benchè le falcature dell'Italia Meridionale siano più antiche di essi. Con tale forma si presenta il golfo di Napoli, e i suoi collaterali i golfi di Gaeta e di Salerno; ebbene, nel fondo di questi ultimi esistono giacimenti, con tutta probabilità appartenenti al pontico ([1]), onde, anche accettando l'ipotesi, che questi golfi siano derivati da fratture e da smembramenti, bisogna pur dire che da essi non derivarono in modo diretto o immediato, le eruzioni, il cui principio fu molto più recente.

Ed è qui che sorge un pensiero nuovo: che il movimento di sollevazione epeirogenetica abbia rimosso le masse smembrate da antico, e reso beanti alcune delle loro fratture perimetrali: ma su di questo non è il caso di molto insistere.

Altro lato e non ancora tocco del problema è questo:

Nel quaternario abbiamo le grandi discese eustatiche del livello marino e i terrazzi, che da questo misterioso fenomeno derivarono, incisi tutt'attorno alle isole e alla terraferma. Ebbene i terrazzi della non vulcanica Capri, di cui per il primo ho rilevato i rapporti con gli altri principali fenomeni del quaternario ([2]), li ritroviamo alle stesse altitudini alle Eolie e alla base dell'Etna.

Alla stessa altitudine, all'Etna ([3]) e a Capri, sul terrazzo ritenuto appartenente al siciliense, si è trovato l'*Elephas antiquus*: e questo è assolutamente contrario all'opinione diffusa, che le aree vulcaniche siano molto instabili; anzi, il terrazzamento ci indica ancora, che se vi furono dei movimenti sconcertanti la grande corrispondenza fra i terrazzi, tali movimenti si verificarono al di fuori delle aree vulcaniche, ad esempio lungo lo stretto di Messina ([4]), dove la fauna del tirrenense si trova a 100 m. di altitudine, anzichè a 35 m. come di consueto.

([1]) Nel giacimento di Salerno si raccolgono fossili, che ho visti in una collezione dei proprietari della cava presso quella città, e dietro un esame sommario mi son sembrati del piano pontico: nel giacimento di Formia presso Gaeta non ho potuto trovar fossili, ma si tratta di marne identiche a quelle di Salerno e che hanno in più un forte odore di ittiolo.

([2]) Rovereto, *Studî di geomorfologia*, pag. 255. Genova, 1908.

([3]) Basile, in Atti Accad. Gioenia, vol. XI, 1876.

([4]) Gignoux, *Les formations marines plioc. et quat. de l'Italie du sud*, ecc., Lyon, 1913.

La condizione generale è questa: che il rilievo vulcanico ha sofferto del movimento epeirogenetico anteriore, o contemporaneo, al primo terrazzamento, e poi ha goduto di una stabilità assoluta. Così, ancora l'Etna offre un terrazzo riconosciuto per la prima volta dal De Lorenzo (1) a 300 m. di altitudine: questa quota indica quasi sempre il terrazzo del calabrense superiore, quindi tutta la base del monte si è accumulata prima di questo periodo, ed è emersa per il movimento eustatico: per di più, il pliocene superiore giunge in sua corrispondenza, secondo un dato dello Scalia, sino a 800 m. (2) di modo che, l'anteriore movimento epeirogenetico aveva localmente prodotto un sollevamento di almeno 500 m.

I terrazzamenti presentati dalle Eolie, già da molto tempo riconosciuti dal Cortese (3), dimostrano, che i coni vulcanici di quelle isole si son formati sottomare, e che sono in gran parte emersi, non per movimento proprio, ma per le discese quaternarie del livello marino: in Lipari si riconosce pure, come all'Etna, un terrazzo a circa 520 m., più alto di quello della serie quaternaria, il quale svela il movimento epeirogenetico anteriore.

La distinzione fra i risultati del fenomeno eustatico e quelli dell'epeirogenesi, è parsa a molti autori quasi impossibile; eppure in questa parte del Tirreno, nonostante il vulcanismo, ad essa si giunge con abbastanza fondamento. I terrazzi mantengono fissi i loro livelli, mentre l'epeirogenesi varia di intensità a seconda delle regioni; ma dovunque sia stata superiore al quantitativo di abbassamento eustatico, essa è riconoscibile.

Non ho dati per stabilire, come con i terrazzi di Capri possa coordinarsi la morfologia della base di Roccamonfina: per quella dei Flegrei ciò ho già tentato; ma i dati raccolti posteriormente indicherebbero delle anomalie, le quali se esatte, farebbero credere che lì si abbia veramente un'area vulcanica di un comportamento anomalo: di essa parlo in un altro scritto (4); e se qui le si accenna, si è perchè è bene notare come il metodo d'indagine da me seguito, non solo stabilisce la regola, ma trova anche l'eccezione.

Volendo fare un passo più avanti nel campo sintetico, possiamo domandarci se la situazione costiera, o che fu tale, di tutti i nostri vulcani peninsulari, non è in correlazione con quei movimenti interni di materia, supposti dalla teoria isostatica, i quali da sotto le aree di denudazione subatmosferica avverrebbero verso le aree ricoperte dalla distesa oceanica: i magma interni sarebbero allora venuti a giorno in conseguenza di assottigliamenti eccessivi della zona critica fra area continentale e area oceanica, zona che anche corrisponde alla da noi distinta *area di nascimento* delle

(1) De Lorenzo, *L'Etna*. Monogr. illustr. Arti Grafiche. Bergamo, 1907.
(2) Atti Accad. Gioenia, vol. XX, 1907.
(3) Mem. descrittive della Carta Geol. d'Italia, vol. VII, 1892.
(4) Nel Bollettino della Soc. Geol. Ital. in corso di pubblicazione.

incurvature epeirogenetiche. Con ciò si potrebbe seppellire definitivamente l'ipotesi. che per spiegare i rapporti del vulcanismo con i mari, attribuisce alle acque di questi una preponderante azione sulle eruzioni.

Una regione, cui la nostra scuola geologica si riferisce di rado, ma che completa mirabilmente la casistica delle condizioni morfologiche italiane, comprese le vulcaniche, è la Sardegna.

Qui abbiamo delle condizioni affatto differenti dalla Penisola: una zolla rimasta rigida rispetto ai movimenti orogenici del terziario, che in tre tempi, il più antico premiocenico — forse oligocenico —, il mediano postmiocenico e anteriore alla dissezione quaternaria, il più recente posteriore alla dissezione stessa, fu teatro di fortissime eruzioni. Essa è la regione in cui per la prima volta è stata applicata dal De Vecchi — il geodeta che fu pure il primo a porre un segnale trigonometrico sull'Etna — la teoria delle emissioni labiali, teoria a torto attribuita a un tedesco. Ora è probabile, che tali ripetute eruzioni, aventi il carattere della *ereditarietà*, abbiano approfittato di intime sconnessioni avvenute in quel massiccio, sconnessioni in modo più diretto indicate: dalla depressione del Campidano, avente tutto l'aspetto di una fossa di sprofondamento; dalla maniera con cui la Gallura, con le sue coste a *rias*, e le sue valli diagonali, si collega più con la parte occidentale della Corsica, che con il restante dell'isola.

Ma anche senza smembramenti, è un fatto, che molti massicci rigidi sono campo di fenomeni vulcanici attivi, quanto quelli delle aree piegate: così, per portare un esempio poco noto, l'estesissimo tavolato patagonico ha sprofondamenti circoscritti, che non presentano manifestazioni vulcaniche, mentre è costellato di vulcani dove non appariscono fratture di sorta.

Ciò induce a credere, che quando il magma interno tocca un'eccessiva potenzialità eruttiva, per cause sue proprie, giunge alla superficie anche per vie non preparate da alcuna condizione tettonica. Le pieghe, gli smembramenti. le fratture, i rigonfiamenti epeirogenetici, l'isostasia, sono tutte condizioni che possono concorrere alle manifestazioni vulcaniche; ma nessuna ne è un elemento necessario.

Chimica. — *Sulle amalgame di argento ricche di argento.* Nota di N. Parravano e P. Jovanovich [1], presentata dal Socio Paternò.

Per le amalgame di argento ricche di argento si conoscono, circa il modo di comportarsi al calore, dati sperimentali che somigliano molto a quelli delle corrispondenti amalgame di Au.

Già Gay-Lussac aveva osservato che, persino alla temperatura di fusione, l'argento trattiene un po' di mercurio [2]. In seguito de Souza [3] trovò che le amalgame di argento, mantenute fino a peso costante nel vapore: *a*) di zolfo; *b*) di mercurio; *c*) di difenilammina bollenti, lasciano residui corrispondenti rispettivamente alle formule: *a*) $Ag_{13}Hg$; *b*) $Ag_{11}Hg$; *c*) $Ag_4Hg$ con 12,48, 20,35, 31,65 % Hg. Merz e Weith [4], scaldando alla stessa temperatura in corrente di gas, trovarono valori diversi, ma ottennero sempre argento contenente ancora mercurio, e cioè nelle proporzioni di: *a*) 1,24; *b*) 2,37; *c*) 4,44.

D'altra parte Reinders [5], studiando gli equilibri tra amalgame di argento e soluzioni di nitrato di mercurio e di argento, giunse alla conclusione che Hg si scioglie in Ag allo stato solido fino alla proporzione di circa 2 at % (= 3,64 % in peso).

A chiarire la natura delle amalgame di argento ricche di argento si è perciò creduto opportuno misurarne la resistenza elettrica allo stesso modo che in precedenza si è riferito per le amalgame d'oro ricche d'oro.

Si è operato in tutto nella stessa maniera già descritta per l'oro. La omogeneità dei fili, di cui si è misurata la resistenza, è stata anche qui accertata con l'analisi della zona centrale.

I risultati delle misure sono riassunti nella tabella seguente e riportati sul diagramma.

Come si vede dalla figura, la conducibilità non varia secondo una curva continua. Questa presenta due tratti nettamente distinti: uno va da Ag fino a circa il 2 % di Hg, ed ha l'andamento che è caratteristico per le soluzioni solide; l'altro va da circa il 2 fino al 14 % di Hg, che è la concentrazione di mercurio più elevata che si è potuto raggiungere nei fili di cui si è misurata la resistenza. Questo secondo tratto è una retta. La conducibilità subisce perciò in questo intervallo di concentrazioni una varia-

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica inorganica e di Chimica fisica del R. Istituto di Studî superiori di Firenze.

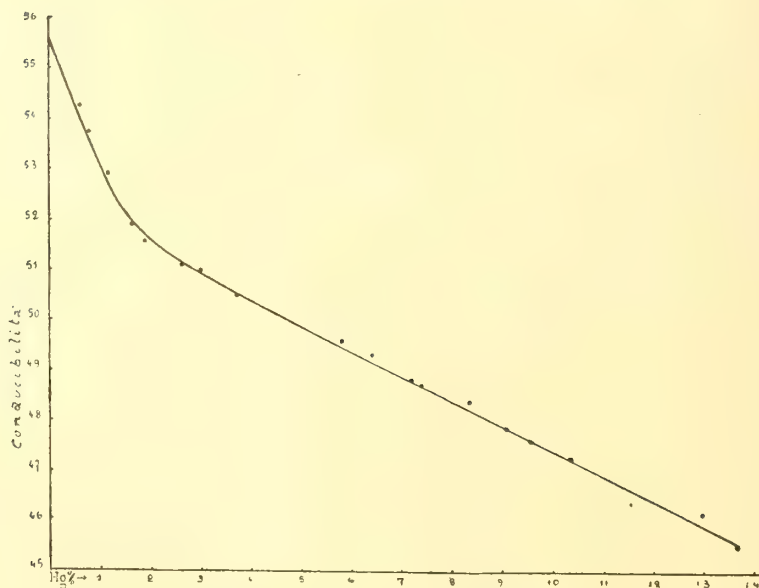
(2) Ann. Chim. Phys. [3], *18* (1846), 218.

(3) Berichte, *8*, 1616 (1875); *9*, 1050 (1876).

(4) Berichte, *14*, 1440 (1881).

(5) Zeit. Phys. Ch., *54*, 609 (1906).

zione lineare quale è caratteristica delle leghe costituite da **due individui** cristallini. Questi sono il cristallo misto saturo con 2 % Hg e, secondo Reinders (loc. cit.), il composto $Ag_3Hg$.

| Num. progressivo | % di Hg | Resistenza specifica $10^{-6} \times \varrho$ — $\varrho$ a 25° | Conducibilità specifica $10^{4} \times \varkappa$ — $\varkappa$ a 25° |
|---|---|---|---|
| Argento puro | | 1,7985 | 55,601 |
| 1 | 0,677 | 18,392 | 54,371 |
| 2 | 0,792 | 18,602 | 53.758 |
| 3 | 1.160 | 18,897 | 52.918 |
| 4 | 1,611 | 19,259 | 51.924 |
| 5 | 1.894 | 19,382 | 51,594 |
| 6 | 2.653 | 19,569 | 51,102 |
| 7 | 3,011 | 19,609 | 50,997 |
| 8 | 3,710 | 19,804 | 50,496 |
| 9 | 5,849 | 20,136 | 49,662 |
| 10 | 6,392 | 20,276 | 49,318 |
| 11 | 7,157 | 20,488 | 48,801 |
| 12 | 8.388 | 20,661 | 48,399 |
| 13 | 9,095 | 20.863 | 47,931 |
| 14 | 9,563 | 21,011 | 47.593 |
| 15 | 10,36 | 21,139 | 47,306 |
| 16 | 11,37 | 21.405 | 46,719 |
| 17 | 13,00 | 21.656 | 46.176 |
| 18 | 13,72 | 22,013 | 45,424 |

## Zoologia. — *Stadî larvali di Ichthyococcus ovatus* (Cocco) [1]. Nota di LUIGI SANZO, presentata dal Socio B. GRASSI.

Nel 1913 [2] facevo conoscere uno stadio larvale di *Ichthyococcus ovatus*, caratteristica, per la forma, l'enorme sviluppo di una porzione della pettorale, per un lungo tratto intestinale fuori uscente dal corpo, e la presenza di abbozzi di fotofori non ancora pigmentati.

L'esemplare misurava mm. 28,20.

D'allora ho potuto avere, in ottimo stato di conservazione, stadî larvali più giovani, a partire dagli 11 mm. in su, e che vengo ad illustrare in questa Nota.

Nello sviluppo di questa specie possono, come ho già stabilito per altri Scopelini, distinguersi tre periodi:

I. PERIODO DI ACCRESCIMENTO LARVALE. — La larva di mm. 28,20 è vicina al massimo d'accrescimento larvale.

II. PERIODO DI RIDUZIONE LARVALE. — La riduzione in lunghezza è in questa specie molto forte. Il prof. Brauer [3] ebbe degli esemplari fino ai 13 mm. nei quali erano apparsi la maggior parte degli organi luminosi, ma la forma del corpo si presentava slanciata e differente di molto di quella dell'adulto.

III. PERIODO D'ACCRESCIMENTO GIOVANILE. — L'animale subisce una profonda modificazione di forma; sui 18-19 mm., pur conservando un certo grado di trasparenza, ha già la forma caratteristica dell'adulto ed al completo e risplendenti gli organi luminosi.

*Larva di mm. 11,04.* — È una larva molto slanciata, con capo molto sviluppato in lunghezza rappresentando i 2/9 della lunghezza totale del corpo. Il muso è molto allungato ed appiattito nel senso dorso-ventrale; il mascellare inferiore è alquanto sporgente al superiore; entrambe le mascelle sono guarnite di piccolissimi denti.

L'occhio è a metà della lunghezza del capo, è ellittico, guarda leggermente in avanti, e sporge sul profilo dorsale del capo. Ha bei riflessi argentei.

Sono ben caratteristiche le pettorali distinte ciascuna in due parti: l'una supero-anteriore arrotondita e poco sviluppata in lunghezza, e l'altra infero-posteriore assai ristretta e molto allungata. Si ha una conformazione

[1]) Dall'Istituto Centrale di Biologia marina in Messina, del R. Comitato Talassografico Italiano.

[2]) Luigi Sanzo, *Larva di Ichthyococcus ovatus* (Cocco), Memoria XXVII del R. Comitato Talassografico Italiano, 1913.

[3]) A. Brauer, *Die Trifsee. Fische - Sistematischer Teil Deutsche Tiefsee.* Expedition 1898-99, Bd. XV, pag. 95.

inversa che nelle pettorali di larve in accrescimento di *Myctophum Gemellari* già da me fatta conoscere, e nelle quali è la porzione dorsale quella più sviluppata in lunghezza. La parte larvale della pinna è molto sviluppata ed a forma quadrilatera.

Quasi a metà della lunghezza del tronco è abbozzata la dorsale, non ancora disimpegnata anteriormente dal residuo di pinna primordiale. In dietro è invece ben distinta da un lungo residuo di primordiale che rappresenta la futura adiposa.

L'urostilo è formato, e la caudale ha i suoi 19 grandi raggi definitivi.

Ventralmente, nella porzione post-anale, un residuo di pinna primordiale, preannunzia nella forma e posizione la pinna anale.

Si contano 39 segmenti dei quali 25 preanali e 14 post anali.

L'ano è nella metà posteriore del corpo, lo spazio preanale occupando mm. 7,20 sulla lunghezza totale. Non si vede fuoriuscire da quella larva, come dalle successive, un lungo tratto d'intestino; ma il contorno irregolare, direi frastagliato di un breve tratto sporgente, lascia sospettare che esso si esistesse e fosse andato perduto.

La pigmentazione è caratteristica. Nella regione latero-ventrale del tronco, del pigmento in nero si dispone, a puntini, avanti e lungo ogni segmento trasversale, risultandone così una disposizione segmentaria. Pochi punticini sulla base della caudale ed altri in linea sui raggi inferiori. Analogo pigmento s'addensa sull'estremo tratto intestinale, si vede diffuso sulla parte antero-dorsale della pettorale e seguire il cinto toracico, il profilo inferiore della sinfisi toracica in avanti, e quello inferiore delle due mascelle. Se ne riscontra, raccolto a gruppi, avanti e dietro l'occhio.

*Larva di mm. 14,48.* — La porzione inferiore della pettorale è relativamente più sviluppata e sono presenti delle piccolissime ventrali contrapposte all'origine della dorsale.

L'anale presenta 9 raggi, posteriormente ai quali la pinna presenta una porzione non differenziata ed ancora striata.

La caudale ha ora due ben distinti lobi; tanto dorsalmente quanto ventralmente vi si riscontrano 4-5 piccoli raggi.

L'adiposa ha una larga base d'impianto e margine libero arrotondito; è divenuta relativamente più alta che nello stadio precedente. Resta più vicina alla dorsale che alla caudale. La dorsale ha otto raggi ed è disimpegnata quasi completamente; la primordiale che la seguiva avanti è ora ridotta ad una bassissima listarella.

Ventralmente, avanti l'anale, pende un rilevante tratto intestinale rappresentato da parte dell'intestino medio e da quello posteriore. Su questo tratto s'estende una striscia di pigmento in nero puntiforme. La pigmentazione si mantiene nei caratteri della larva precedente; tranne che quella latero ventrale è divenuta più intensa ad elementi più grossi ed arroton-

dite; essa tende ad estendersi dorsalmente alla linea laterale, lungo i segmenti trasversali, conservandosi così sempre la disposizione segmentaria già vista.

*Larva di mm. 21,36.* — La porzione inferiore della pettorale si è allungata ancora maggiormente; nello stesso tempo si è, nella sua porzione prossimale, allargata distendendo ad arco, in basso, il margine corrispondente.

Il muso è divenuto più alto. È scomparso dorsalmente ogni residuo di pinna primordiale. L'adiposa è finemente striata e sull'anale si contano 15 raggi, che è il numero definitivo. Le ventrali ancora piccolissime.

Sul tratto intestinale pendente è bene visibile la valvola spirale.

Il pigmento al tronco si è esteso ancora maggiormente sui miosetti della muscolatura latero dorsale, ed alla base della caudale. Del pigmento è comparso sulla porzione allungata della pettorale: lungo il margine dorsale anteriore, ed alla parte prossimale rigonfia.

*Larva di mm. 28,20.* — La porzione allungata della pettorale è enormemente sviluppata, arrivando, in distensione, a metà tra le ventrali e l'anale. È striata, ma la sua striatura è più grossa dell'altra porzione poco sviluppata ed arrotondita.

Ventralmente e vicino al profilo inferiore del corpo si notano per trasparenza una serie di abbozzi di fotofori non ancora pigmentati: 17 dal cingolo toracico alle ventrali, e 10 dalle ventrali all'anale: numeri che corrispondono a quelli degli omonimi organi luminosi dell'adulto.

Dalla sinfisi toracica in avanti altri fotofori che non è possibile computare senza sciupare l'interessante esemplare.

La dorsale ha 12 raggi, che è il numero definitivo.

Persiste il largo impianto dell'adiposa.

Le ventrali si mantengono tuttavia piccolissime.

Il muso aumentato in altezza ma tuttavia molto lungo.

La pigmentazione alla regione latero-ventrale del tronco è divenuta più intensa.

E. M.

# INDICE DEL VOLUME XXVII, SERIE 5ª. — RENDICONTI

1918 — 2° Semestre.

## INDICE PER AUTORI

N



P



R



S



T

# INDICE PER MATERIE

# INDICE

## Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

### *Seduta del 1° dicembre 1918.*



PRESENTAZIONE DI LIBRI



CORRISPONDENZA



### *Seduta del 15 dicembre 1918.*



(*Segue in terza pagina*)

E. Mancini *Segretario d'ufficio responsabile.*